

М.: Акад. строит. и архит. СССР, 1960. 132 с.

5. Рыков С. П. Моделирование и оценка поглощающей и сглаживающей способности пневматической шины в расчетах подвески, плавности хода и подрессоривания автомобиля. Братск : БрГТУ, 2004. 124 с.

6. Рыков С. П. Экспериментальные исследования поглощающей и сглаживающей способности пневматических шин : Испытательный комплекс, методики проведения экспериментов и обработки результатов. Братск : БрГТУ, 2004. 322 с.

УДК 621.891;621.646

П.М. Огар, Д.Б. Горохов*

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ: ФРАКТАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Разработана методика эффективного моделирования профиля и шероховатой поверхности на основе функции Вейеритрасса-Мандельброта путем варьирования фрактальных параметров с использованием ЛПт-последовательностей. Предложены математическая модель фрактальной шероховатой поверхности, математическая модель контакта жесткой шероховатой поверхности с упругим полу-пространством. Получено выражение для определения фрактальной размерности эквивалентной шероховатой поверхности в зависимости от фрактальных размерностей контактирующих поверхностей и максимальных высот неровностей.

Ключевые слова: шероховатая поверхность, моделирование, упругий контакт, фрактальная размерность, поверхность.

Эксплуатационные свойства деталей машин во многом определяются микро- и макрогеометрией контактирующих поверхностей и величиной приложенной нагрузки. Изначально топография деталей машин традиционно рассматривалась как случайный стационарный процесс. Впервые такой подход был использован в работе [1], где авторы анализировали упругий контакт двух шероховатых поверхностей, исследуя плоскую поверхность в нормальном контакте с эквивалентной шероховатой поверхностью, состоящей из сферических неровностей постоянного радиуса, равного среднему радиусу кривизны исходных поверхностей. Предполагая нормальное распределение высот неровностей и распределение неровно-

стей в соответствии с известной плотностью материала, для нормальной нагрузки были получены выражения для количества контактных площадок, средней площади контакта, фактической площади контакта и зазора между поверхностями. Этот подход был развит в работах [2, 3 и др.].

Дальнейшее развитие теория контакта реальных поверхностей получила при использовании дискретной модели шероховатости [4, 5, 6 и др.], отличительной особенностью которой являются параметры распределения, выбирающиеся не на основе принятых допущений, а определяемых экспериментально в результате обработки профилограммы, исходя из значений микрогеометрии.

Основной недостаток вышеперечисленных теорий контакта шероховатых поверхностей заключается в том, что не учитывается взаимное влияние неровностей при большой плотности пятен контакта. Впервые учет взаимного влияния для неровностей, распределенных по высоте, был рассмотрен в работе [7], где показано, что с ростом взаимного влияния несущая способность стыка шероховатых поверхностей понижается, а граница перехода от упругих деформаций к упруго-пластическим смещается в область меньших контурных давлений.

В последнее время для моделирования контакта шероховатых поверхностей используется фрактальная геометрия [8, 9, 10]. Главное достоинство данного подхода заключается в том, что фрактальные параметры остаются неизменными на всех масштабах измерения шероховатости и не зависят от длины выборки.

Приведем краткое содержание основных положений теории контактного анализа фрактальных поверхностей. Для моделирования профиля шероховатой поверхности в работах [8, 10] использована функция Вейерштрасса-Мандельброта, обладающая свойствами непрерывности, недифференцируемости и автоаффинности

$$z(x) = G^{D-1} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\gamma^n x}{\gamma^{(2-D)n}}; \quad 1 < D < 2; \\ \gamma > 1,$$

где G – характерный масштаб длины поверхности, D – фрактальная размерность, γ^n – определяет частотный спектр шероховатой поверхности. Для высокой спектральной плотности и случайной фазы признано подходящим значение $\gamma = 1,5$.

В работе [8] для описания профиля использована функция

$$z(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^{(2-D)n} [\cos \varphi_n - \cos(2\pi\gamma^n x + \varphi_n)],$$

где n – индекс частоты, φ_n – случайная фаза.

Для описания изменения высоты поверхности в [9] использована функция

$$z(x, y) = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D_s-2} \left(\frac{\ln \gamma}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^{n_{\max}} \gamma^{(D_s-3)n} \times \\ \times \left(\cos \varphi_{m,n} - \cos \left\{ \frac{2\pi\gamma^n (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{L} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \cos \left[\arctg \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{\pi m}{M} \right] + \varphi_{m,n} \right\} \right) \quad (1) \\ n_{\max} = \text{int} \left[\frac{\lg(L/L_m)}{\lg \gamma} \right],$$

где L – длина выборки, L_m – предельная длина, $D_s = D+1$, M – параметр, определяющий количество налагаемых волн для моделирования поверхности.

Для упрощения задачи система двух противостоящих шероховатых поверхностей заменена системой, состоящей из плоской твердой поверхности и деформирующейся эквивалентной шероховатой поверхностью с эквивалентным модулем Юнга $E^* = (1-\nu_1^2)/E_1 + (1-\nu_2^2)/E_2$, где ν_1 , ν_2 , E_1 и E_2 – коэффициенты Пуассона и модули Юнга исходных поверхностей соответственно. Основной подход при определении общей силы деформации плоскости контакта заключается в вычислении сил микроконтактов отдельных неровностей и интегрировании сил микроконтактов всей поверхности с помощью функции размерного распределения микроконтактов, разработанной Мандельбротом. Особенно трудная задача механики микроконтакта это изменение формы поверхности вследствие ее деформации [8].

При контактном анализе фрактальных поверхностей для определения силы деформации отдельного микроконтакта данного размера необходимо, прежде всего, определить деформацию с противостоящей твердой поверхностью. Однако из-за сложности выражения (1) невозможно получить простые соотношения для деформации неровности, соответствующей размеру микроконтакта из-за двойного суммирования и присутствия случайных фаз. Поэтому допускаются сферические микроконтакты неровностей и одноперемежные эквивалентные соот-

ношения для двухпеременных поверхностей. Это сделано путем введения множителя $C(M)$, чтобы определить наложение M гребней, и с помощью установки среднеквадратического значения 2D поверхности, эквивалентной 3D поверхности [9]. После введения множителя $C(M)$ и рассмотрения только одного гребня в выражении (1) было обнаружено, что для типичного значения $D = 2,5$ и M в диапазоне от 1 до 100 $C(M)$ принимал значения от 0,85 до 1,15. Приравнивая $C(M) \approx 1$ из выражения (1), получено

$$z(x) = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D-2} (\ln \gamma)^{1/2} \times \\ \times \sum_{n=0}^{n_{\max}} \gamma^{(D-3)n} \left[\cos \phi_{1,n} - \cos \left(\frac{2\pi \gamma^n x}{L} - \phi_{1,n} \right) \right]$$

Таким образом, профиль поверхности состоит из уменьшающихся косинусоидальных неровностей, находящихся на верхушке больших неровностей. Для неровности с урезанным радиусом микроконтакта r' наибольшая длина волны равна $2r'$ [9]. Косинусная составляющая с соответствующим индексом частоты $n = \ln(L/2r') / \ln \gamma$

$$z(x_0) = G^{D-2} (\ln \gamma)^{1/2} (2r')^{(3-D)} \times \\ \times \left[\cos \phi_{1,n_0} - \cos \left(\frac{\pi x}{r'} - \phi_{1,n_0} \right) \right]. \quad (2)$$

Считая форму неровности приближенно круглой, эквивалентный радиус кривизны определяется из выражения $(r')^2 = 2R\delta$. Из выражения (2)

$$\delta = 2G^{(D-2)} (\ln \gamma)^{1/2} (2r')^{(3-D)}. \quad (3)$$

Тогда, с учетом того, что $a' = \pi(r')^2$

$$R = \frac{(a')^{(D-1)/2}}{2^{(5-D)} \pi^{(D-1)/2} G^{(D-2)} (\ln \gamma)^{1/2}}. \quad (4)$$

Следует добавить, что для вычисления силы контакта неровности используется наибольшая длина волны, а все меньшие неровности, находящиеся на большей неровности, игнорируются.

Из контактной теории Герца упругая сила микроконтакта

$$\Delta F_e = \frac{4E^* r^3}{3R}, \quad (5)$$

где r – радиус фактической площади микроконтакта, определяемой из равенства $\pi r^2 = a$. Для упругого контакта $a' = 2a$ и, следовательно, $a' = 2\pi r^2$. Упругая сила микроконтакта получена как функция от a' путем подстановки выражения (4) в (5)

$$\Delta F_e = \frac{2^{(11-2D)/2}}{3\pi^{(4-D)/2}} (\ln \gamma)^{1/2} G^{(D-2)} \theta(a')^{(4-D)/2}.$$

Согласно [1], критерием для начала пластической деформации является величина

$$\delta_R = bR \left(\frac{H}{E^*} \right)^2, \quad (6)$$

где b – константа, не зависящая от размера микроконтакта, H – твердость.

Контакт поверхности состоит из большого диапазона размеров микроконтактов. Подставляя выражения (3) и (4) в (6), можно получить критический размер микроконтакта a'_c , характеризующий пластическое течение материала неровности

$$a'_c = \left[2^{(9-2D)} \pi^{(D-2)} b^{-1} G^{(2D-4)} \left(\frac{E^*}{H} \right)^2 \ln \gamma \right]^{1/(D-2)}$$

Неровности с $a' > a'_c$ деформированы упруго, т. к. они удовлетворяют условию $\delta < \delta_R$, а неровности с $a' \leq a'_c$ удовлетворяют условию пластической текучести. Этот результат противоречит модели Гринвуда-Уильямсона, что объясняется тем, что контактный анализ учитывает зависимость радиуса кривизны от площади микроконтакта (выражение (4)), тогда как в модели Гринвуда-Уильямсона радиус кривизны рассматривается как независимая величина.

Для размерного определения пятен контакта используется выражение, предложенное Мандельбротом для кумулятивного распределения размеров островов на земной поверхности. Считается, что контактные пятна, образованные горизонтальным сечением, также будут следовать степенному закону вида

$$N(A > a') = \left(\frac{a'_L}{a'} \right)^{D/2}, \quad (7)$$

где распределение нормировано относительно площади наибольшего пятна контакта a_L .

Дифференцированием распределения (7) можно получить распределение $n(a)$ в виде

$$n(a') = \frac{D}{2} \frac{a_L^{D/2}}{a'^{D/2+1}}.$$

Следовательно, фактическая площадь контакта

$$A_r = \int_0^{a'_L} a' n(a') da' = \frac{D}{2-D} a'_L, \quad (8)$$

и сила упругой деформации

$$F_e = \int_{a'_c}^{a'_L} \Delta F_e(a') n(a') da'.$$

Приведем некоторые критические замечания по вышеизложенному контактному анализу фрактальных поверхностей.

1. По приведенному контактному анализу эквивалентный радиус кривизны неровности зависит от радиуса урезанного сечения r' . Однако, если для этой же сферической неровности радиусом R урезанное сечение сместить по высоте, то получим другое значение радиуса.

2. Не исследован закон распределения (7) для реальных шероховатых поверхностей. В работе [9] указано, что распределение размеров (7) имеет два варианта степенных законов: для больших пятен контакта экспонента размерность 2, а для малых она близка к 1,15.

3. Из выражения (8) для типичного значения $D=1,5$ следует $a'_L=0,33A_r$, что не типично для реальных площадей контакта шероховатых поверхностей.

4. Не учитывается взаимное влияние неровностей. Как следует из данных работы [8], при взаимном влиянии неровностей для упругого контакта не имеет место равенство $a'_c=2a$.

5. Напряжено-деформированное состояние контактирующих тел зависит от исходного просвета между ними [11]. Для правильной геометрической формы по мере роста приложенной нагрузки напряжения возрастают. Вначале имеют место упругие деформации. Пластическая деформация наступает при выполнении критериев, полученных по энергетической теории сдвиговой деформации или по теории максимальных напряжений (последний более предпочтителен для Герцевских эпюр контактных напряжений). Поэтому критерием перехода от одного вида контакта не может быть перемещение или площадь контакта.

6. Не исследовалось реальное число вершин микронеровностей фрактальных поверхностей, описываемых выражением (1).

Из вышесказанного следует необходимость дополнительного исследования фрактальных поверхностей. С этой целью в среде «MATLAB» была реализован программный комплекс «FD contact», позволяющий моделировать фрактальную поверхность согласно выражению (1). Исходными данными для моделирования являются параметры шероховатости по ГОСТ 2789-73 R_{max} , R_a , R_p , S , S_m , tp и дополнительные параметры Rq , Rp , заданные или определенные из профилограмм, а также фрактальные параметры D и G . При необходимости программа позволяет для заданного диапазона частот неровностей определять значения параметра $\gamma \in 1,4 \dots 1,6$ таким образом, чтобы значение каждого параметра шероховатости смоделированной поверхности соответствовало заданной точности.

Для смоделированной фрактальной поверхности определялось число вершин, впадин и высот неровностей по высоте шероховатой поверхности, вычислялись $k \times N \times N$ -массивов, состоящих из порядковых номеров пятен контакта, $k=100$ – количество уровней, определялись площади сечения и объемы неровностей.

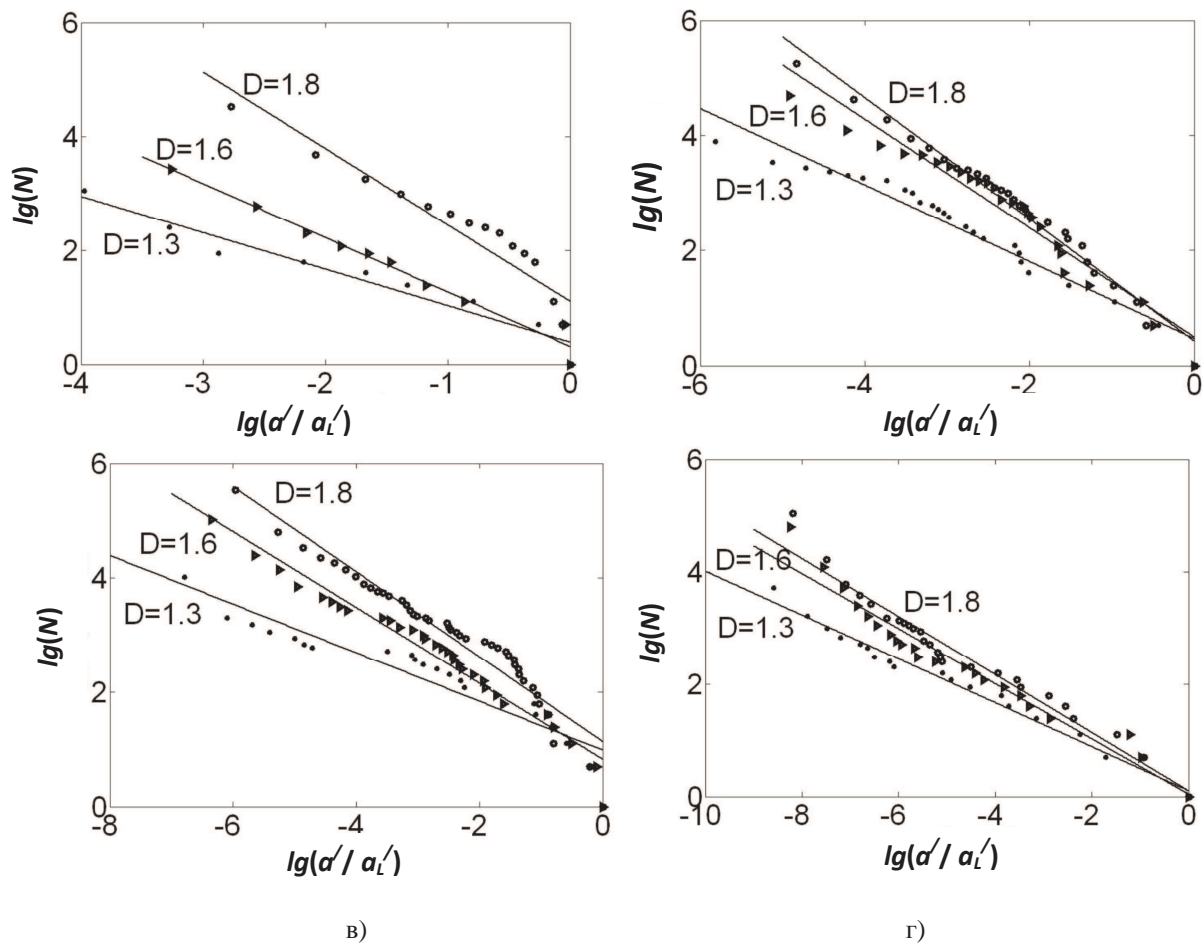


Рис. 1. Распределения размеров сечений неровностей, соответственно, для уровней $u = 0,15; 0,25; 0,35$ и $0,45$.

На рис. 1 представлены результаты вычислительных экспериментов по распределению размеров сечений неровностей (обозначены точками) для поверхностей с разной фрактальной размерностью и средние линии, полученные методом наименьших квадратов, наклон которых со средней погрешностью 12 % соответствует $D/2$. На рис. 2 представлены шероховатые поверхности, смоделированные по выражению (1) для $n_{\max}=6; 8; 10$ и 12 . На рис. 3 показаны типичные плотности распределения вершин и впадин неровностей шероховатой поверхности. Плавными линиями обозначены плотности распределения вершин и впадин неровностей вида

$$\varphi'_{nu}(u) = \frac{(u/u_s)^{\alpha_1-1} (1-u/u_s)^{\beta_1-1}}{B(\alpha_1, \beta_1)};$$

$$\varphi'_{nv}(v) = \frac{(v/v_s)^{\alpha_2-1} (1-v/v_s)^{\beta_2-1}}{B(\alpha_2, \beta_2)},$$

где u_s, v_s – соответственно, уровни насыщения вершин и впадин; $B(\alpha_i, \beta_i)$ – бета-функция, α_i, β_i – константы, определяемы. На рис. 4 а, б показаны плотности распределения высот неровностей, соответствующих распределениям вершин и впадин на рис. 3а,б, для значений $u_s=v_s=0,88$ (а) и $u_s=v_s=0,6$ (б). Как следует из представленных зависимостей, диапазон распределения относительных высот практически охватывает весь диапазон от 0 до 1, однако имеет явно выраженный максимум.

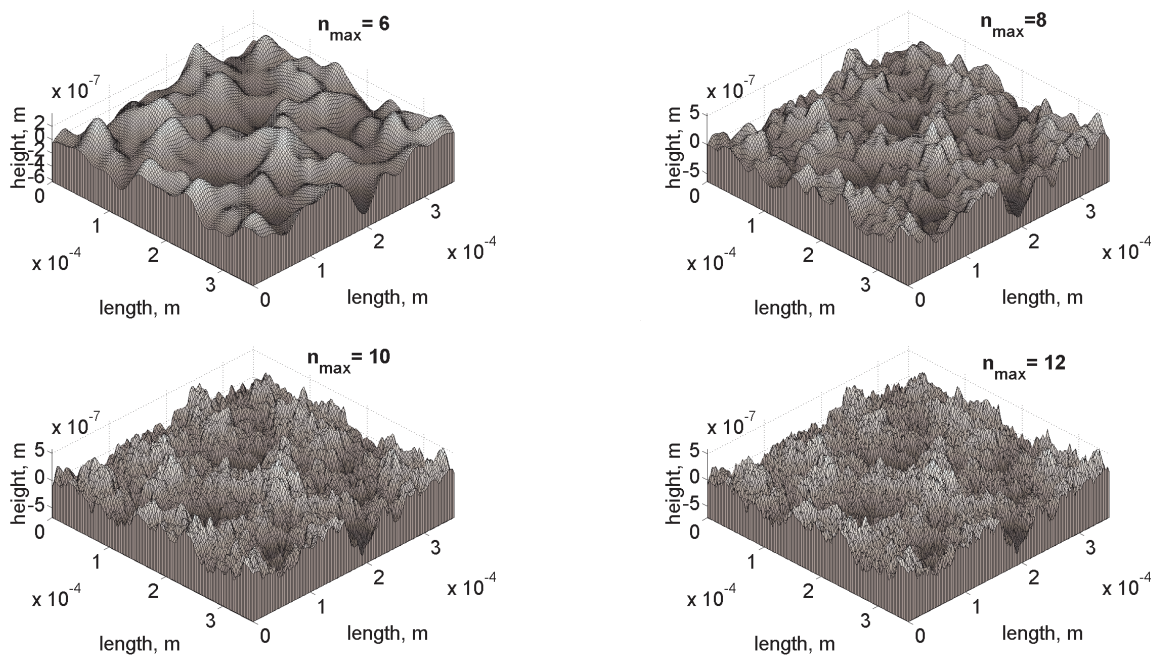


Рис. 2. Фрактальные шероховатые поверхности, смоделированные по выражению (1) для $n_{\max}=6; 8; 10$ и 12 .

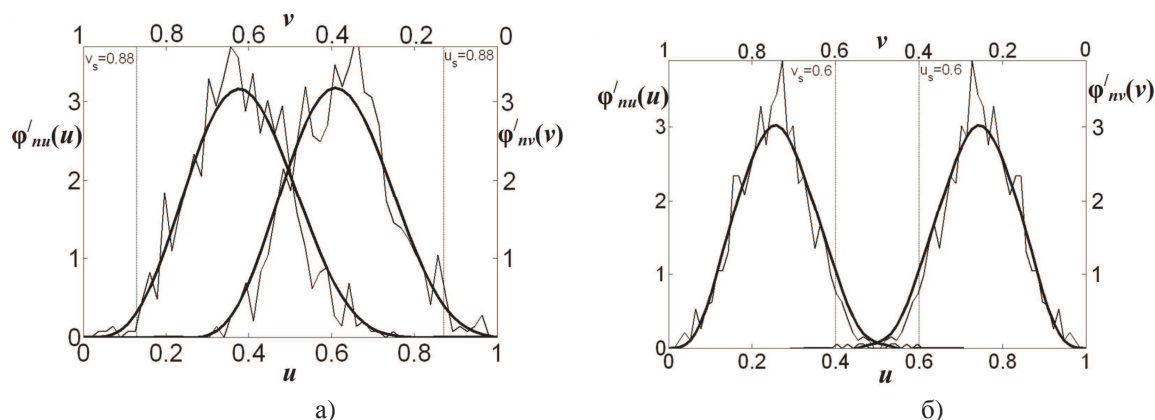


Рис. 3. Типичные плотности распределения вершин и впадин неровностей шероховатой поверхности.

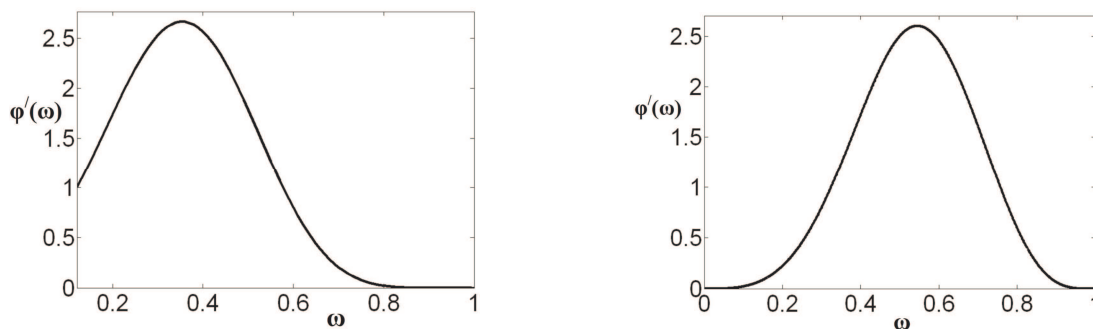


Рис. 4. Плотности распределения высот неровностей, соответствующих распределениям вершин и впадин на рис. 3.

На рис. 5 представлены зависимости числа вершин неровностей N_{\max} в зависи-

мости от числа гармоник n , из которых следует, что с ростом числа n происходит

насыщение числа вершин неровностей, $Ln=L/\gamma^{n_{max}}$,

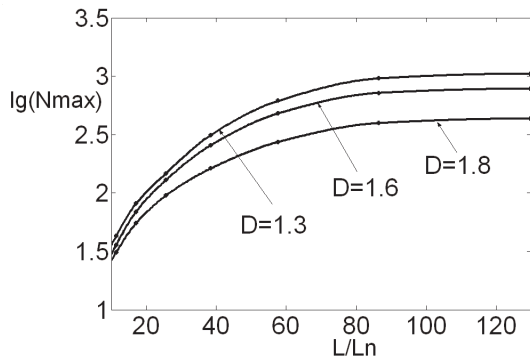


Рис. 5. Зависимости числа вершин неровностей N_{max} в зависимости от числа гармоник n для разных фрактальных размерностей.

При расчете относительной площади контакта использовалась дискретная модель шероховатости, параметры которой определялись из смоделированной поверхности. Как показали проведенные нами дополнительные исследования, расчет относительной площади контакта при распределении высот неровностей, согласно рис. 4, с погрешностью, не превышающей 5 %, можно производить, используя дискретную модель шероховатости с высотами неровностей, равных среднему их значению. При расчетах относительной площади контакта использовалась функция распределения вершин неровностей в виде

$$\varphi(u) = \omega \sum_{k=0}^n \eta'(u - k\omega), \quad n = \text{int}(u/\omega), \quad (9)$$

где ω – относительная высота неровностей,

$$\eta(x) = \frac{B_x(\alpha, \beta)}{B(\alpha, \beta)},$$

$B_x(\alpha, \beta)$ – неполная бета-функция.

Изначально контакт отдельной неровности рассмотрен с учетом взаимного влияния остальных контактирующих неровностей, действие которых, используя принцип Сен-Венана, можно рассматривать как действие равномерно распределенной нагрузки q_c , действующей в кольцевой области на определенном расстоянии a_{ci} от неровности. В результате решения основного уравнения осесиммет-

рической контактной задачи получено выражение для определения относительной площади контакта

$$\eta_i = \frac{\varepsilon - u}{2\omega} - Fq \left[(1 + 0,5Fq) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon - u}{2\omega(1 + 0,5Fq)^2}} \right) \right], \quad (10)$$

где

$$Fq = \frac{q_c \Theta a_{ci}}{\omega R_{max}}, \quad (11)$$

Θ – упругая постоянная, $\Theta = 1/E^*$; $a_{ci} = A_c/N_{max}$; R_{max} – максимальная высота неровностей.

Для определения зависимости $\eta = \eta(Fq)$ использованы выражения [12,13]:

$$F_q(\varepsilon) = \frac{8 \int_0^{\min(\varepsilon, \varepsilon_s)} \eta_i^{1.5} \varphi'_n(u) du}{3 \cdot \pi \left(1 - \int_0^{\min(\varepsilon, \varepsilon_s)} \psi_\eta(\eta_i) \varphi'_n(u) du \right)}, \quad (12)$$

$$\psi_\eta(\eta_i) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \eta_i^{0.5} - \sqrt{\eta_i(1 - \eta_i)} \right], \quad (13)$$

$$\eta(\varepsilon) = \int_0^{\min(\varepsilon, \varepsilon_s)} \eta_i \varphi'_n(u) du, \quad (14)$$

которые совместно с выражениями (9), (10) и (11) составляют замкнутую систему трансцендентных уравнений. Зависимость $\eta(Fq)$ получаем исключением параметра ε из уравнений (12) и (14).

Результаты вычислений представлены на рис. 6 и рис. 7, из которых следует:

- с ростом числа гармоник n_{max} относительная площадь контакта при одинаковой относительной нагрузке Θq_c уменьшается;
- при увеличении фрактальной размерности D относительная площадь контакта уменьшается;
- более универсальным параметром, не зависящим от числа гармоник n_{max} и фрактальной размерности D , является параметр Fq ;
- взаимное влияние неровностей заметно проявляется при $\eta > 0,4$, а при $\eta = 0,8$ значения параметра, определенного с учетом взаимного влияния неров-

ностей и без учета (штриховая линия на рис. 6б), отличаются более чем два раза.

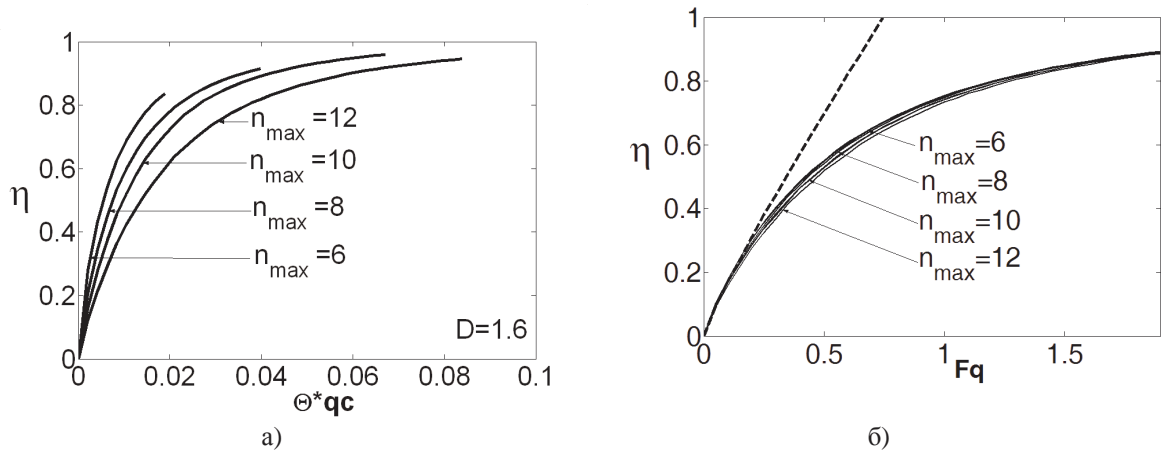


Рис. 6. Зависимости $\eta(\Theta q_c)$ и $\eta(Fq)$ для $n_{\max}=6; 8; 10$ и 12 .

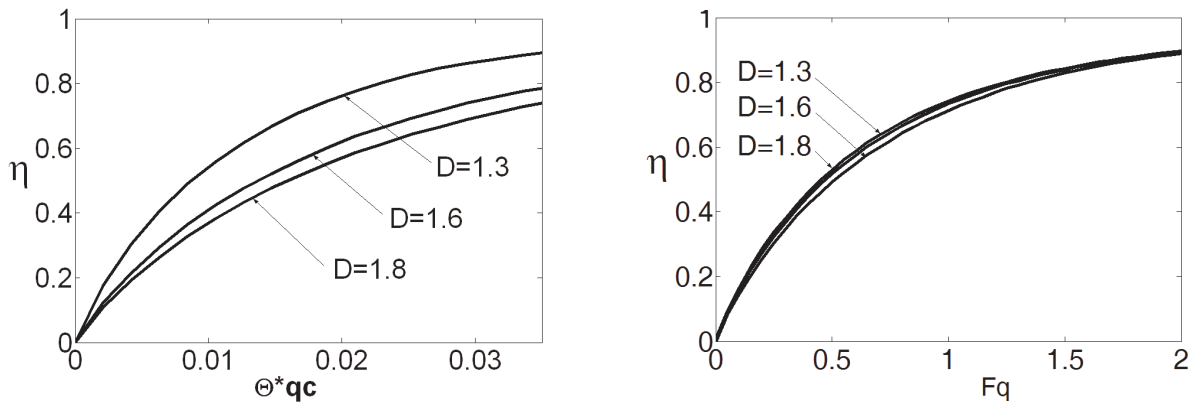


Рис. 7. Зависимости $\eta(\Theta q_c)$ и $\eta(Fq)$ $D=1,3; 1,6$ и $1,8$.

Литература

1. Greenwood I. A., Williamson J. B. P. Contact of nominally flat surfaces. «Proc. Roy. Soc. London Ser. A», 1966. Vol. 293, N 1442. P. 300-319.
2. Айнбиндер С. В., Тюнина Э.Л. Введение в теорию трения полимеров. Рига : Зинатне, 1978. 224 с.
3. Семенюк Н. Ф. Исследование топографии поверхности методом случайного поля и разработка расчетных методов оценки фактической площади при трении твердых тел : автореф. дис. ... канд. техн. наук. Якутск, 1983. 22с.
4. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 226 с.

5. Демкин Н. Б., Рыжов Э. В. Качество поверхности и контакт деталей машин. М.: Машиностроение, 1981. 224 с.
6. Свириденко А. И., Чижик С. А., Петроковец М. И. Механика дискретного фрикционного контакта. Минск : Наука и техника, 1990. 272с.
7. Огар П. М., Корсак И. И. Влияние характеристик тяжело нагруженного стыка шероховатых поверхностей на герметичность. Братск : БрИИ, 1989. 100 с. Деп. в ВИНТИ, № 6109-В89.
8. Majumdar A., Bhushan B. Role of Fractal Geometry in Roughness Characterization and Contact Mechanics of Surfaces // ASME J. of Tribology, 1990. Vol. 112. P. 205-216.
9. Yan W., Komvopoulos K. Contact analysis of elastic-plastic surfaces // J. Appl.

Phys., October 1998. Vol. 84, N. 7. P. 3617-3624.

10. Маджумдар А., Бхушан Б. Фрактальная модель упругопластического контакта шероховатых поверхностей // Современное машиностроение. Сер. Б.1991. № 6. С. 11-23.

11. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М. : Мир, 1989. 510 с.

12. Огар, П. М., Шеремета Р. Н., Лханаг Д. Герметичность металлополимерных стыков шероховатых поверхностей. Братск : БрГУ, 2006. 159 с.

13. Огар, П. М., Горохов Д. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей: фрактальный подход. Братск : БрГУ, 2007. 171 с.

УДК 531.1

Ю.В. Ермошенко

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ КАК ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ В ВИБРОЗАЩИТНЫХ СИСТЕМАХ

Предлагается структурный подход к разработке математической модели системы, имеющей в своем составе механическую колебательную цепь. Такая цепь на структурной схеме может рассматриваться, как дополнительная обратная связь с соответствующим упрощением структуры системы в целом.

Ключевые слова: виброзащита, виброзащитная система, структурная схема, передаточная функция, дополнительная обратная связь

В ряде работ [1, 2] развиваются обобщенные подходы к рассмотрению достаточно широкого класса задач вибрационной защиты, мехатроники и ряда других приложений структурной теории механических колебаний. Последнее связано с представлениями о расширении набора типовых элементов в колебательных системах.

Использование в качестве дополнительных элементов механических цепей в виде различных механизмов позволило не только показать работы предшественников в рамках определенной и развивающейся методологической основы, но и определиться с возможными направлениями поисков. Развиваемый автором подход заключается в том, что он позволяет с единых позиций перейти к исследованиям активных виброзащитных систем (ВЗС), в которых дополнительная связь реализуется через управляемые устройства (сервоприводы), использую-

щие энергию внешних источников, что в значительной степени направляет внимание к динамическим процессам взаимодействия составных частей и элементов системы, а это требует дальнейшей разработки методов математического моделирования сложных систем с целью оценки возможности изменения динамического состояния введением различных связей. Конструктивное разнообразие технических средств предполагает различные виды параллельного и последовательного соединения упругих, демпфирующих и иных элементов, что требует детализированного изучения динамических процессов, создания научно обоснованных позиций в разработке инженерных методик проектирования расчета и конструирования систем виброзащиты [3].

I. Дополнительные связи, вводимые в ВЗС, в общем случае, если речь идет о механизмах, представляют собой уст-