УДК 517.9

*А. В. Зубов*, Н. В. Зубов, М. В. Стрекопытова*

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ ГОЛОМОРФНОГО РЕШЕНИЯ

*В статье даны условия, при которых системы уравнений в частных производных имеют семейство голоморфных решений. Полученные результаты позволяют решить ряд вопросов из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.*

**Ключевые слова:** голоморфное решение, характеристичное число, однородная форма, коэффициент, сходящийся ряд.

А.М. Ляпунов [1] указал случай, когда некоторая система уравнений в частных производных, не удовлетворяющая условиям Коши-Ковалевской, имеет единственное голоморфное решение.

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_j}{\partial x_s}\Big(\sum_{i=1}^{n}p_{si}(t)x_i+X_s(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k,t)\Big)+\frac{\partial z_j}{\partial t}=\sum_{i=1}^{k}q_{ji}(t)z_i+\sum_{i=1}^{n}r_{ji}(t)x_i+Z_j(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k,t),\quad j=1,\dots,k. \tag{1}$$

Предположим, что функции $X_s, Z_j$ разлагаются в ряды по целым положительным степеням величин $x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k$:

$$X_s=\sum_{\sum_1^n m_i+\sum_1^k n_i\ge 2}P_s^{(m_1,\dots,m_n,n_1,\dots,n_k)}(t)x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\cdot z_1^{n_1}\cdots z_k^{n_k},$$

$$Z_j=\sum_{\sum_1^n m_i+\sum_1^k n_i\ge 2}Q_j^{(m_1,\dots,m_n,n_1,\dots,n_k)}(t)x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}\cdot z_1^{n_1}\cdots z_k^{n_k},$$

$$s=1,\dots,n;\quad j=1,\dots,k;$$

сходящихся при $|x_i|\le z_0,\quad |z_i|\le z_0,\quad t>0$.

Здесь и далее через $m_s, n_j$ будем обозначать целые положительные числа, через $x_0(\tau), z_0, c_0$ – некоторые положительные величины.

Предположим далее, что функции

$$p_{sl}(t), q_{ij}(t), r_{sl}(t), P_s^{(m_1,\dots,m_n,n_1,\dots,n_k)}(t),\ Q_j^{(m_1,\dots,m_n,n_1,\dots,n_k)}(t), \tag{2}$$
$$s,l=1,\dots,n,\quad i,j=1,\dots,k,$$

заданы при $t\ge 0$, вещественны, непрерывны и ограничены.

Через $\lambda_s,\quad s=1,\dots,n$ обозначим характеристичные числа системы

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{i=1}^{n}p_{si}(t)x_i,\quad s=1,\dots,n, \tag{3}$$

через $\mu_1,\dots,\mu_k$ – характеристичные числа системы

$$\frac{dz_j}{dt}=\sum_{i=1}^{k}q_{ji}(t)z_i,\quad j=1,\dots,k. \tag{4}$$

Теорема. Если: 1) $\lambda_s>0, s=1,\dots,n$; 2) $\mu_\sigma=\lambda_\sigma, \sigma=1,\dots,\beta$; 3) системы (3) и(4) правильные, то существует группа функций $z_j(x_1,\dots,x_n,t,c_1,\dots,c_\beta)$ $(j=1,\dots,k)$, каждая из которых зависит от $\beta$ произвольных постоянных, обладающая свойствами:

1) Функции $z_j$ разлагаются в ряды $z_j=\sum_{m=1}^{\infty}z_j^{(m)},\ j=1,\dots,k$, сходящиеся при $|x_s|\le x_0(t)\ne 0, t\in[0,+\infty)$, $|c_\sigma|\le c_0, s=1,\dots,n; \sigma=1,\dots,\beta$.



* - автор, с которым следует вести переписку.

Функции $z_j^{(m)}$ являются однородными формами степени $m$ относительно $x_1,\dots,x_n$, коэффициенты которых суть функции t и одновременно полиномы относительно $c_1,\dots,c_\beta$.

2) Функции $z_j(x_1,\dots,x_n,t,c_1,\dots,c_\beta)$ удовлетворяют системе (1).

Замечание. Если функции (2) периодические одного периода, то коэффициенты форм $z_j^{(m)}$ имеют вид $\sum\limits_{i=0}^{n_m}\alpha_i(t)\,t^i$, где $\alpha_i(t)$ – почти периодические функции.

Рассмотрим далее систему с постоянными вещественными коэффициентами

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_j}{\partial x_s}\left(\sum_{i=1}^{n}p_{si}x_i+X_s(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k)\right)=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}q_{ji}z_i+\sum_{i=1}^{n}r_{ji}x_i+Z_j(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k)_s, \quad (5)$$
$$j=1,\dots,k$$

Пусть $X_s, Z_j$ – аналитические функции в окрестности нулевых значений аргументов.

Через $\overline{\lambda_1},\dots,\overline{\lambda_n}$ обозначим числа матрицы $P=\left\|p_{sl}\right\|$, $s,l=1,\dots,n$, через $\overline{\mu_1},\dots,\overline{\mu_л}$ – собственные числа матрицы $Q=\left\|q_{ji}\right\|, i,j=1,\dots,k$.

Систему (5) не особыми линейными преобразованиями над искомыми функциями и независимыми переменными можно привести к виду

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_j}{\partial x_s}(\varepsilon_{s-1}x_{s-1}+\overline{\lambda_s}x_s+$$
$$+X_s(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k))= \quad (6)$$
$$=\delta_{j-1}z_{j-1}+\overline{\mu_j}z_j+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}r_{ji}x_i+Z_j(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k)_s,$$
$$j=1,\dots,k,\quad \delta_0=\varepsilon_0=0.$$

Из теоремы 1 следует теорема 2.

Теорема2. Если 1) $\operatorname{Re}\overline{\lambda_s}>0, s=1,\dots,n$; 2) $\overline{\lambda_\gamma}=\overline{\mu_\gamma}, \gamma\le\beta$, то существует группа функций $z_j(x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_k)_s$, $j=1,\dots,k$, обладающая свойствами:

1) Функция $z_j$ разлагается в сходящийся ряд

$$z_j=\sum_{m=1}^{\infty}z_j^{(m)}(x_1,\dots,x_n,t,c_1,\dots,c_\beta), \quad (7)$$
$$j=1,2,\dots,k$$

где $z_j^{(m)}$ суть формы степени относительно $x_1,\dots,x_n$, коэффициенты которых являются полиномами относительно $c_1,\dots,c_\beta,\ln x_1$.

2) Функции $z_j$ удовлетворяют системе (6).

Замечание. Если 1) $\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\overline{\lambda_i}\ne\overline{\mu_j}$ при $\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\ge 1$, $j=1,\dots,k$, исключая случай $\overline{\lambda_\sigma}=\overline{\mu_\sigma}$, $\sigma=1,\dots,\beta$; 2) $\varepsilon_{\sigma-1}=\delta_{\sigma-1}, \sigma=1,\dots,\beta, \varepsilon_\beta=0$; 3) $\overline{r_{ji}}=0, i,j\le\beta$, то коэффициенты форм $z_j^{(m)}$ в (6) являются полиномами лишь относительно $c_1,\dots,c_\beta$.

При помощи теорем 1 и 2 можно решить ряд задач из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему

$$z\frac{dy_s}{dz}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\tilde{P}_{si}(z)y_i+\tilde{P}_s(z)z+Y_s(z,y_1,\dots,y_n), \quad (8)$$
$$s=1,\dots,n$$

Функции $Y_s$ разлагаются в ряды

$$Y_s=\sum_{m+m_1+\dots+m_n\ge 2}\tilde{P}_s^{(m,m_1,\dots,m_n)}z^m y_1^{m_1}\dots y_n^{m_n}, s=1,\dots,n$$

сходящиеся при $|z|\le c_0, |y_i|\le c_0, i=1,\dots,n$. Функции

$$\overline{p}_{si},\tilde{P}_s,\tilde{P}_s^{(m,m_1,\dots,m_n)}, s,i=1,\dots,n, \quad (9)$$

заданы при $z\in(0,1]$, вещественны, непрерывны и ограничены. Положим

$$p_{si}(t)=-\tilde{p}_{si}(e^{-t}).$$

Теорема 3. Если $\lambda_\sigma > 0$ при $\sigma \le \beta$ система (3) правильная, то система (8) имеет семейство решений, представимое в форме рядов

$$y_s =$$

$$= \sum_{m+\sum_{i=1}^{\beta} m_i \ge 1} \tilde{K}_s^{m,m_1,\ldots,m\beta)}(z) z^{m+\sum_{i=1}^{\beta} m_i\lambda_i} c_1^{m_1} c_2^{m_2} \ldots c_\beta^{m\beta},$$

$$s = 1, \ldots, n$$

сходящихся при $z \le |z_0|, |c_\sigma| \le c_0, \sigma = 1, \ldots, \beta$, где $\tilde{K}_s^{m,m_1,\ldots,m\beta)}(z)$ непрерывные функции, обладающие свойством

$$\tilde{K}_s^{m,m_1,\ldots,m\beta)}(z) z^{\alpha} \xrightarrow[z\to 0]{} 0, \alpha > 0.$$

При этом $y_s(z) \to 0$ при $z \to 0, s = 1, \ldots, n$.

Замечание. Если коэффициенты (9) постоянные, то $\tilde{K}_s^{m,m_1,\ldots,m\beta)}(z)$ являются полиномами относительно ln z. Применяя в этом случае теорему 2 к системе

$$\sum_{i=1}^{\beta} \frac{\partial y_s}{\partial x_i}(\varepsilon_{i-1} x_{i-1} + \overline{\lambda}_i x_i) + z\frac{\partial y_s}{\partial z} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_{si} y_i + p_s z + Y_s,$$

$$s = 1, \ldots, n,$$

получим, что уравнения (8) имеют семейство решений, представимое в форме рядов

$$Y_s =$$

$$= \sum_{m+m_1+\ldots+m\beta \ge 2} \tilde{L}_s^{(m,m_1,\ldots,m_n)}(\ln z) c_1^{m_1} \ldots c_\beta^{m\beta} z^m x_1^{m_1} \ldots x_\beta^{m\beta},$$

$$s = 1, \ldots, n,$$

сходящихся при $z \le |z_0|, |c_\sigma| \le c_0, \sigma = 1, \ldots, \beta$, где $\tilde{L}_s^{m,m_1,\ldots,m\beta)}(z)$ – полиномы по степеням ln z , а $x_i = (\ln z)^{n_i} z^{\overline{\lambda}_i}$ выбраны так, что они являются решением системы.

$$z\frac{dx_i}{dz} = \varepsilon_{i-1} x_{i-1} + \overline{\lambda}_i x_i,\ i = 1, \ldots, \beta.$$

В этом случае $\tilde{L}_s^{m,m_1,\ldots,m\beta)}(z)$ будут постоянными, если

$$m + \sum_{i=1}^{\beta} m_i \overline{\lambda}_i \ne \overline{\lambda}_j \quad j = 1, \ldots, \beta.$$

Заметим, что полученные здесь результаты для систем обыкновенных дифференциальных уравнений являются более общими, чем ранее полученные результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 07-07-00104).

*Литература*

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.

2. Зубов И. В. Методы анализа динамики управляемых систем. – М.: Наука, 2003. – 223 с.

3. Зубов А. В., Зубов Н. В., Лаптинский В. Н. Динамика управляемых систем. СПб.: – СПбГУ. 2008. – 324 с.