Н. Резник, А. П. Хоменко, А. А. Засядко. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2008. 523 с.

2. Елисеев С. В., Засятько А. А. Виброзащита и виброизоляция как управление колебаниями объектов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2004. Вып. 1. С. 26-34.

3. Ермошенко Ю. В., Упырь Ю. В. Особенности взаимодействия в системах четырехполюсников // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 4 (16). С. 21-28.

4. Дружинский И. А. Механические цепи. Л.: Машиностроение, Ленингр.отдние, 1977. 238 с.

УДК 625.84:85.068.08

И.М. Ефремов, К.Н. Фигура*

ПРОЦЕСС РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ СМЕСЕЙ

Разработана математическая модель процесса распространения колебаний в смесях в условиях перемешивания и получена зависимость затухания колебаний частиц смеси.

Ключевые слова: смесь, колебания, перемешивание, роторно-вибрационный смеситель.

В настоящее время для создания смесительных устройств, предназначенных для производства различных строительных материалов, отвечающих современным требованиям, необходимо изучить процессы, возникающие при смешивании. Понимание этих процессов позволит усовершенствовать конструкцию смесителей, увеличить их производительность, снизить энергозатраты на осуществление рабочего процесса, повысить в целом эффективность применения данных устройств на производстве. Одними из наиболее передовых являются устройства, основанные на воздействии вибрационного поля на смесь. Поэтому в данной работе рассматривается вопрос распространения колебаний в смесях в условиях перемешивания.

Для разработки математической модели процесса распространения колебаний в смесях в условиях перемешивания необходимо получить зависимость затухания колебаний частиц смеси.

Затухание колебаний, обусловленное поглощением энергии, происходит вследствие расширения фронта волны и является функцией структурно-реологических свойств среды. Интенсивность затухания зависит также от формы излучателя колебаний и вида совершаемых им колебаний. Общее затухание амплитуды смещения для сред с вязким сопротивлением принято определять по формуле:

$$A_2 = A_1 \cdot \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \cdot e^{-0.5\, j \cdot (r_2 - r_1)}, \qquad (1)$$

где A_1 и A_2 – амплитуды колебаний смеси на расстоянии соответственно r_1 и r_2 от оси вибратора, j – коэффициент затухания колебаний.

Свойства бетонных смесей при вибрировании характеризуются не только коэффициентом затухания колебаний, но также модулем E объемной упругости и скоростью v распространения волн.

* – автор, с которым следует вести переписку

Связь между ними определяется зависимостью: $\nu = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$,

где ρ – плотность среды.

Таким образом, согласно имеющимся представлениям [1, 2, 3], бетонную смесь следует представлять как вязкоупругую среду. К отличительным особенностям глубинного вибрирования при перемешивании бетонных смесей в роторно-вибрационном смесителе можно отнести следующие:

– наличие цилиндрической камеры смешивания;

– постоянное разрушение среды за счет движения лопастей;

– непрерывное изменение свойств смеси в процессе перемешивания.

Эти обстоятельства накладывают дополнительные трудности при решении поставленной задачи. Поэтому были введены следующие дополнения:

– плотность ρ смеси, так как она изменяется незначительно, была принята постоянной;

– камера смешивания условно разделена на два цилиндра: первый вблизи глубинного вибратора, второй вблизи стенки корпуса, за границей движения лопасти;

– вязкость среды с увеличением расстояния от вибратора радиусом R_0 описывается кусочно-постоянной функцией (рис. 1):

$$\mu = \begin{cases} \mu_1;\ R_0 < r < R_1 \\ \mu_2;\ R_1 < r < R_2 \end{cases}, \qquad (2)$$

где R_1 – условная граница, называемая в дальнейшем радиусом действия вибратора.

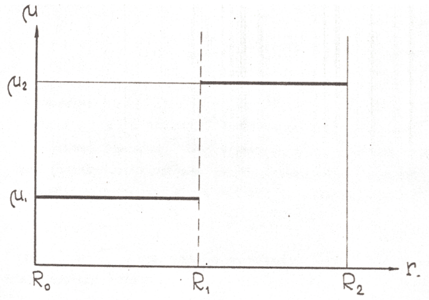

Рис. 1. График кусочно-постоянной функции.

Модуль E объемной упругости – постоянный, так как в настоящее время нет данных о его величине по мере изменения вязкости смеси. На основании вышеизложенного можно написать уравнение распространения колебаний в вязкоупругой среде:

$$\rho \cdot \frac{d^2U}{dt} = E\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dU}{dr} + \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dU}{dr}\right). \quad (3)$$

Потребуем на границе радиуса действия вибратора непрерывность смещения точек среды $U(r,t)$ и упруго-вязких напряжений в среде $E\cdot\dfrac{dU}{dr} + \mu\cdot\dfrac{d^2U}{dt\cdot dr}$. Кроме того, предполагая, что смесь не отрывается от вибратора и внутренней стенки корпуса, поставим условия: на вибраторе $U(R_0,t) = A_0\cdot e^{i\omega t}$ и на стенке $U(R_2,t) = 0$.

Естественно считать колебания среды гармоническими с частотой ω и искать $U(r,t)$ в виде:

$$U(r,t) = U_0(r)\cdot e^{i\omega t}. \qquad (4)$$

Подставляя (3) в (4), для функции $U_0(r)$ получим уравнение:

$$(E + i\cdot\omega\cdot\mu)\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dU_0}{dr} + \omega^2\cdot\rho\cdot U_0 = 0, \quad (5)$$

и условия $U_0(R_0) = A_0; U_0(R_2) = 0$, $U_0(r)$ и $(E + i\cdot\omega\cdot\mu)\cdot\dfrac{dU_0}{dr}$ непрерывны при $r = R_1$.

Решение уравнения (5) с учетом условий позволяет определить функцию $U_0(r)$ колебания частиц. Общее решение уравнений в областях $R_0 < r < R_1$ и $R_1 < r < R_2$ имеет вид:

$$U_0 = C_{1,2}H_0^{(1)}\left(r\sqrt{\lambda_{1,2}}\right) + D_{1,2}H_0^{(2)}\left(r\sqrt{\lambda_{1,2}}\right), \quad (6)$$

где C и D – произвольные постоянные, $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ – функции Ханкеля;

$$\lambda_{1,2} = \frac{\omega^2\cdot\rho}{E + i\cdot\omega\cdot\mu_{1,2}}.$$

Обозначения с индексом 1 относятся к области $R_0 < r < R_1$, с индексом 2 – к области $R_1 < r < R_2$. Как показывают предварительные оценки, для нашего случая значения $\left| r \cdot \sqrt{\lambda_{1,2}} \right|$ достаточно велики [4, 5], и можно заменить функции Ханкеля их асимптотическими выражениями:

$$H_0^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot z}} \cdot e^{i\left(z - \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$H_0^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot z}} \cdot e^{i\left(z - \frac{\pi}{4}\right)},$$

где $z = r \cdot \sqrt{\lambda_{1,2}}$. С учетом изложенного, после несложных преобразований, уравнение (6) примет вид:

$$U_0(r) = \frac{1}{r}\left(P_{1,2} e^{i\sqrt{\lambda_{1,2}}\cdot(r-R_1)} + S_{1,2} e^{-i\sqrt{\lambda_{1,2}}\cdot(r-R_1)} \right), \quad (7)$$

где $P_{1,2}$ и $S_{1,2}$ – произвольные постоянные. Значение этих постоянных можно определить из условий при $r = R_0$; $r = R_2$; $r = R_1$.

При $r = R_0$:

$$\frac{1}{\sqrt{R_0}}\left(P_1 \cdot e^{i\sqrt{\lambda_1}\cdot(R_0 - R_1)} + S_1 \cdot e^{-i\sqrt{\lambda_1}\cdot(R_0 - R_1)} \right) = A_0$$

при $r = R_2$:

$$\frac{1}{\sqrt{R_2}}\left(P_2 \cdot e^{i\sqrt{\lambda_2}\cdot(R_2 - R_1)} + S_2 \cdot e^{-i\sqrt{\lambda_2}\cdot(R_2 - R_1)} \right) = 0,$$

при $r = R_1$:

$$\frac{1}{\sqrt{R_1}}(P_1 + S_1) = \frac{1}{\sqrt{R_1}}(P_2 + S_2)$$

$$(E + i\omega\mu_1)\left\{ -\frac{1}{2 \cdot R_1^{\frac{3}{2}}} \cdot (P_1 + S_1) + \frac{i \cdot \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{R_1}} \cdot (P_1 - S_1) \right\} =$$

$$= (E + i\omega\mu_2)\left\{ -\frac{1}{2 \cdot R_1^{\frac{3}{2}}} (P_2 + S_2) + \frac{i \cdot \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{R_1}} (P_2 - S_2) \right\}$$

Предварительные оценки показывают, что $E >> i \cdot \omega \cdot \mu_{1,2}$, следовательно, можно упростить последнее условие, приняв $E + i \cdot \omega \cdot \mu_1 \cong E + i \cdot \omega \cdot \mu_2$. Тогда получим $\sqrt{\lambda_1} \cdot (P_1 - P_2) = \sqrt{\lambda_2} \cdot (S_1 - S_2)$, или считая тогда $\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2}$. Тогда из условия $r = R_1$ получим $P_1 = P_2$ и $S_1 = S_2$. Это означает, что при пересечении условной границы волна не отражается от нее. Исключая P_2 и S_2 получим условие для нахождения постоянных P_1 и S_1.

$$\begin{cases} P_1 \cdot e^{i\sqrt{\lambda_1}(R_0 - R_1)} + S_1 \cdot e^{-i\sqrt{\lambda_1}(R_0 - R_1)} = A \cdot \sqrt{R_0} \\ P_1 \cdot e^{i\sqrt{\lambda_2}(R_2 - R_1)} + S_1 \cdot e^{-i\sqrt{\lambda_2}(R_2 - R_1)} = 0 \end{cases}$$

Откуда:

$$P_1 = \frac{A_0 \cdot \sqrt{R_0} \cdot e^{-i\sqrt{\lambda_2}(R_2 - R_1)}}{e^{i\left[\sqrt{\lambda_1}(R_0 - R_1) - \sqrt{\lambda_2}(R_2 - R_1)\right]} - e^{i\left[-\sqrt{\lambda_1}(R_0 - R_1) + \sqrt{\lambda_2}(R_2 - R_1)\right]}}$$

$$S_1 = \frac{-A_0 \cdot \sqrt{R_0} \cdot e^{i\sqrt{\lambda_2}(R_2 - R_1)}}{e^{i\left[\sqrt{\lambda_1}(R_0 - R_1) - \sqrt{\lambda_2}(R_2 - R_1)\right]} - e^{i\left[-\sqrt{\lambda_1}(R_0 - R_1) + \sqrt{\lambda_2}(R_2 - R_1)\right]}}$$

После подстановки в уравнение (7) получим:

при $R_0 < r < R_1$

$$U_0(r) = \frac{A_0 \cdot \sqrt{R_0}}{\sqrt{r}} \times$$

$$\times \frac{e^{i\cdot\left[\sqrt{\lambda_1}\cdot(r - R_1) - \sqrt{\lambda_2}\cdot(R_2 - R_1)\right]} - e^{i\cdot\left[-\sqrt{\lambda_1}\cdot(r - R_1) + \sqrt{\lambda_2}\cdot(R_2 - R_1)\right]}}{e^{i\cdot\left[\sqrt{\lambda_1}\cdot(R_0 - R_1) - \sqrt{\lambda_2}\cdot(R_2 - R_1)\right]} - e^{i\cdot\left[-\sqrt{\lambda_1}\cdot(R_0 - R_1) + \sqrt{\lambda_2}\cdot(R_2 - R_1)\right]}}$$

при $R_1 < r < R_2$

$$U_0(r) = \frac{A_0 \cdot \sqrt{R_0}}{\sqrt{r}} \times$$

$$\times \frac{e^{i\cdot\left[\sqrt{\lambda_1}\cdot(r - R_2)\right]} - e^{i\cdot\left[\sqrt{\lambda_1}\cdot(r - R_2)\right]}}{e^{i\cdot\left[\sqrt{\lambda_1}\cdot(R_0 - R_1) - \sqrt{\lambda_2}\cdot(R_2 - R_1)\right]} - e^{i\cdot\left[-\sqrt{\lambda_1}\cdot(R_0 - R_1) + \sqrt{\lambda_2}\cdot(R_2 - R_1)\right]}}$$

Чтобы упростить исследование этих выражений, представим $\sqrt{\lambda_1}$ и $\sqrt{\lambda_2}$ в следующем виде, разложив их в ряд и взяв лишь значимые члены ряда:

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{\omega^2 \cdot \rho}{E + i \cdot \omega \cdot \mu_1}} =$$

$$= \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot \left(1 + \frac{i \cdot \omega \cdot \mu_1}{E}\right)^{-\frac{1}{2}} \cong ,$$

$$\cong \omega \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot \left(1 - \frac{i \cdot \omega \cdot \mu_1}{2 \cdot E}\right)$$

учитывая, что $\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{1}{\nu}$, где ν – скорость распространения волн в среде, тогда:

$$\sqrt{\lambda_1} = \frac{\omega}{\nu} - i \cdot j_1,$$

$$j_1 = \frac{\omega^2 \cdot \mu_1}{2 \cdot E \cdot \nu},$$

где j_1 – коэффициент затухания волн.
Аналогично:

$$\sqrt{\lambda_2} = \frac{\omega}{\nu} - i \cdot j_2$$

$$j_2 = \frac{\omega^2 \cdot \mu_2}{2 \cdot E \cdot \nu} .$$

Обозначим $e^{-j_1 \cdot (R_1 - R_0)} = k_1$; $e^{-j_2 \cdot (R_2 - R_1)} = k_2$. Числа k_1 и k_2 показывают, во сколько раз уменьшается амплитуда колебаний волны за счет вязкости при распространении в корпусе смесителя. Так как задача установки глубинного вибратора – разрушение структуры материала, то поглощение в зоне $R_0 - R_1$(зона действия вибратора) невелико: $k_1 \approx 1$. Рассмотрим случай, когда поглощения в слое $R_1 - R_2$ велико: $k << 1$. Тогда, сохраняя только главные члены уравнения, получим:

при $R_0 < r < R_1$

$$U_0(r) = \frac{A_0 \cdot \sqrt{R_0}}{\sqrt{r}} \cdot e^{-i \cdot \frac{\omega}{\nu} \cdot (r - R_0)} \cdot e^{-j \cdot (r - R_0)}, \quad (8)$$

при $R_0 < r < R_1$

$$U_0(r) = \frac{A_0 \cdot \sqrt{R_0}}{\sqrt{r}} e^{-i \cdot \frac{\omega}{\nu} \cdot (r - R_0)} e^{-j \cdot (r - R_0)} e^{-j_2 \cdot (r - R_1)} . \quad (9)$$

Полученные выражения (8) и (9) показывают, что слой, находящийся за лопастью, играет роль демпфера, в котором колебания затухают очень быстро. В зоне действия вибратора обеспечивается достаточно равномерное снижение вязкости смеси за счет распространения бегущей волны. Это описывается уравнением:

$$A(r,t) = R \cdot e \cdot U_0(r) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} =$$

$$= \frac{A_0 \cdot \sqrt{R_0}}{\sqrt{r}} \cdot e^{-j \cdot i \cdot (r - R_0)} \cdot \cos\left(t - \frac{r - R_0}{\nu}\right) .$$

Таким образом, разработана математическая модель процесса распространения колебаний в смесях в условиях перемешивания и получена зависимость затухания колебаний частиц смеси.

Литература

1. Вейлер С. Я., Ребиндер П. А. Исследование упруго-пластических свойств и тиксотропии дисперсных систем. доклады Академии наук, 1945. Т.49, № 5.
2. Волчинский С. И., Есипович И. М., Михайловский Е. И. К вопросу создания преобразования для замера параметров вибрационных полей в бетонных смесях. // Тр. ВНИИ по машинам для промышленности строительных материалов, 1973. Вып. 12-14. С. 264 - 275.
3. Вочинский С. И., Яшин В. П. Измерение переменного напряжения внутри вибрируемой вязкой, пластичной массы пьезоэлектрическими преобразователями // Там же. С. 136 - 140.
4. Горчаков Г. И. Определение пластичности цементного теста и бетонных смесей // Тр. НИИЦемента. Промстройиздат, 1951. Вып. 4. С. 47-54.
5. Десов А. Е. Виброперемешивание бетонной смеси в бетономешалке с вибрирующими лопастями // Тр. НИИЖелезобетона . Госстройиздат, 1961. Вып. 21. С. 59 - 66.