

**ИССЛЕДОВАНИЕ ФРИКЦИОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ МЕТОДОМ ЧАСТИЧНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ**

*Приближенный аналитический метод частичной гармонической линеаризации применялся для исследования релаксационных режимов фрикционных крутильных автоколебаний бурильной колонны как системы с распределенными параметрами. Получены формулы для определения длительности зон застоя и зон проскальзывания долота (диска), периода автоколебаний, а также условия возникновения автоколебаний.*

**Ключевые слова:** бурильная колонна, автоколебания, фрикционные, крутильные, релаксационные, метод частичной гармонической линеаризации.

**Постановка задачи.** Будем рассматривать бурильную колонну как однородный стержень с распределенным моментом инерции  $\rho$  и длиной  $L$ , равной длине растянутого участка труб. Верхнему сечению стержня сообщается постоянная угловая скорость  $\omega$ , а в нижнем сечении стержень снабжен сосредоточенной массой (диск) весом  $P$  и с моментом инерции  $I$ , соответственно равным весу и моменту инерции сжатого участка бурильной колонны (рис. 1).

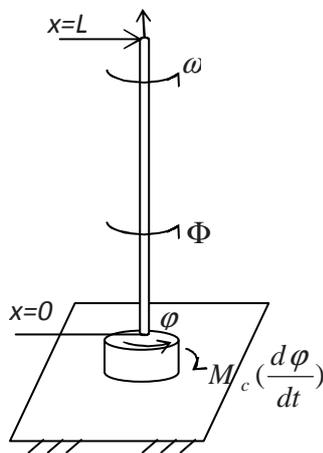


Рис. 1. Динамическая модель бурильной колонны.

Со стороны нижнего торца диска на систему действует момент сопротивления вращению, связанный нелинейной зависимостью с угловой скоростью  $\frac{d\phi}{dt}$ . Немного уменьшая общность, примем для него скачкообразный закон изменения

$$M_c = \begin{cases} M_0 \text{sign} \frac{d\phi}{dt}, & \frac{d\phi}{dt} \neq 0 \\ -M_1 \leq M \leq M_1, & \frac{d\phi}{dt} \equiv 0 \\ (0 < M_0 < M_1) \end{cases}$$

Считаем, что диск может проскальзывать только в направлении верхнего сечения стержня ( $\frac{d\phi}{dt} > 0$ ), исключая тем самым

возможность мгновенной смены знака угловой скорости диска в момент остановки. Для отыскания периодических крутильных автоколебаний будем изучать движение стержня во временных интервалах  $(0, t_*)$  и  $(-t^*, 0)$ , отвечающих зонам скольжения и длительного застоя его нижнего сечения. При этом период колебаний бурильной колонны будем определять по формуле  $\Lambda = t_* + t^*$ . Заметим, что за нулевой ( $t = 0$ ) принят момент начала скольжения нижнего сечения, т. е. момент страгивания диска. Деформации кручения при автоколебаниях бурильной колонны предполагаются достаточно малыми, хотя полный угол закручивания для колонны большой длины может быть весьма велик. Поэтому крутильные колебания колонны описываются обычным волновым уравнением.

От схемы, показанной на рис. 1, перейдем к эквивалентной обращенной схеме, показанной на рис. 2.

\* - автор, с которым следует вести переписку.

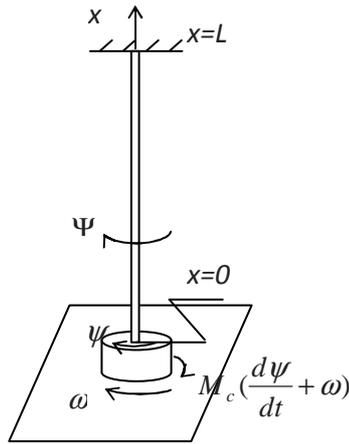


Рис. 2. Обращенная схема динамической модели.

Здесь от абсолютных углов закручивания произвольного сечения колонны  $\Phi$  и диска  $\varphi$  переходим к относительным углам по отношению к верхнему сечению  $\Psi$  и  $\psi$  соответственно; связь между углами определяется соотношением

$$\Psi(x, t) = \Phi(x, t) - \omega t.$$

Заметим, что  $\varphi = \Phi|_{x=0}$  и  $\psi = \Psi|_{x=0}$ .

В сформулированной задаче перейдем к относительно угловой безразмерной координате и безразмерным аргументам

$$\xi = \frac{GJ_p}{M_0 L} \Psi, \quad \zeta = \frac{x}{L}; \quad \tau = \sqrt{\frac{GJ_p}{IL}} t$$

и введем безразмерные параметры

$$\gamma = \sqrt{\frac{\rho L}{I}}; \quad \Omega = \frac{\omega}{M_0} \sqrt{\frac{IGJ_p}{L}}; \quad \varepsilon = \frac{M_1}{M_0} > 1.$$

Тогда с учетом введенных величин задача о крутильных автоколебаниях бурильной колонны запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \xi'' - \gamma^2 \xi = 0, \\ \zeta = 1: \xi = 0, \\ \zeta = 0: \xi - \xi' + 1 = 0, \quad 0 < \tau < \tau_* \\ \xi = -\Omega, \quad -\tau^* < \tau < 0 \\ \tau = 0: \xi|_{\zeta=0} = -\Omega, \quad \xi'|_{\zeta=0} = \varepsilon; \\ \tau = \tau_*, -\tau^*: \xi|_{\zeta=0} = -\Omega, \quad \xi'|_{\zeta=0} > -1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь, соответственно, точка означает дифференцирование по  $\tau$ , штрих – по  $\zeta$ .

В безразмерных координатах интервалы  $0 < \tau < \tau_*$  и  $-\tau^* < \tau < 0$  отвечают зонам

скольжения  $\xi|_{\zeta=0} > -\Omega$  и длительного застоя  $\xi|_{\zeta=0} = -\Omega$  для нижнего диска. Безразмерный период колебаний определяется формулой  $T = \tau_* + \tau^*$ .

При  $\tau = \tau_*$ :  $\xi'|_{\zeta=0} > -1$  выражает условие отсутствия мгновенной смены знака для  $\xi|_{\zeta=0}$ .

**Метод частичной гармонической линеаризации.** Решаем задачу (1) из предположения, что закон изменения углов поворота  $\xi(\zeta, \tau)$  по длине стержня ( $0 < \zeta < 1$ ), в отличие от существенно нелинейного закона движения диска ( $\zeta = 0$ ), близок к гармоническому. Поэтому в Фурье разложении

$$\xi(\zeta, \tau) = a_0(\zeta) + a_1(\zeta) \sin(\lambda\tau + \alpha_1) + a_2(\zeta) \sin(2\lambda\tau + \alpha_2) + \dots \quad (2)$$

становится возможным приближенно удерживать только первые два слагаемых, отбросив высокочастотный остаток ряда. Здесь  $\lambda$  – заранее неизвестная круговая частота автоколебаний, определяемая формулой

$$\lambda = \frac{2\pi}{T}, \quad (3)$$

В силу сделанного допущения можно в дальнейшем исходить из следующего приближенного равенства:

$$\xi = -\lambda^2 (\xi - a_0), \quad (4)$$

Очевидно, что среднее значение переменной  $\xi$  определяется по формуле  $\langle \xi \rangle = a_0(\zeta)$ ,

$$\text{где } \langle \xi \rangle = \frac{1}{T} \left( \int_{-\tau^*}^0 \xi d\tau + \int_0^{\tau_*} \xi d\tau \right).$$

Подставив соотношение (4) в (1), получим уравнение

$$\xi'' + \lambda^2 \gamma^2 (\xi - a_0) = 0. \quad (5)$$

Усредняя получившееся равенство (5), получим  $\langle \xi'' \rangle = 0$  или  $a_0''(\zeta) = 0$ .

Откуда следует, что  $a_0(\zeta) = A_0 + A_1(1 - \zeta)$ ,

где  $A_0, A_1$  – неизвестные константы. Поскольку  $a_0(\zeta)$  есть линейная функция  $\zeta$ , общий интеграл уравнения (4) имеет вид:

$$\xi(\zeta, \tau) = C_1 \cos \lambda \gamma (1 - \zeta) + C_2 \sin \lambda \gamma (1 - \zeta) + a_0(\zeta), \quad (6)$$

где величины  $C_1$  и  $C_2$  зависят только от  $\tau$ . В силу (6) относительный поворот диска равен

$$\theta = \xi|_{\zeta=0} = C_1 \cos \lambda \gamma + C_2 \sin \lambda \gamma + a_0(0). \quad (7)$$

Подставим (7) в граничное условие  $\xi|_{\zeta=1} = 0$ , определим

$$C_1 = -a_0(1), \quad C_2 = \frac{\theta - a_0(0) - a_0(1) \cos \lambda \gamma}{\sin \lambda \gamma}.$$

Подставив эти значения в решение (6) и усреднив его за период движения, получим  $A_0 = a_0(1) = 0$ .

Тогда получим  $a_0(\zeta) = A_1(1 - \zeta)$ . Отсюда, при  $\zeta = 0$ , определим  $A_1 = a_0(0) = \langle \theta \rangle$ .

В результате проделанных выкладок найдем окончательный вид решения:

$$\xi(\zeta, \tau) = (\theta - \langle \theta \rangle) \frac{\sin \lambda \gamma (1 - \zeta)}{\sin \lambda \gamma} + \langle \theta \rangle (1 - \zeta). \quad (8)$$

Таким образом, подставив выражение (8) в граничные и начальные условия (1), сведем задачу о фрикционных автоколебаниях бурильной колонны, с учетом ее распределенной инерции, к аналогичной задаче для одномассовой модели

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \chi^2 \theta = \langle \theta \rangle (\chi^2 - 1) - 1, & 0 < \tau < \tau_* \\ \dot{\theta} = -\Omega, & -\tau^* < \tau < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\tau = 0: \quad \dot{\theta} = -\Omega, \quad \theta = -\frac{\varepsilon - \langle \theta \rangle (\chi^2 - 1)}{\chi^2},$$

$$\tau = \tau_*, -\tau^*: \quad \dot{\theta} = -\Omega, \quad \theta < \frac{1}{\chi^2} [1 + \langle \theta \rangle (\chi^2 - 1)],$$

где были введены обозначения

$$\beta = \gamma \lambda, \quad \chi^2 = \beta \operatorname{ctg} \beta.$$

Интегрируя уравнения (9), найдем законы относительного движения диска в зонах скольжения и длительного застоя

$$\theta = -\frac{\Omega}{\chi^2} \left[ \sigma \cos \chi \tau + \chi \sin \chi \tau - \frac{\langle \theta \rangle (\chi^2 - 1) - 1}{\Omega} \right], \quad 0 < \tau < \tau_*$$

$$\theta = -\Omega \tau - \frac{\varepsilon - \langle \theta \rangle (\chi^2 - 1)}{\chi^2}, \quad -\tau^* < \tau < 0 \quad (10)$$

где  $\sigma = \frac{\varepsilon - 1}{\Omega}$ . Время скольжения  $\tau_*$  и время длительного застоя  $\tau^*$  определим, используя полученные решения (10) из условий непрерывности по скорости и координате, т. е.

$$\dot{\theta} \Big|_{\tau=\tau_*-0} = \dot{\theta} \Big|_{\tau=-\tau^*+0}, \quad \theta \Big|_{\tau=\tau_*-0} = \theta \Big|_{\tau=-\tau^*+0}.$$

Получим

$$\sin \frac{\chi \tau_*}{2} \left( \chi \sin \frac{\chi \tau_*}{2} + \sigma \cos \frac{\chi \tau_*}{2} \right) = 0, \quad (11)$$

$$\tau^* = \frac{1}{\chi^2} [\sigma (1 - \cos \chi \tau_*) - \chi \sin \chi \tau_*].$$

Первое уравнение (11) допускает решения

$$\tau_{*1} = \frac{2}{\chi} \left( \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\chi} \right), \quad \tau_{*2} = \frac{2\pi}{\chi}. \quad (12)$$

Очевидно, что второе решение (12) отвечает свободным безостановочным гармоническим колебаниям диска. Действительно, внося это решение во второе равенство (11), получим  $\tau^* = 0$ . Тогда, учитывая (3), для определения неизвестной частоты  $\lambda$  свободных колебаний будем иметь уравнение

$$\lambda (\lambda - \gamma \operatorname{ctg} \lambda \gamma) = 0. \quad (13)$$

Из него следует:  $\lambda = 0$ , что соответствует случаю равномерного вращения стержня, и частотное уравнение

$$\operatorname{tg} \gamma \lambda = \frac{\gamma}{\lambda}, \quad (14)$$

отвечающее собственным крутильным колебаниям консольного стержня с грузом на конце. График частотного уравне-

ния (14) показан на рис. 3. При  $\gamma \rightarrow 0$  первое наименьшее собственное значение  $\lambda^{(1)}$ , согласно (14), стремится снизу к единице, в то время как величины  $\lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \dots$  увеличиваются до бесконечности. Для них справедливы следующие асимптотические разложения

$$\lambda^{(1)} = 1 - \frac{\gamma^2}{6} + \frac{11}{360} \gamma^4 + \dots, \quad (15)$$

$$\lambda^{(\ell+1)} =$$

$$\frac{\pi \ell}{\gamma} + \frac{\gamma}{\pi \ell} - \frac{\gamma^3}{\pi^3 \ell^3} \left( 1 + \frac{\gamma^2}{3} \right) + \dots \quad (\ell = 1, 2, \dots).$$

**Уравнение для определения частот фрикционных автоколебаний.** Перейдем непосредственно к исследованию фрикционных автоколебаний релаксационного типа, когда время скольжения  $\tau_*$  удовлетворяет первому равенству (12); с учетом этого равенства, а также второго выражения (11), получим

$$\tau^* = \frac{2\sigma}{\chi^2}. \quad (16)$$

Тогда, согласно формулам (3), (12) и (16), для определения круговой частоты  $\lambda$  получим трансцендентное уравнение

$$\pi + \frac{\sigma}{\sqrt{\beta \operatorname{ctg} \beta}} - \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\sqrt{\beta \operatorname{ctg} \beta}} =$$

$$= \pi \gamma \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} \beta}{\beta}}. \quad (17)$$

Качественный характер зависимостей левой и правой частей уравнения (17) от  $\beta$  при постоянном  $\sigma$  и  $\gamma$  приведен на рис. 4. Из этого графика видно, что существует бесконечное число удовлетворяющих физическому смыслу положительных корней  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ , расположенных внутри интервалов  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right), \left(2\pi, \frac{5}{2}\pi\right), \dots$

Соответственно, есть бесконечное число существенно различных режимов фрикционных автоколебаний, частоты которых определяются по формулам

$$\lambda_\ell = \beta_\ell / \gamma \quad (\ell = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, частота режима тем выше и, соответственно, период тем меньше, чем выше номер корня уравнения (17).

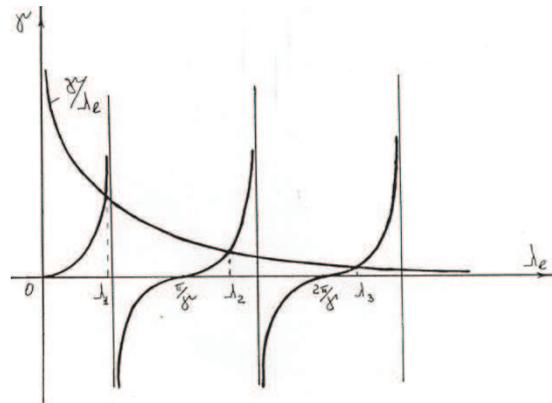


Рис. 3. Графическое решение частотного уравнения (14).

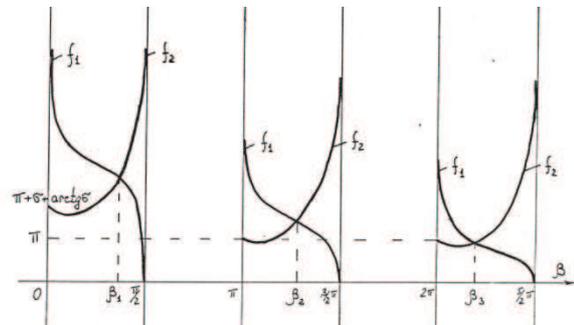


Рис. 4. Графическое решение трансцендентного уравнения (17) для определения круговой частоты  $\lambda$ .

Здесь  $f_1(\beta)$  и  $f_2(\beta)$  – соответственно, правая и левая части уравнения (17).

Получим асимптотическую формулу для  $\beta_\ell$  при  $\ell \rightarrow \infty$ . Для этого будем полагать

$$\beta = \pi \ell + \frac{S_1}{\ell} + \frac{S_3}{\ell^3} + \frac{S_4}{\ell^4} + \frac{1}{\ell^5} \dots, \quad (\ell = 1, 2, \dots)$$

где  $S_\ell$  – коэффициенты, подлежащие определению. Используя разложения в ряд, уравнение (17) с точностью до величин порядка  $1/\ell^4$  можно переписать так:

$$\pi + \frac{\sigma^3}{3\ell^3} \sqrt{\frac{S_1^3}{\pi^3}} = \sqrt{\frac{\pi}{S_1}} \gamma \left[ 1 - \frac{1}{2\ell^2} \left( \frac{S_3}{S_1} + \frac{S_1^2}{3} + S_1 \right) - \frac{1}{2\ell^3} \frac{S_4}{S_1} - \frac{1}{2\pi\ell^4} \left( 2S_3 + \frac{S_1^3}{3} \right) \right] + \dots,$$

откуда следует

$$S_1 = \frac{\gamma^2}{\pi}, \quad S_3 = -\frac{\gamma^4}{\pi^3} \left(1 + \frac{\gamma^2}{3}\right),$$

$$S_4 = -\frac{2}{3} \frac{\sigma^3}{\pi^3} \gamma^5,$$

то есть,

$$\beta_{\ell+1} = \pi\ell + \frac{\gamma^2}{\pi\ell} - \frac{\gamma^4}{\pi^3\ell^3} \left(1 + \frac{\gamma^2}{3}\right) - \frac{2}{3} \frac{\sigma^3\gamma^5}{\pi^3\ell^4} + \frac{1}{\ell^5} \dots$$

Следовательно,

$$\lambda_{\ell+1} = \frac{\pi\ell}{\gamma} + \frac{\gamma}{\pi\ell} - \frac{\gamma^3}{\pi^3\ell^3} \left(1 + \frac{\gamma^2}{3}\right) - \frac{2}{3} \frac{\sigma^3\gamma^4}{\pi^3\ell^4} + \frac{1}{\ell^5} \dots, \quad (18)$$

$$T_{\ell+1} = \frac{2\pi}{\lambda_{\ell+1}} = \frac{2\gamma}{\ell} - \frac{2\gamma^3}{\pi^2\ell^3} + \frac{1}{\ell^5} \dots \quad (\ell = 1, 2, \dots)$$

Сравнивая формулы (15) и (18), нетрудно видеть, что

$$\lambda_{\ell+1} - \lambda^{(\ell+1)} = -\frac{2}{3} \frac{\sigma^3\gamma^4}{\pi^3\ell^4} + \frac{1}{\ell^5} \dots \quad (19)$$

**Анализ полученных результатов.** Таким образом, частоты фрикционных автоколебаний несколько меньше, чем соответствующие частоты свободных линейных колебаний  $(\lambda_\ell \langle \lambda^{(\ell)} \rangle)$ . Это заключение полностью соответствует сложившимся представлениям о характере фрикционных автоколебаний.

Будем в дальнейшем натуральное число  $\ell = 1, 2, \dots$  называть кратностью периодического режима фрикционных автоколебаний, при этом основным является однократный ( $\ell = 1$ ) низкочастотный режим, для которого формула (18) не применима. Чем выше кратность режима, тем меньше его период, который при  $\sigma \rightarrow 0 (M_1 \rightarrow M_0)$  стремится к периоду  $T = 2\pi / \lambda^{(\ell)}$  свободных колебаний системы. Время застоя  $\tau^*$  при  $\ell$ -кратном режиме фрикционных автоколебаний, со-

гласно (16), определяется по следующей асимптотической формуле

$$\tau_{\ell+1}^* = 2\sigma \left[ \frac{\gamma^2}{\pi^2\ell^2} + \frac{\gamma^4}{\pi^4\ell^4} \left(1 - \frac{\gamma^2}{3} + \frac{2\sigma^3\gamma}{3}\right) + \dots \right].$$

Таким образом, с увеличением кратности режима время застоя внутри периода систематически уменьшается по сравнению с временем проскальзывания

$$(\tau_\ell^*/T_\ell = 0(1/\ell)).$$

Соответственно, фрикционные автоколебания высокой кратности становятся близкими к квазигармоническим. Этот результат был подтвержден и в результате непосредственного численного анализа.

Для построения приближенной формы фрикционных автоколебаний произвольной кратности по высоте колонны требуется, в соответствии с (8), определить среднее за период значение безразмерного относительного угла поворота диска

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{T} \left( \int_{-\tau^*}^0 \theta d\tau + \int_0^{\tau^*} \theta d\tau \right).$$

Отсюда, после усреднения, получим

$$\langle \theta \rangle = \frac{4\sigma}{T\chi^4} [\langle \theta \rangle (\chi^2 - 1) - 1], \quad (20)$$

где для периода автоколебаний справедлива формула

$$T = \frac{2}{\chi} \left( \pi + \frac{\sigma}{\chi} - \arctg \frac{\sigma}{\chi} \right). \quad (21)$$

Поэтому, если разрешить (20) относительно  $\langle \theta \rangle$ , окончательно получим

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{\frac{\chi^3}{2\sigma} \left( \pi - \arctg \frac{\sigma}{\chi} \right) + 1 - \frac{\chi^2}{2}}. \quad (22)$$

Проверим теперь условие отсутствия мгновенной перемены знака угловой скорости диска в момент обращения ее в нуль. Согласно найденным решениям (10), (12) безразмерный относительный угол закручивания диска в момент остановки  $\tau = \tau_*$  будет равен

$$\theta|_{\tau=\tau_*} = \frac{\Omega\sigma + \langle\theta\rangle(\chi^2 - 1) - 1}{\chi^2}. \quad (23)$$

Используя последнее неравенство в (9) и учитывая (23), условие отсутствия мгновенной перемены знака угловой скорости диска будет иметь вид  $\epsilon < 3$ .

Аналогичное неравенство получается и в простейшей задаче о фрикционных автоколебаниях в системе с одной степенью свободы. Отметим, что при  $\epsilon \geq 3$  будут реализовываться автоколебания, при которых внутри одного периода движения происходит несколько мгновенных перемен знака абсолютной угловой скорости диска. Соответственно, имеют место затухающие колебания диска, по завершению которых и вплоть до окончания периода диск неподвижен.