К 539.411

П.М. Огар, В.А. Тарасов*

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКИ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Получены выражения, описывающие напряженно-деформированное состояние при нагружении упругопластического полупространства осесимметричной нагрузкой вида $p(r) = p_0\left(1 - r^2/a^2\right)^{\beta}$, *где* $\beta = 0\ldots0{,}5$. *Рассмотрены условия начала пластической деформации в приповерхностном слое и на поверхности полупространства в зависимости от параметра* β.

Ключевые слова: упругопластическое полупространство, осесимметричная нагрузка, критерий пластичности, напряженно-деформированное состояние.

В настоящее время аналитического решения контактной задачи для упругопластического силового взаимодействия не существует [1, 2] из-за сложностей учета упрочняемости материала в процессе нагружения. При внедрении сферического индентора в деформируемое полупространство различают упругую область, область ограниченной упругопластичности и область развитой упругопластичности [1, 3], однако единого взгляда на границы областей не существует. Так, например, в работе [2] различают критическую нагрузку $P_{\text{кр}}$ в момент появления пластической деформации на поверхности отпечатка в центре площадки контакта, когда величина интенсивности напряжений равна пределу текучести σ_Y. Там же отличают

$$P_{\text{кр.конт.}} = 0{,}425\ P_{\text{кр}}$$

на контуре площадки контакта и

$$P_{\text{кр. глуб.}} = 0{,}0336\, P_{\text{кр}}$$

на глубине $0{,}48a$ в приповерхностном слое, где a – радиус площадки контакта. Автором [1] предложена феноменологическая модель внедрения жесткой сферы в однородное упругопластическое упрочняемое твердое тело. В момент перехода от ограниченной пластичности к развитой выполняется соотношение

$$P_{\text{о.пл}} = 0{,}5\, P_{\text{ж. пл.}},$$

где $P_{\text{о.пл}}$ – нагрузка в конце ограниченно-пластической области, $P_{\text{ж. пл.}}$ – нагрузка в контакте для жесткопластического тела, когда среднее давление равно предельной твердости.

В работе [3] автор определяет критическую нагрузку $P_{\text{кр}}$ перехода от ограниченной к развитой упругопластичности выражением

$$P_{\text{кр}} = 17{,}44 R^2 \theta^2 H^3, \qquad (1)$$

где $\theta = \left(1 - \mu^2\right)E$; μ, E – коэффициент Пауссона и модуль Юнга, R – радиус сферического индентора, H – предельная твердость материала, практически всегда превышающая значение твердости по Бринеллю HB.

Используя понятия контактного модуля упрочнения – пластической твердости HD и подобие деформационных характеристик, авторы [4] считают, что развитый пластический отпечаток (образование лунки) получается, когда эквивалентное напряжение в центре площадки контакта достигнет предела текучести σ_Y. При этом давление в центре площадки контакта достигнет значения

$p_{op} = \dfrac{2\sigma_Y}{1 - 2\mu}$, а $P_{\text{кр}} = P_Y$ достигнет значения

* - автор, с которым следует вести переписку.

$$P_Y = \frac{\pi^3}{6} R^2 \theta^2 H D^3, \qquad (2)$$

что в 3,375 раза меньше, чем по выражению (1).

Выражение (2) получено в предположении, что распределение нагрузки на площадке контакта является герцевским. Однако в работе [5] показано, что при упругопластическом внедрении сферы происходит перераспределение контактного давления. Если диаграмма вдавливания сферы имеет вид

$$P = C h_0^n,$$

где h_0 – максимальное перемещение в контакте, C, n – константы, то распределение давления на площадке контакта описывается выражением

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\beta}, \qquad (3)$$

где $\beta = \frac{n-1}{2}$, $p_0 = p_m(\beta + 1)$, $p_m = \frac{P}{\pi a^2}$ – среднее давление в контакте. Поэтому представляет значительный практический интерес определение напряженно-деформированного состояния полупространства при действии на него нагрузки, описываемой выражением (3). В работе [6] рассмотрены частные случаи напряженно-деформированного состояния при β=0 (равномерное распределение) и при β=0,5 (герцевское распределение).

Для значений β, равных 0,1; 0,3 и 0,5, распределение напряжений приведено на рис. 1.

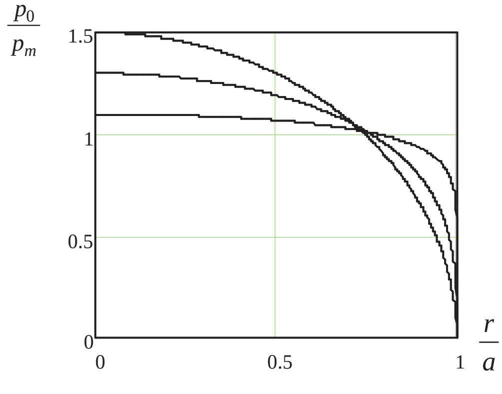


Рис. 1. Распределение контактных давлений при значениях β: 0,5; 0,3; 0,1.

В цилиндрической системе координат для осесимметричной нагрузки соотношения Гука имеют вид [6, 7]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sigma_r}{2G} = \varepsilon_r + \frac{\mu}{1-2\mu} e \\ &\frac{\sigma_\varphi}{2G} = \varepsilon_\varphi + \frac{\mu}{1-2\mu} e \\ &\frac{\sigma_z}{2G} = \varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu} e \\ &\tau_z = G \cdot \gamma \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}; \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ &\gamma = \frac{\partial u_r}{\partial_z} + \frac{\partial u_z}{\partial_r}; \\ &e = \varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi; \end{aligned}\right\}$$

где $G = E/2(1+\mu)$ – модуль сдвига, σ_r, σ_φ, σ_z –радиальные, окружные и осевые напряжения; u_z, u_r – осевые и радиальные перемещения.

Напряжение и перемещение от действия нормального давления, распределенного по области S поверхности полупространства, могут быть найдены посредством суперпозиции с использованием результатов для сосредоточенной силы. Так, для радиальных и осевых перемещений [7]

$$\bar{u}_r = -\frac{1-2\mu}{4\pi G} \cdot \frac{P}{r}, \; \bar{u}_z = \frac{1-\mu}{2\pi G} \cdot \frac{P}{r}. \qquad (5)$$

На рис. 2а показана нагруженная круговая область радиуса a.

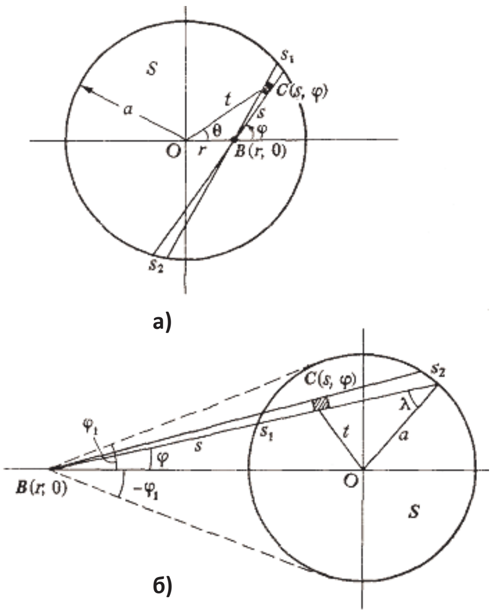


Рис. 2. К вычислению перемещений в точке *B* от нагрузки приложенной по круговой области: (а) во внутренней точке, (б) во внешней точке.

Интерпретируя давление $p(t)$ в точке *C* как сосредоточенную силу, с помощью выражения (5) найдем нормальное перемещение

$$\bar{u}_z=\frac{\theta}{\pi}\iint_s p(s,\varphi)\,ds\,d\varphi .$$

Учитывая, что $t^2=r^2+s^2-2rs\cos\varphi$, имеем

$$p(s,\varphi)=\frac{p_0}{a^{2\beta}}\left(c^2-2b,s-s^2\right)^{\beta},$$

где $c^2=a^2-r^2$, $b=r\cos\varphi$.

Выражение в скобках можно представить в виде

$c^2-2bs-s^2=(s_1-s)\cdot(s-s_2)$,

где s_1,s_2 – действительные корни уравнения при $c\geq 0$,

$s_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2+c^2}$.

Перемещение точек нагруженной области

$$\bar{u}_z(r)=\frac{2\theta p_0}{\pi a^{2\beta}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{s_z}^{s_1}(s_1-s)^{\beta}(s-s_2)^{\beta}\,ds\,d\varphi ,$$

$$\bar{u}(r)=\theta p_0 a\frac{2^{2(\beta+1)}}{\pi}\times$$

$$\times B(\beta+1,\beta+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^{\beta+0,5}d\varphi \qquad (6)$$

где $B(\alpha_1,\alpha_2)$ – бета-функция.

Для определения тангенциального перемещения в точке *B*, которое вследствие осевой симметрии должно быть радиальным, используем выражение (5). Давление на элементарной площадке в точке *C* вызывает тангенциальное перемещение в точке *B*, равное

$$\frac{1-2\mu}{1-\mu}\cdot\frac{\theta}{2\pi}\,p(t)\,ds\,d\varphi$$

и направленное от *B* к С. Радиальная составляющая этого перемещения есть

$$-\frac{1-2\mu}{1-\mu}\cdot\frac{\theta}{2\pi}\,p(t)\cos\varphi\,ds\,d\varphi .$$

Суммарное тангенциальное перемещение в точке *B* под действием полного распределения давлений равно

$$\bar{u}_r(r)=$$

$$=\frac{1-2\mu}{1-\mu}\cdot\frac{\theta p_0}{2\pi a^{2\beta}}\int_0^{2\pi}\int_0^{s_1}(s_1-s)^{\beta}(s-s_2)^{\beta}\,ds\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$\bar{u}_r(r)=\theta p_0 a\cdot\frac{1-2\mu}{1-\mu}\times$$

$$\times\left[-2^{2\beta+1}B(\beta+1,\beta+1)\cdot{}_2F_1\left(-\beta-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{r^2}{a^2}\right)+\right.$$

$$+2\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\beta}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-b(\varphi)+c(\varphi)\right)\times \qquad (7a)$$

$$\times{}_2F_1\left(-\beta,1;\beta+2;\frac{-b(\varphi)+c(\varphi)}{-b(\varphi)-c(\varphi)}\right)\cos\varphi\,d\varphi;$$

$$b(\varphi)=\frac{r}{a}\cos\varphi,\ c(\varphi)=\left(1-\frac{r^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}},$$

где ${}_2F_1(a,b,c,x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Когда точка *B* лежит вне круговой области нагружения (рис. 2б), пределы интегрирования по φ равны $\varphi_1 = \pm\arcsin\frac{a}{r}$. В этом случае

$$\bar{u}_z(r) = \frac{2\theta p_0}{\pi a^{2\beta}} \int_0^{\varphi_1}\int_{s_1}^{s} (s_2 - s)^\beta (s - s_1)^\beta \, ds d\varphi,$$

$$\bar{u}_z(r) = \theta p_0 a \frac{2^{2\beta+1} B(\beta+1,\beta+1)}{\pi \cdot \frac{r}{a}} \times \tag{7б}$$

$$\times \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\beta+\frac{3}{2}\right) \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\beta+2;\frac{a^2}{r^2}\right)$$

Компоненты деформаций на поверхности $\bar{\varepsilon}_r = \partial\bar{u}_r/\partial r$ и $\bar{\varepsilon}_\varphi = u_r/r$ можно определить из выражений (6) и (7). Для точек нагруженной области

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\bar{\sigma}_r}{p_m} &= \frac{\mu}{1-\mu}\frac{\bar{\sigma}_z}{p_m} + \frac{1}{\theta p_m a}\left(\frac{\partial \bar{u}_r(\rho)}{\partial\rho} + \mu\frac{\bar{u}_r(\rho)}{\rho}\right)\\
\frac{\bar{\sigma}_\varphi}{p_m} &= \frac{\mu}{1-\mu}\frac{\bar{\sigma}_z}{p_m} + \frac{1}{\theta p_m a}\left(\frac{\bar{u}_r(\rho)}{\rho} + \mu\frac{\partial \bar{u}_r(\rho)}{\partial\rho}\right)\\
\frac{\sigma_z}{p_m} &= -(\beta+1)\left(1-\rho^2\right)^\beta, \quad \rho = \frac{r}{a}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Для определения напряжений внутри полупространства воспользуемся выражениями для напряжений от сосредоточенной силы [7]

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{P}{2\pi}\left[(1-2\mu)\cdot\left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{\rho r^2}\right) - \frac{3zr^2}{\rho^5}\right]\\
\sigma_\theta &= -\frac{P}{2\pi}(1-2\mu)\cdot\left(\frac{1}{r^2} - \frac{z}{\rho r^2} - \frac{z}{\rho^3}\right)\\
\sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi}\cdot\frac{z^3}{\rho^5}
\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Рассмотрим кольцевой элемент площадью $2\pi r dr$ и радиусом *r*. Нагрузка на кольцо равна $2\pi r p(r) dr$. Интегрируя по площади круга для σ_z, имеем

$$\sigma_z = -\frac{3z^3 p_0}{a^{2\beta}} \int_0^a r\left(a^2 - r^2\right)^\beta \left(r^2 + z^2\right)^{-\frac{5}{2}} dr,$$

$$\frac{\sigma_z}{p_m} = -(\beta+1)\times$$

$$\times\left[{}_2F_1\left(-\beta,1;-\frac{1}{2};-\frac{z^2}{a^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1{,}5)}\cdot\left(0{,}25-\beta^2\right)\frac{z^3}{a^3}\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^{\beta+1}\right], \frac{z}{a} \le 1 \tag{10}$$

$$\frac{\sigma_z}{p_m} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{z^2}\cdot{}_2F_1\left(1,\frac{5}{2};\beta+2;-\frac{a^2}{z^2}\right) \quad \frac{z}{a} \ge 1$$

Из выражения (9) следует, что

$$\sigma_\Sigma = \sigma_r + \sigma_\phi + \sigma_z = -\frac{P}{\pi}\frac{(1+\mu)\,z}{\rho^3}.$$

Подставляя давление на кольцевой элемент $2\pi r dr$, получим

$$\sigma_\Sigma = -\frac{2\,(\mu+1)\,z p_0}{a^2\beta} \int_0^a r\left(a^2 - r^2\right)^\beta \left(r^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} dr,$$

$$\frac{\sigma_\Sigma}{p_m} = -2(1+\mu)(1+\beta)\times$$

$$\times\left[{}_2F_1\left(-\beta, 1; \frac{1}{2}; -\frac{z^2}{a^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+0{,}5)}\cdot\frac{z}{a}\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^{\beta-0.5}\right], \frac{z}{a} \le 1 \tag{11}$$

$$\frac{\sigma_\Sigma}{p_m} = -(1+\mu)\frac{a^2}{z^2}\cdot{}_2F_1\left(1,\frac{3}{2};\beta+2;-\frac{a^2}{z^2}\right),$$

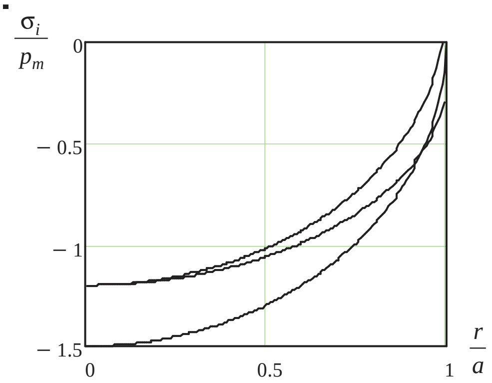
$$\frac{z}{a} \ge 1$$

На оси *z* имеем $\sigma_r = \sigma_\varphi$, следовательно, из (10) и (11) имеем

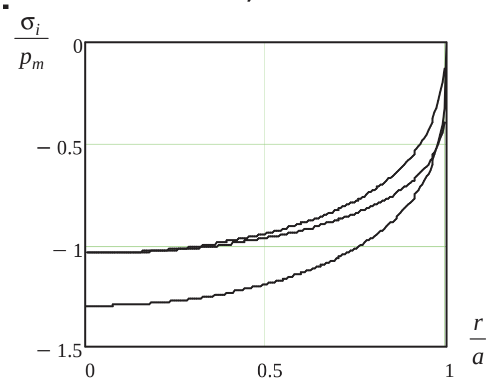
$$\sigma_r = \sigma_\varphi = 0{,}5\left(\sigma_\Sigma - \sigma_z\right) \tag{12}$$

В области нагружения и на оси z напряжения σ_r, σ_φ, σ_z главные, причем, $\sigma_1 = \sigma_z$, $\sigma_2 = \sigma_\varphi$ $\sigma_3 = \sigma_r$. На рис. 3 представлены главные напряжения на нагруженной поверхности при значениях β, равных 0,5; 0,3; 0,1. На рис. 4 представлены эквивалентные напряжения на нагруженной поверхности. На рис. 5 показаны главные (а) и эквивалентные (б) напряжения на оси z при тех же значениях β. Как было указано ранее, $\sigma_z(0)/p_m = (1+\beta)$, что наблюдается также на рис. 3. Эквивалентные напряжения в центре круговой области также пропорциональны $(1+\beta)$, при этом

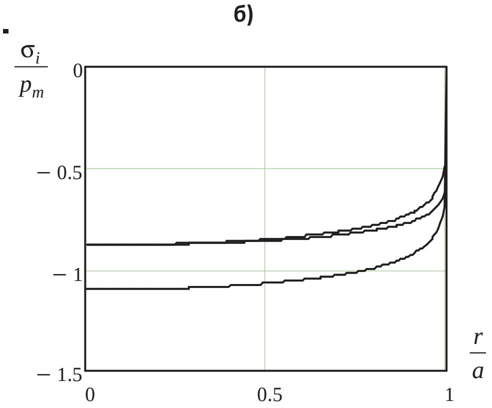
$$\sigma_э(0)/p_m = 0{,}2(1+\beta).$$



а)



б)



(в)

Рис. 3. Главные напряжения на площадке контакта при $\beta = 0{,}5$ (а), $\beta = 0{,}3$ (б) и $\beta = 0{,}1$ (в)

Представляет интерес нагрузка, при которой начинается пластическое течение в условиях сложного напряженного состояния, которая определяется пределом текучести σ_Y более мягкого материала на растяжение, входящим в соответствующий критерий текучести (пластичности). Задача отыскания критерия пластичности окончательно не решена. Все предложенные до сих пор критерии имеют ограниченную область применения. Наиболее близкое совпадение с экспериментальными данными по вдавливанию инденторов в упругопластичные среды показали энергетическая теория сдвиговой деформации Мизеса и теория максимальных касательных напряжений Треска.

По Мизесу:

$$\sigma_Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

По Треска:

$$\sigma_Y =_{\max}\left(|\sigma_1-\sigma_2|,|\sigma_2-\sigma_3|,|\sigma_3-\sigma_1|\right)$$

Различие двух критериев невелико, поэтому целесообразно использовать критерий Треска из-за его алгебраической простоты.

Третий критерий текучести известен как критерий максимального приведенного напряжения:

$$\frac{2}{3}\sigma_Y =_{\max}\left[|\sigma-\sigma_1|,|\sigma-\sigma_2|,|\sigma-\sigma_3|\right],$$

где

$$\sigma = (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3.$$

Критерий Треска и критерий приведенного напряжения образуют пределы, между которыми находится истинный критерий текучести [7].

Как следует из рис. 4 и рис. 5б, максимальные значения эквивалентных напряжений имеют место на оси Z. Согласно критерию максимального касательного напряжения Треска, пластическая деформация на оси Z соответствует эквивалентному напряжению

$$\sigma_э = |\sigma_3-\sigma_1| = 2\tau_{1\max} = \sigma_Y$$

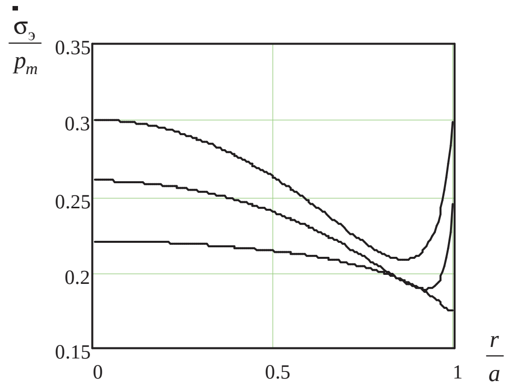
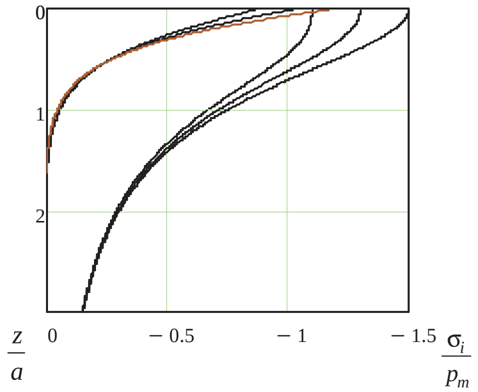
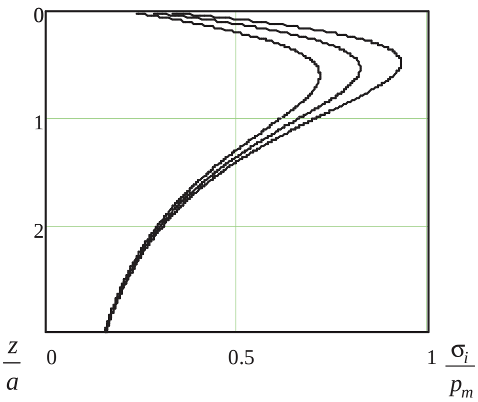


Рис. 4. Эквивалентные напряжения на площадке контакта при разных значениях β (кривые сверху вниз):0,5; 0,3; 0,1



а)



б)

Рис. 5. Главные напряжения (а) и эквивалентные (б) напряжения на оси z при значениях β: (кривые слева направо) 0,1; 0,3; 0,5

Для $\beta = 0{,}5$ максимальное контактное давление, при котором $\sigma_э = \sigma_Y$,

$$p_0 = 1.613\sigma_Y .$$

В общем случае максимальное контактное давление, при котором начинается пластическая деформация, можно представить выражением

$$p_{0p} = K_Y \sigma_Y ,$$

где K_Y – константа.

В контактных задачах трибологии используют значение K_Y, близкое к 3. Очевидно, что при этом интерес представляет начало пластической деформации на поверхности контакта, чем можно объяснить, что значение $K_Y > 1.613$.

Наибольшее значение эквивалентное напряжение $\sigma_э(\rho)$ имеет на краю области нагружения, где оно незначительно превышает значение $\sigma_э(0)$ в центре области нагружения. Эквивалентное напряжение на краю области нагружения удобно представить:

$$\sigma_э(1) = K_\sigma \cdot \sigma_э(0). \; .$$

Для $\beta = 0{,}5$ по энергетической теории сдвиговой деформации $K_\sigma = 1.16$, по теории максимальных касательных напряжений $K_\sigma = 1.33$, по теории максимального приведенного напряжения $K_\sigma = 1$. Для других значений β K_σ принимает иные значения.

Из анализа выражений (10), (11) и (12) при $\rho = 0$ следует

$$\sigma_э = \frac{1-2\mu}{2} K_\sigma p_0 = \sigma_Y .$$

Тогда максимальное контактное давление в области нагружения, при котором имеет место пластическая деформация,

$$p_{0p} = \frac{2K_\sigma}{1-2\mu} \cdot \sigma_Y ,$$

тогда $K_Y = \dfrac{2K_\sigma}{1-2\mu}$.

Данное выражение справедливо для всех значений β.

Таким образом, получены выражения, представляющие практический интерес при определении напряженно-деформированного состояния при нагружении упругопластического полупространства осесимметричной нагрузкой общего вида. При этом рассмотрены условия начала пластической деформации в приповерхностном слое и на поверхности полупространства.

Литература

1. Воронин Н. А. Теоретическая модель упруго-пластического внедрения жесткой сферы (методологические основы оценки механических характеристик компактных однородных материалов методом кинетического инвентирования сферического индентора) // Трение и износ. 2003. № 1. С.16-26.

2. Матлин М. М., Лебский С. Л., Мозгунова А. И. Закономерности упругопластического контакта в задачах поверхностного пластического упрочнения. М.: Машиностроение – 1, 2007. 218 с.

3. Ланков А. А. Вероятность упругих и пластических деформаций при сжатии металлических шероховатых поверхностей // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2009. № 3. С. 3 - 5.

4. Кузьменко А. Г. Пластический контакт тел двоякой кривизны – композиция методов: подобия (МП); приведенного радиуса (МПР); эксперементального теоретического равновесия (МЭТР) // Проблемы трибологии. 2009. № 1. С. 46 - 64.

5. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.