УДК 628.517

С.В. Белокобыльский С.В. Елисеев, А.Н. Трофимов*

ОСОБЕННОСТИ НАБЛЮДАЕМОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрены особенности механических колебательных систем при соотношении точек наблюдения за состоянием и их сопоставлении с точками управления (точек приложения внутренних динамических реакций).

Ключевые слова: динамика, виброзащита, колебания, парциальные частоты.

При изучении динамических свойств виброзащитных систем (ВЗС) одним из важных аспектов, определяющих возможности идентификации структуры системы, становится определение структуры моделей (число степеней свободы и характер динамического взаимодействия элементов) и параметров состояния. В связи с этим определенный интерес представляет выбор системы соотнесения точек наблюдения за состоянием и точек управления (точек приложения внутренних динамических реакций) [1, 2].

I. Рассмотрим систему с одной степенью свободы, в которой положение массы m (рис. 1) в системе координат $0, y, x$ определяется через y.

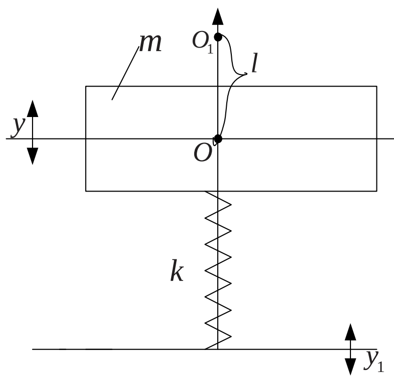

Рис. 1. Расчетная схема одномерной ВЗС с одной степенью свободы

Так как кинетическая энергия системы определяется

$$T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 ,$$

а потенциальная энергия, соответственно,

$$\Pi = \frac{1}{2} k(y - y_1)^2 ,$$

(где y_1 - смещение основания), то дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{y} + ky = k_1 y_1 .$$

В соответствии с упомянутыми выше соображениями будем полагать, что точка наблюдения будет смещена из точки 0 (рис. 1) на величину l в точку 0_1. Тогда, относительно исходной позиции, в которой предполагается совпадение точек наблюдения и приложения внутреннего динамического усилия (можно считать последнее в задаче виброзащиты управляющей силой простейшего вида [1]), можно принять, что

$$y_2 = y + l, \ \dot{y}_2 = \dot{y} ,$$

а уравнение (2.144) запишется

$$m\ddot{y}_2 + ky_2 = ky_1 + kl = k(y_1 + l) . \qquad (1)$$

Из приведенного следует, что введение координат наблюдения y_2 не изменяет значений частоты собственных колебаний, но приводит к виртуальному изменению внешнего возмущения (в данном случае кинематического). В правой части уравнения (1) появляется постоянный член kl. Физически это означает переход к новым координатам наблюдения, что сводится к необходимости учета в наблюдаемом смысле виртуального смещения на величину l.

II. Если расчетная схема ВЗС имеет вид колебательной системы в виде подпружиненного безынерционного стержня (рис. 2), то кинетическая и потенциальная энергии могут быть записаны, соответственно,

$$T = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 ,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} ky^2 ,$$

если $y_1 = 0$, то при отсутствии внешних сил получим $m\ddot{y} + ky = 0$,

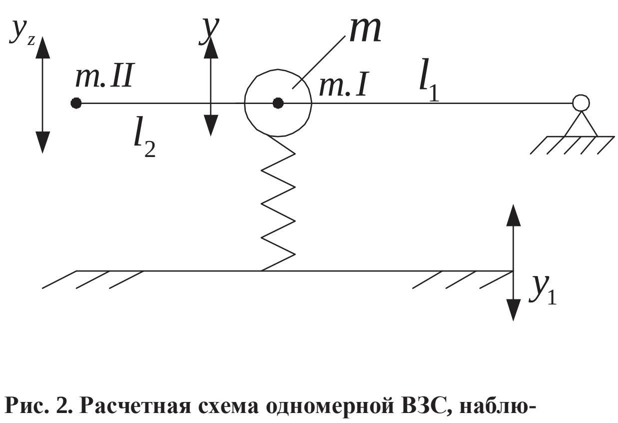

Рис. 2. Расчетная схема одномерной ВЗС, наблюдаемая в точке *II*

* - автор, с которым следует вести переписку.

Если определить, что $y_2 = y\frac{l_1 + l_2}{l_1}$, то

$$y = y_2 \frac{l_1}{l_1 + l_2},$$

а выражения для кинетической и потенциальной энергий запишутся

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{y}_2 - \frac{l_1 + l_2}{l_1}\right)^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(y_2 \frac{l_1 + l_2}{l_1}\right)^2,$$

где l_1, l_2 – соответственно длины отрезков, определяющие положение т.т. I и

II. Уравнение движения, если полагать, что внешняя сила P первоначально была приложена в т. I, принимает вид

$$m\ddot{y}_2 + ky_2 = P\frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

Можно отметить, что при выборе для наблюдения точки II частота собственных колебаний остается той же, но если полагать возбуждающим фактором силовое воздействие P, прикладываемое к точке II, то силовой фактор должен быть взят в виде

$$P_2 = P\frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

При этом должно соблюдаться условие сохранения равенства обоих моментов сил (P и P_2) относительно точки 0. Если в момент времени $t = 0$ свободные колебания возникают из-за начальной скорости $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ (в точке I), то при рассмотрении движения точки II необходимо учесть, что начальная скорость в точке II будет иной ($\dot{y}_2(0) = \dot{y}(0)\frac{l_1}{l_1 + l_2}$).

III. Если ввести обобщенную координату $\varphi = yl_1$, то выражения для кинетической и потенциальной энергий принимают вид

$$T = \frac{1}{2}ml_1^2\dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}kl_1^2\varphi^2,$$

а уравнение свободного движения ВЗС (рис. 2) записывается в форме

$$ml_1^2\ddot{\varphi} + kl_1^2\varphi = 0. \quad (2)$$

Будем полагать $y_2 = (l_1 + l_2)\varphi$, то есть выберем точкой наблюдения т. II, тогда

$$\frac{y_2}{l_1 + l_2} = \varphi. \quad (3)$$

После подстановки (3) в (2) получим

$$\frac{ml_1^2}{l_1 + l_2}\cdot\ddot{y}_2 + \frac{kl_1^2}{l_1 + l_2}y_2 = 0 \text{ или } m\ddot{y}_2 + ky_2 = 0, \quad (4)$$

что соответствует уравнению (4) без правой части. Таким образом, при выборе наблюдаемой координаты в виде φ положение т. I и II не оказывает влияния. По существу, рассматривается такая ситуация, когда расчетная схема на рис. 1 может рассматриваться как «базовая», и в ней точка наблюдения совпадает с точкой приложения усилия (перемещение этой точки определяет и величину потенциальной энергии). Если переходить к другой координате наблюдения, то воспринимаемые параметры движения объекта защиты по сравнению с параметрами состояния базовой системы будут другими. Они будут разными и зависят от того, каким образом выбираются новые точки наблюдения. В рассматриваемом случае, при выборе в качестве наблюдаемой обобщенной координаты угла φ (для чего используется соответствующая измерительная техника), вопрос о точках наблюдения снимается по определению, что предполагает необходимость использования совместимых форм описания кинематических и силовых факторов.

В системах с двумя степенями свободы ситуация складывается несколько иначе из-за того, что движение может описываться бо́льшим выбором систем координат. Рассмотрим расчетную схему ВЗС в виде балки (рис. 3), опирающейся на упругие опоры.

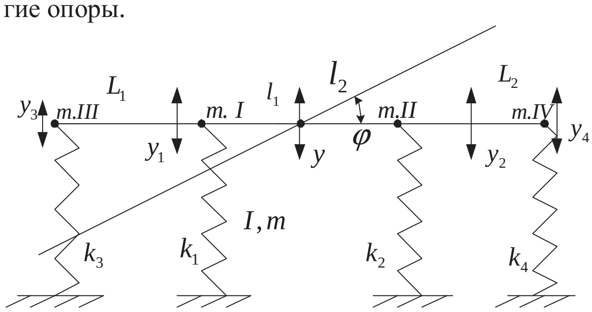

Рис. 3. Расчетная схема ВЗС с двумя степенями свободы

Для вывода уравнения движения ВЗС в системе координат y, φ запишем

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1y_1^2 + \frac{1}{2}k_2y_2^2 + \frac{1}{2}k_3y_3^2 + \frac{1}{2}k_4y_4^2,$$

где соответственно, масса и момент инерции балки; $k_1 \div k_4$ – жесткости упругих элементов в соответствующих точках. Примем ряд обозначений:

$$y_1 = y - l_1\varphi,\ y_2 = y + l_2\varphi,$$

$$y = \frac{y_1l_2 + y_2l_1}{l_1 + l_2},\ \varphi = \frac{y_2 - y_1}{l_1 + l_2},$$

$$a = \frac{l_2}{l + l},\ b = \frac{l_1}{l_1 + l_2},\ d = \frac{1}{l_1 + l_2},\ c_0 = \frac{1}{L_1 + L_2},$$

$$a_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2},\ b_1 = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$$

При условии $k_3 = 0, k_4 = 0$:

$$T = \frac{1}{2} m\left(a^2 \dot{y}_1 + 2ab\dot{y}_1\dot{y}_2 + b^2 \dot{y}_2^2\right) + + \frac{1}{2} d^2 (\dot{y}_2^2 - 2\dot{y}_2\dot{y}_1 + \dot{y}_1^2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2,$$

а уравнения движения принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{y}_1(ma^2 + Id^2) + \ddot{y}_2(mab - Id^2) + k_1 y_1 = 0 \\ &\ddot{y}_1(mb^2 + Id^2) + \ddot{y}_1(mab - Id^2) + k_2 y_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Учет $k_3 \neq 0,\ k_4 \neq 0$ требует учета соотношений $y_3 = y - L_1\varphi,\ y_4 = y + L_2\varphi$, тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} k_3 (y^2 - 2yL_1\varphi + L_1^2\varphi^2) + + \frac{1}{2} k_1 (y^2 - 2yl_1\varphi + l_1^2\varphi^2) + + \frac{1}{2} k_2 (y^2 + 2l_2\varphi y + l_2^2\varphi^2) + + \frac{1}{2} k_4 (y^2 + 2yL_2\varphi + L_2^2\varphi^2),$$

Введем в рассмотрение ряд соотношений
$y = y_1 + l_1\varphi,\ y_3 = y_1 + \varphi l_1 - L_1\varphi = y_1 - \varphi(L_1 - l_1)$,
$y_1 = y_3 + \varphi(L_1 - l_1)$, примем $a_0 = L_1 - l_1$, тогда
$y_1 = y_3 + a_0\varphi, y = y_2 - l_2\varphi,\ y_4 = y_2 - l_2\varphi + L_2\varphi = = y_2 + \varphi(L_2 - l_2)$,
$y_2 = y_4 - \varphi(L_2 - l_2) = y_4 - b_0\varphi$ при $b_0 = L_2 - l_2$.

Уравнения движения можно получить двумя способами.

I. Полагая $k_3 = 0, k_4 = 0$, в системе уравнений (5) используем соотношения

$$y_1 = y_3 + a_0\varphi,\ y_2 = y_4 - b_0\varphi,$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y}_3 + a_0\ddot{\varphi}, \ddot{y}_2 = \ddot{y}_4 - b_0\ddot{\varphi}, \varphi = \frac{y_4 - y_3}{L_1 + L_2} = \frac{y_2 - y_1}{l_1 + l_2},$$

$\varphi = c_0(y_4 - y_3)$, $\ddot{\varphi} = c_0(\ddot{y}_4 - \ddot{y}_3)$.

Преобразуем уравнение (163) к виду

$$\left.\begin{aligned} &(\ddot{y}_3 + a_0\ddot{\varphi})(ma^2 + Id^2) + \\ &+(\ddot{y}_4 - b_0\ddot{\varphi})(mab - Id^2) + k_1(y_3 + a_0\varphi) = 0 \\ &(\ddot{y}_4 - b_0\ddot{\varphi})(mb^2 + Id^2) + \\ &+(\ddot{y}_3 + a_0\ddot{\varphi})(mba - Id^2) + k_2(y_4 - b_0\varphi) = 0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\left[\ddot{y}_3 + a_0c_0(\ddot{y}_4 - \ddot{y}_3)\right](ma^2 + Id^2) + \\ &+\left[\ddot{y}_4 - b_0c_0(\ddot{y}_4 - \ddot{y}_3)\right](mab - Id^2) + \\ &+k_1\left[y_3 + a_0c_0(y_4 - y_3)\right] = 0 \\ &\left[\ddot{y}_4 - b_0c_0(\ddot{y}_4 - \ddot{y}_3)\right](mb^2 + Id^2) + \\ &+\left[\ddot{y}_3 + a_0c_0(\ddot{y}_4 - \ddot{y}_3)\right](mab - Id^2) + \\ &+k_2\left[y_4 - b_0c_0(y_4 - y_3)\right] = 0 \end{aligned}\right\}$$

После некоторых упрощений получим

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{y}_3\begin{bmatrix} ma^2 + Id^2 - a_0c_0(ma^2 + Id^2) + \\ +b_0c_0(mab - Id^2) \end{bmatrix} + \\ &+\ddot{y}_4\begin{bmatrix} a_0c_0(ma^2 + I^2d^2) + mab - Id^2 - \\ -b_0c_0(mab - Id^2) \end{bmatrix} + \\ &+y_3k_1\left[1 - a_0c_0\right] + k_1a_0c_0y_4 = 0 \\ &\ddot{y}_4\begin{bmatrix} mb^2 + Id^2 - b_0c_0(mb^2 + Id^2) + \\ +a_0c_0(mab - Id^2) \end{bmatrix} + \\ &+\ddot{y}_3\begin{bmatrix} b_0c_0(mb^2 + Id^2) + mab - Id^2 - \\ -a_0c_0(mab - Id^2) \end{bmatrix} + \\ &+y_4k_2(1 - b_0c_0) + k_2b_0c_0y_3 = 0 \\ &\ddot{y}_3\left[(1 - a_0c_0)(ma^2 + Id^2) + b_0c_0(mab - Id^2)\right] + \\ &+\ddot{y}_4\left[a_0c_0(ma^2 + Id^2) + (1 - b_0c_0)(mab - Id^2)\right] + \\ &+k_1y_3(1 - a_0c_0) + y_4k_1a_0c_0 = 0 \\ &\ddot{y}_4\left[(1 - b_0c_0)(mb^2 + Id^2) + a_0c_0(mab - Id^2)\right] + \\ &+\ddot{y}_3\left[(1 - a_0c_0)(mab - Id^2) + b_0c_0(mb^2 + Id^2)\right] + \\ &+y_3k_2(1 - b_0c_0) + y_3k_2b_0c_0 = 0 \end{aligned}\right\} (6)$$

Система уравнений (6) заметно сложнее уравнения (5), и ей соответствует структурная схема, показанная на рис. 4.

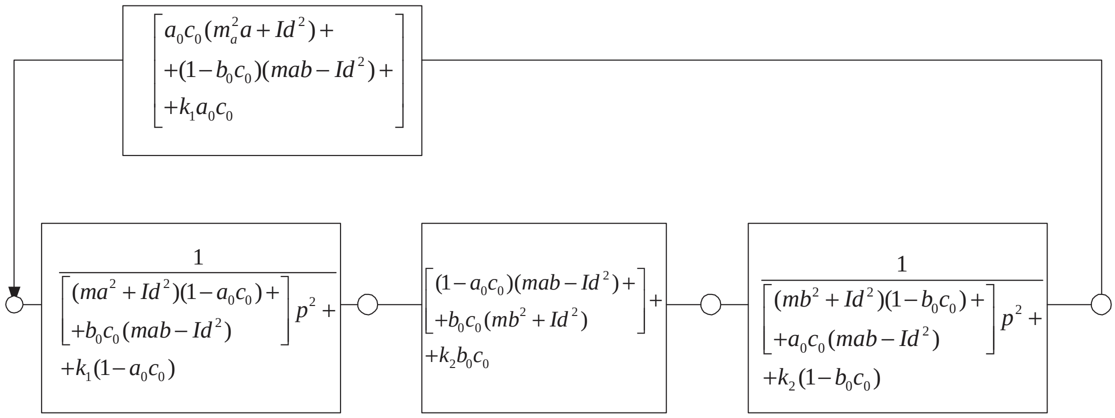

Рис. 4. Структурная схема системы координат наблюдения y_3, y_4, где приняты обозначения

Уравнению (5) соответствует структурная схема, приведенная на рис. 5.

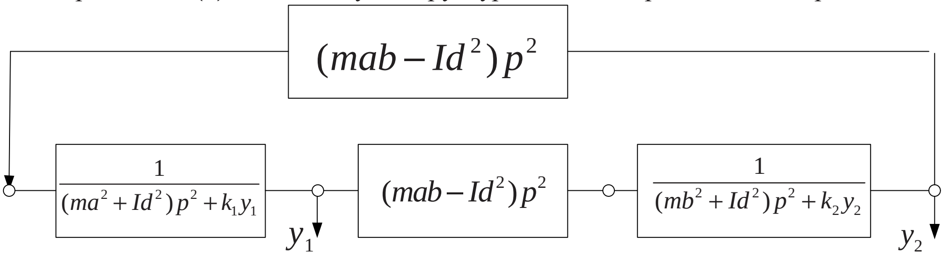

Рис. 5. Структурная схема системы (рис. 3) при $k_3 = k_4 = 0$ и отсутствии y_3, y_4

II. Получим уравнения состояния ВЗС, представленной на рис. 3, полагая, что

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2,$$

где

$$y = \frac{y_3L_2 + y_4L_1}{L_1+L_2}, \varphi = \frac{y_4-y_3}{L_1+L_2}, a_1 = \frac{L_2}{L_1+L_2}, c_0 = \frac{1}{L_1+L_2}$$

$$b_1 = \frac{L_1}{L_1+L_2},$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(a_1^2\dot{y}_3^2 + 2a_1b_1\dot{y}_3\dot{y}_4 + b_1^2\dot{y}_4^2\right) + \\ +\frac{1}{2}Ic_0^2(\dot{y}_4^2 - 2\dot{y}_4\dot{y}_3 + \dot{y}_3^2),$$

тогда

$$\Pi = \frac{1}{2}k_3y_3^2 + \frac{1}{2}k_4y_4^2 + \frac{1}{2}k_1(y_3 + a_0\varphi)^2 + \\ +\frac{1}{2}k_2(y_4 - b_0\varphi)^2$$

или

$$\Pi = \frac{1}{2}k_3y_3^2 + \frac{1}{2}k_4y^2{}_4 + \frac{1}{2}k_1\left[\begin{array}{l} y_3^2 + 2a_0c_0y_3(y_4-y_3) + \\ +a_0^2c_0^2(y_4^2 - 2y_4y_3 + y_3^2)\end{array}\right] + \\ +\frac{1}{2}k_2\left[\begin{array}{l} y_4^2 - 2y_4b_0c_0(y_4-y_3) + \\ +b_0^2c_0^2(y_4^2 - 2y_4y_3 + y_3^2 \end{array}\right]$$

Используя для вывода уравнения Лагранжа 2-го рода, получим

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{y}_3(ma_1^2 + Ic_0^2) + \ddot{y}_4(ma_1b_1 - Ic_0^2) + \\ +y_3(k_3 + k_1 - 2k_1a_0c_0 + k_1a_0^2c_0^2 + k_2b_0^2c_0^2) + \\ +y_4(k_1a_0c_0 - a_0^2c_0^2k_1 + k_2b_0c_0 - k_2b_0^2c_0^2) = 0 \\ \ddot{y}_4(mb_1^2 + Ic_0^2) + \ddot{y}_3(ma_1b_1 - Ic_0^2) + \\ +y_4(k_4 + k_1a_0^2c_0^2 + k_2 - 2k_2b_0c_0 + k_2b_0^2c_0^2) + \\ +y_3(k_1a_0c_0 - k_1a_0^2c_0^2 + k_2b_0c_0 - k_2b_0^2c_0^2) = 0 \end{array}\right\} \quad (7)$$

Если принять в (7) $k_3 = k_4 = 0$, то

$$\begin{array}{c} \ddot{y}_3(ma_1^2 + Ic_0^2) + \ddot{y}_4(ma_1b_1 - Ic_0^2) + \\ +y_3\left[k_1(1-a_0c_0)^2 + k_2b_0^2c_0^2\right] + \\ +y_4\left[k_1a_0c_0(1-a_0c_0) + k_2b_0c_0(1-b_0c_0)\right] = 0 \end{array} \quad (8)$$

$$\begin{array}{c} \ddot{y}_4(mb_1^2 + Ic_0^2) + \ddot{y}_3(ma_1b_1 - Ic_0^2) + y_4\left[k_2(1-b_0c_0)^2 + k_1a_0^2c_0^2\right] + \\ +y_3\left[k_1a_0c_0(1-a_0c_0) + k_2b_0c_0(1-b_0c_0)\right] = 0 \end{array}$$

На рис. 6 представлена структурная схема, соответствующая уравнению (8)

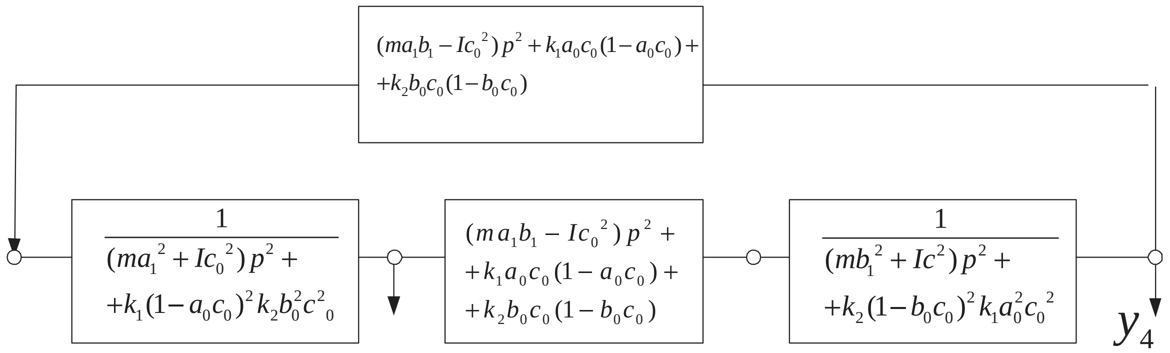

Рис. 6. Структурная схема, соответствующая схеме на рис. 3 при координатах наблюдения y_3, y_4

$$a_0 = L_1 - l_1,\ b_0 = L_2 - l_2,\ c_0 = \frac{1}{L_1 + L_2},$$

$$a_0c_0 = \frac{L_1 - l_1}{(L_1+L_2)^2},\ b_0c_0 = \frac{L_2 - l_2}{(L_1+L_2)^2},$$

если

$$l_1 = l_2 = l, L_1 = L_2 = L,\ a_0c_0 = \frac{L-l}{4L^2}; b_0c_0 = \frac{L-l}{4l^2},$$

$$1 - a_0c_0 = 1 - \frac{L-l}{4L^2} = \frac{4L^2 - L + l}{4L^2} = \frac{3L^2 + l}{4L^2};$$

$$1 - b_0c_0 = \frac{3L^2 + l}{4L^2}.$$

Сопоставление структурных схем дает возможность отметить следующее.

1. При переходе к наблюдаемым координатам меняется характер связности между парциальными подсистемами: связь из инерционной превращается в инерционно-упругую.

2. При условии $ma_1b_1 \neq Ic_0^2$ возможно существование режима развязки парциальных систем

$$\omega^2 = \frac{k_1(a_0c_0 - a_0^2c_0^2) + k_2(b_0c_0 - b_0^2c_0^2)}{ma_1b_1 - Ic_0^2}.$$

3. Парциальные частоты систем в координатах y_1 и y_2

$$\omega_1^2 = \frac{k_1(l_1 + l_2)^2}{ml_2^2 + I};$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_2(l_1 + l_2)^2}{ml_1^2 + I}.$$

Однако, используя координаты наблюдения, можно получить

$$\omega_1^2 = \frac{k_1(1 - a_0c_0)^2 + k_2b_0^2c_0^2}{ma_1^2 + Ic_0^2},$$

или

$$\omega_1^2 = \frac{k_1(L_2 + l_1)^2 + k_2(L_2 - l_2)^2}{mL_2^2 + I};$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_2(1 - b_0c_0)^2 + k_1a_0^2c_0^2}{mb_1^2 + Ic_0^2}.$$

Или

$$\omega_2^2 = \frac{k_2(L_1 + l_2)^2 + k_1(L_1 - l_1)^2}{mL_1^2 + I}.$$

4. Возьмем отношение парциальных частот в базовой системе

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{k_1(l_1 + l_2)^2}{(ml_2^2 + I)} \cdot \frac{(ml_1^2 + I)}{k_2(l_1 + l_2)^2} = \frac{k_1}{k_2}\frac{ml_1^2 + I}{ml_2^2 + I}$$

В системе наблюдения y_3 и y_4, имеем

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{\left[k_1(1 - a_0c_0)^2 + k_2b_0^2c_0^2\right](mb_1^2 + Ic_0^2)}{(ma_1^2 + Ic_0^2)\left[k_2(1 - b_0c_0)^2 + k_1a_0^2c_0^2\right]}$$

или

$$R = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{\left[k_1(L_2 + l_1)^2 + k_2(L_2 - l_2)^2\right](mL_1^2 + I)}{(mL_2^2 + I)\left[k_2(L_1 + l_2)^2 + k_1(L_1 - l_1)^2\right]}.$$

Если $l_1 = l_2 = l$, $L_1 = L_2 = L$, то

$$R = \frac{\left[k_1(L + l)^2 + k_2(L - l)^2\right](mL^2 + I)}{(mL^2 + I)\left[k_2(L + l)^2 + k_1(L - l)^2\right]}.$$

В то же время для базовой системы

$$R = \frac{k_1(2l)^2}{(ml^2 + I)} \cdot \frac{(ml^2 + I)}{k_2(2l^2)} = \frac{k_1}{k_2}.$$

То есть, параметры системы, определяемые из сопоставления представлений о движении базовой системы и системы в наблюдаемых координатах, будут различными.

IV. Рассмотрим особенности математических моделей базовой системы в виде расчетной схемы на рис. 7, где z_1, z_2 – внешние кинематические воздействия.

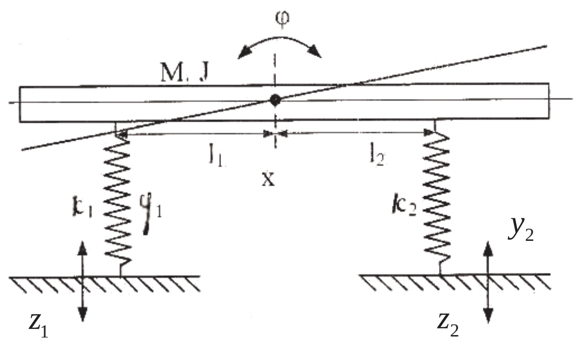

Рис. 7. Расчетная схема ВЗС (базовая) с кинематическими внешними воздействиями

Будем полагать, что для описания движения могут быть использованы следующие системы координат:

1. y_1 и y_2 (координаты в абсолютном движении);

2. y_1 и $y_2 = y_1 + (l_1 + l_2)\varphi$ (координаты y_1 в абсолютном движении и размах колебаний);

3. y и φ (координаты центра масс и угловые движения относительно центра масс);

4. y_2 и φ (координата y_2 в абсолютном движении, т.е. по отношению к неподвижной системе координат, и координата углового движения);

5 y_1 . и y ;

6. y_1 и φ .

При рассмотрении y и φ в качестве обобщенных координат кинетическая и потенциальная энергии имеют вид:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_2 - z_2)^2$$

Полагая, что $y_1 = y - l_1\varphi$, $y_2 = y + l_2\varphi$, найдем уравнения движения

$$M\ddot{y} + y(k_1 + k_2) + \varphi(k_2 l_2 - k_1 l_1) = k_1 z_1 + k_2 z_2, \qquad (9)$$

$$M\ddot{\varphi} + \varphi(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) + y(k_2 l_2 - k_1 l_1) = k_2 l_2 z_2 - k_1 l_1 z_1.$$

В матричной форме уравнение (9) имеет вид

$$A\ddot{X} + BX = CZ,$$

где

$$A = \begin{vmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_1 l_1 & k_2 l_2 \end{vmatrix},$$

$$X = \begin{vmatrix} y \\ \varphi \end{vmatrix}.$$

Определив матричное строение, перейдем к структурной схеме для данной системы, она показана на рис. 8.

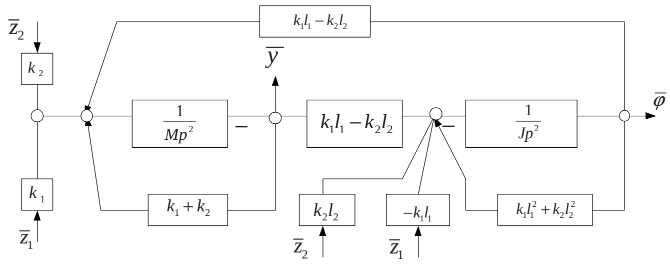

Рис. 8. Структурная схема ВЗС в координатах y, φ

Пусть $y_1 = y_2 = y, z_1 = z_2 = z$, что позволяет находить упрощенным образом передаточные функции. Кроме того, такие системы при выполнении условий симметрии в перекрестных связях дают возможность делать парциальные системы независимыми.

Система обобщенных координат y_1, y_2 .

При выборе системы координат y_1, y_2 для кинетической и потенциальной энергии выражения будут иметь вид

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\left(y_1 - z_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(y_2 - z_2\right)^2,$$

используя соотношения

$$\dot{\varphi} = \frac{\dot{y}_2 - \dot{y}_1}{l_1 + l_2} = \dot{y}_2 d - \dot{y}_1 d,$$

где $d = \dfrac{1}{l_1 + l_2}$; соответственно,

$$\dot{y} = \frac{\dot{y}_1 l_2 + \dot{y}_2 l_1}{l_1 + l_2} = \dot{y}_1 a + \dot{y}_2 b,$$

где $a = \dfrac{l_2}{l_1 + l_2}$, $b = \dfrac{l_1}{l_1 + l_2}$.

Дифференциальные уравнения движения можно записать

$$\left.\begin{aligned} (ma^2 + Id^2)\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2(mab - Id^2) + k_1 y_1 = k_1 z_1 \\ (mb^2 + Id^2)\ddot{y}_2 + (mab - Id^2)\ddot{y}_1 + k_2 y_2 = k_2 z_2 \end{aligned}\right\}.$$

Матрицы A, B, C для этого случая будут иметь вид

$$A = \begin{vmatrix} ma^2 + Id^2 & mab - Id^2 \\ mab - Id^2 & mb^2 - Id^2 \end{vmatrix}; \; B = \begin{vmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{vmatrix};$$

$$C = \begin{vmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{vmatrix}.$$

Получим структурную схему, как показано на рис. 9.

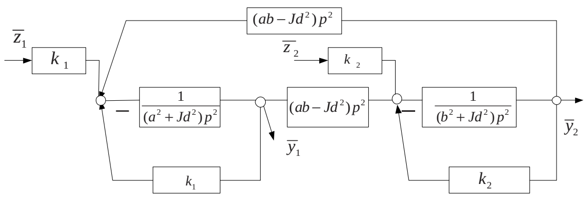

Рис. 9. Структурная схема ВЗС в системе координат y_1, y_2

Рассмотрим системy координат y_1, φ, где принят ряд соотношений

$$y_2 = y_1 + (l_1 + l_2)\varphi, \quad y = y_1 + l_1\varphi .$$

Записав выражения для кинетической и потенциальной энергии в виде:

$$T = \frac{1}{2} M\left(\dot{y}_1 + l_1\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2\left[(y_1 - z_2) + (l_1 + l_2)\varphi\right]^2,$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} M\ddot{y}_1 + Ml_1\ddot{\varphi} + k_1 y_1 + k_2 y_1 + k_2(l_1 + l_2)\varphi = \\ = k_1 z_1 + k_2 z_2, \\ Ml_1\ddot{y}_1 + (Ml_1^2 + J)\ddot{\varphi} + k_2(l_1 + l_2)y_1 + k_2(l_1 + l_2)^2\varphi = \\ = k_2(l_1 + l_2)z_2, \end{cases}$$

для которых матрицы инерционных, упругих и силовых параметров можно представить в форме:

$$A = \begin{vmatrix} M & Ml_1 \\ Ml_1 & Ml_1^2 + J \end{vmatrix};$$

$$B = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & k_2(l_1 + l_2) \\ k_2(l_1 + l_2) & k_2(l_1 + l_2)^2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} k_2 & k_2 \\ 0 & k_2(l_1 + l_2) \end{vmatrix}.$$

Структурная схема будет выглядеть следующим образом (рис. 10):

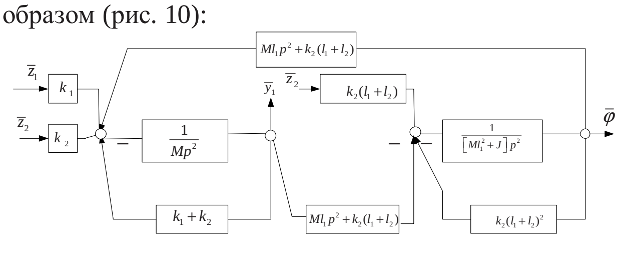

Рис. 10. Структурная схема ВЗС в обобщенных координатах y_1, φ

Рассмотрим системy координат y_2, φ, для которой $y_1 = y_2 + (l_1 + l_2)\varphi$; по аналогии с предыдущим $y = \dot{y}_2 + l_2\varphi$; выражения для кинетической и потенциальной энергии будут выглядеть следующим образом

$$T = \frac{1}{2} M\left(\dot{y}_2 + l_2\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\left[(y_2 - z_1) + (l_1 + l_2)\varphi\right]^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2,$$

откуда найдем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} M\ddot{y}_2 + Ml_2\ddot{\varphi} + \left(k_1 + k_2\right)x_2 + k_1(l_1 + l_2)\varphi = \\ = k_1 z_1 + k_2 z_2, \\ Ml_2\ddot{y}_2 + (Ml_2^2 + J)\ddot{\varphi} + k_1(l_1 + l_2)y_2 + k_1(l_1 + l_2)^2\varphi = \\ = k_1(l_1 + l_2)z_1. \end{cases}$$

Соответствующие матрицы коэффициентов матричного уравнения имеют вид

$$A = \begin{vmatrix} M & Ml_2 \\ Ml_2 & Ml_2^2 + J \end{vmatrix};$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & k_1(l_1 + l_2) \\ k_1(l_1 + l_2) & k_1(l_1 + l_2)^2 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_1(l_1 + l_2) & 0 \end{vmatrix}.$$

Структурная схема будет выглядеть, как показано на рис. 11.

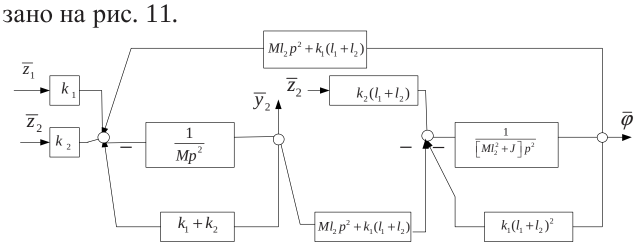

Рис. 11. Структурная схема ВЗС в системе координат y_2, φ

Рассмотрим систему координат y, y_1 и введем ряд соотношений:

$$\varphi = \frac{y_2 - y_1}{l_1 + l_2}; \; x = \frac{y_1 l_2 + y_2 l_1}{l_1 + l_2}; \; y_2 = y + l_2\varphi;$$

$$y_1 = y - l_1\varphi, \; \varphi = \frac{y - y_1}{l_1}.$$

Выражения для кинетической и потенциальной энергии

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2;$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(y_2 - z_1) + \frac{1}{2}k_2(y + l_2\varphi - z_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{k_2}{l_1}\left[y(l_1 + l_2) - y_1 l_2 z_2\right]^2.$$

Отсюда получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{y}\left(m + \dfrac{I}{l_1^2}\right) - \ddot{y}_1\dfrac{I}{l_1^2} + y\left[k_2\dfrac{(l_1 + l_2)^2}{l_1^2}\right] - \\ -\dfrac{k_2(l_1 + l_2)}{l_1}l_2 y_1 = k_2 z_2\left(\dfrac{l_1 + l_2}{l_1}\right); \\ -\ddot{y}\dfrac{I}{l_1^2} + \dfrac{I}{l_1^2}\ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2\dfrac{l_2^2}{l_1^2}) - \\ -y\dfrac{k_2}{l_1^2}\left(l_1 + l_2\right)l_2\big) = k_1 z_1 + k_2 z_2\dfrac{l_1}{l_2}. \end{cases}$$

Соответствующие матрицы A, B, C имеют вид

$$A = \begin{vmatrix} m + \dfrac{I}{l_1^2} & -\dfrac{I}{l_1^2} \\ -\dfrac{I}{l_1^2} & \dfrac{I}{l_1^2} \end{vmatrix};$$

$$B = \begin{vmatrix} k_2 \dfrac{(l_1 + l_2)^2}{l_1^2} & -k_2 \dfrac{(l_1 + l_2) l_2}{l_1} \\ -k_2 \dfrac{(l_1 + l_2) l_2}{l_1^2} & k_1 + k_2 \dfrac{l_2^2}{l_1^2} \end{vmatrix};$$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & k_2 \dfrac{(l_1 + l_2)}{l_1} \\ k_1 & k_2 \dfrac{l_1}{l_2} \end{vmatrix}.$$

Структурная схема ВЗС приведена на рис. 12.

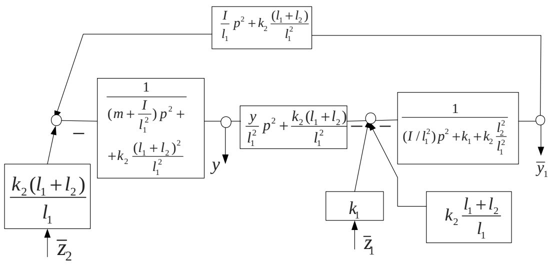

Рис. 12. Структурная схема ВЗС в системе координат y, y_1

Выбор системы обобщенных координат определяет оценку состояния ВЗС, в частности, парциальные частоты будут меняться так же, как и характер связей между парциальными системами.

Таким образом, выбор точек наблюдения за состоянием виброзащитных систем, так же, как и системы обобщенных координат, имеет для оценки динамического состояния ВЗС большое значение, поскольку в каждой конкретной ситуации наблюдения могут быть получены различные сведения и о характере перекрестных связей, и о значениях парциальных частот.

Литература

1. Елисеев, С. В. Мехатронные подходы в задачах вибрационной защиты машин и оборудования / С. В. Елисеев, Р. Ю. Упырь // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование : журн. Иркут. гос. ун-та путей сообщения. – 2008. Вып. 4 (20). – С. 8-16.

2. Елисеев, С. В. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов : моногр. / С. В. Елисеев, Ю. Н. Резник, А. П. Хоменко, А. А. Засядко. Иркутск : Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2008. – 523 с.