

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПЛАВОЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

В статье приведена разработанная методика планирования эксперимента. Составлена матрица планирования наплавочных экспериментов, содержащая перечень факторов, каждый из которых варьируется на двух уровнях.

Ключевые слова: методика планирования эксперимента, математические модели, наплавочные процессы, критерии оптимизации.

Как известно, в большинстве случаев эксперименты многофакторны. При проведении многофакторного эксперимента принимается либо классический, либо факторный план. Классический многофакторный эксперимент представляет собой последовательность однофакторных экспериментов, при которых все независимые переменные, кроме одной, принимаются постоянными. В таких экспериментах нельзя определить характер взаимодействия факторов между собой и их совместное влияние на выходной параметр.

Многофакторный эксперимент по факторному плану даст возможность изменения стратегии каждого этапа. Математическая теория эксперимента и его планирование, предусматривающие изменение всех исследуемых факторов по определенному плану и учитывающие их взаимодействие, – качественно новый подход с применением ЭВМ для обработки результатов факторного, управляемого эксперимента. Планирование эксперимента резко повышает точность и уменьшает объем экспериментальных исследований [1, 2].

Прежде чем планировать и проводить эксперимент, необходимо выбрать критерий, т. е. параметр, позволяющий оценить исследуемый объект и связать факторы в математическую модель. Правильно выбранный критерий оптимизации дает исследователю четкое представление о цели работы. Наиболее распространенным методом построения матрицы наплавочных экспериментов является метод случайного баланса [2].

В качестве критериев оптимизации процесса наплавки приняты твердость наплавленного слоя и напряжения при испытаниях восстановленных валов на усталостную прочность.

Перед тем, как строить матрицу наплавочных экспериментов, следует назначить уровни варьирования факторами и закодировать их знаками (+) и (–). Для анализа выбраны восемь факторов: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$, каждый из которых варьируется на двух уровнях (+) и (–). В развернутом виде матрица наплавочных экспериментов приведена в табл. 1.

После построения матрицы проверялась ее пригодность [1, 2]. Матрица пригодна, если в ней нет двух однотипных столбцов (с одинаковыми или неодинаковыми знаками).

После реализации экспериментов выписывались их результаты. Для анализа результатов наплавочных экспериментов строились графики (рис. 1а, 1б). Для этого по оси абсцисс наносились все факторы с их уровнями, а по оси ординат – опытные значения критерия оптимизации.

Для оценки эффектов факторов строились графики наплавки, на них наносились все точки с учетом уровня, на котором находился фактор в том или ином опыте [1].

В качестве среднего значения критерия оптимизации для одного уровня принимается медиана. Перечень взятых на учет факторов представлен в табл. 1, 2.

Таблица 1.

Матрица планирования наплавочных экспериментов.

№ опыта	Факторы								Критерий оптимизации	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Y_1	Y_2
-	3	5	68	10	21	10	150	1	48	3,5
0	6	10	84	20	36	20	185	1,5	57	4,5
+	9	15	100	30	51	30	220	2	66	5,5
1	3	5	68	10	51	10	220	2	48	3,5
2	9	15	68	10	21	30	220	2	66	5,5
3	9	5	100	10	5	10	150	1	66	5,5
4	9	5	68	30	51	30	220	1	66	5,5
5	3	15	100	10	21	10	150	2	48	3,5
6	3	15	68	30	51	30	150	2	66	5,5
7	3	5	100	30	21	30	150	1	48	3,5
8	9	15	100	30	21	10	220	1	48	3,5
9	3	15	68	30	51	10	220	2	66	5,5
10	9	15	68	10	21	10	150	2	66	5,5

Таблица 2

Факторы, влияющие на режим наплавки.

Фактор и его обозначение	Уровень факторов	
	-1	+1
x_1 - порошок алюминиевый, %	3	9
x_2 - порошок графитовый, %	5	15
x_3 - порошок железный, %	68	100
x_4 - скорость подачи проволоки, м/ч	10	30
x_5 - расход порошка, г/мин	21	51
x_6 - напряжение на дуге, В	10	30
x_7 - сила тока, А	150	220
x_8 - частота вращения детали, об./мин	1	2

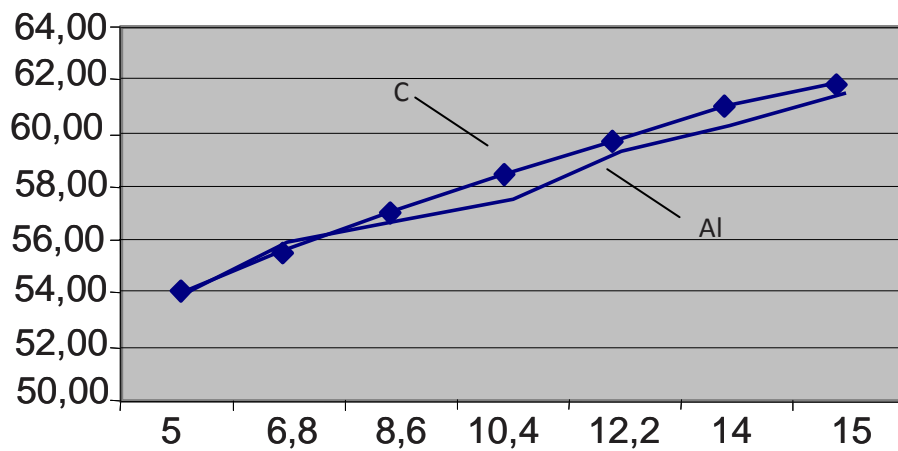


Рис.1 а

X_1, X_2 – содержание графита и алюминия (%) в порошке

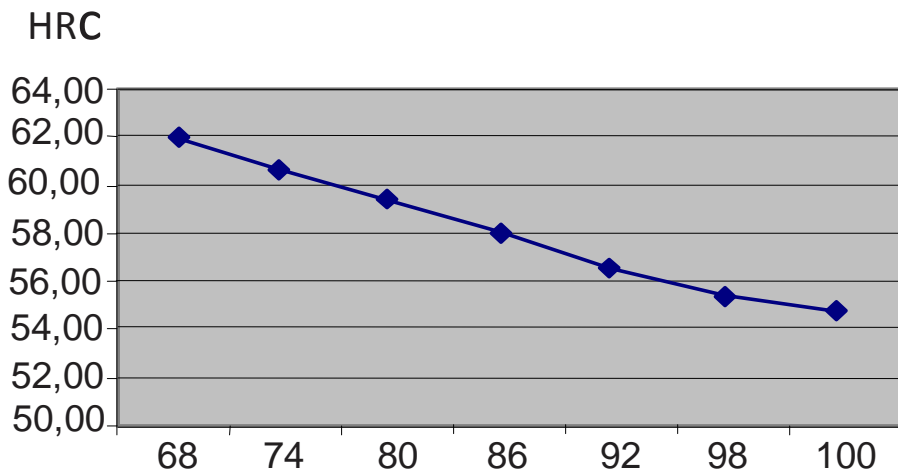


Рис.1 б

X_3 – содержание железа Fe (%) в порошке

Рис. 1а, 1б. Графики зависимости твердости слоя наплавки шеек валов HRC (параметр y_1) от состава шихты (в %), вводимой при наплавке (факторы X_1, X_2, X_3).

Исследования показали, что изменение содержания алюминия в порошке от 3 % до 9 % повышает твердость наплавленного слоя примерно на 30 %. Изменения содержания углерода от 5 % до 15 % повышает HRC примерно на 8-10 %. А повышение содержания железа от 68 % до 100 % снижает твердость HRC примерно на 15 %.

В КазНТУ проводились исследования по наплавке шеек изношенных чугуновых коленчатых валов.

Построение математической модели по результатам эксперимента производилось в следующей последовательности [2]:

- выбирался вид уравнения регрессии;
- проводился эксперимент и оценивались его результаты;
- определялись коэффициенты уравнения регрессии и проверялась их значимость;
- проверялось соответствие (адекватность) полученной модели исследуемому процессу (объекту).

Например, требуется построить модель процесса, зависящего от k независимых переменных факторов – x_i , т. е. найти отклик как функцию $y = y(x_i, a_i)$, где a_i – неизвестные постоянные параметры ($i=1, 2, \dots, k$).

Принимая средние значения факторов за их условные нулевые (основные) уровни Δx_i и задаваясь шагами их варьирования, переводим их значения в безразмерную кодированную форму. Процесс исследуется на основе полного многофакторного эксперимента ПФЭ, в котором для составления плана-таблицы эксперимента каждый из k -факторов варьируется на двух уровнях $p=2$, $N=P^k \rightarrow \text{ПФЭ} - N=2^k$ и введена фиктивная переменная $x_0=1$, причем, каждый опыт (серия измерений) повторяется u – раз.

Для исключения грубых погрешностей статистического ряда измерений имеется несколько методов. В случае малой выборки, подчиняющейся закону нормального распределения, критериями появления грубых погрешностей могут быть:

$$\beta_1 = (x_{\max} - \bar{x}) / \left[\sqrt{(n-1)/n} \cdot \sigma \right], \quad (1)$$

$$\beta_2 = (\bar{x} - x_{\min}) / \left[\sqrt{(n-1)/n} \cdot \sigma \right], \quad (2)$$

где x_{\max} , x_{\min} – наибольшее и наименьшее из N измерений.

Для определения грубых погрешностей находим β_{\max} и β_{\min} в зависимости от доверительной вероятности $p(t)$. Если $\beta_1 > \beta_{\max}$, то x_{\max} – грубая погрешность, и она исключается из статистического ряда. При $\beta_2 < \beta_{\min}$ исключается x_{\min} . Затем определяются новые значения \bar{x} и σ из $n-1$ или $n-2$ измерений.

В качестве первого приближения принимаем линейную модель процесса без учета взаимодействия факторов, т. е. уравнение вида $y = y(x_i, a_i)$ или

$$\bar{y}_n = b_0 + \sum_i b_i \bar{x}_0 + \dots, \quad (3)$$

где $x_0=1$.

Проводим эксперимент согласно составленному плану и оцениваем его результаты.

В каждой строке плана отмечаем наибольшее (наименьшее) значение функций отклика – y_{un} . Затем ищем среднее значение функций отклика в каждой строке плана без учета сомнительного результата

$$\bar{y} = \frac{1}{n-1} \sum_{u=1}^{n-1} y_{un} \quad (4)$$

и определяем среднее квадратичное отклонение от его значения (как центра группирования) по формуле:

$$S_n = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{u=1}^{n-1} (y_{un} - \bar{y}_n)^2 \right]^{z < 2} \quad (5)$$

Далее определяем расчетное значение критерия Стьюдента для каждой строки плана по формуле:

$$t_{pn} = \left(\left| y_{un}^n - \bar{y}_n \right| / S_n \right) < t_m, \quad (6)$$

где t_r – табличное значение критерия Стьюдента, которое находится по таблицам распределения при числе степеней свободы $f=n-1$ и уровне значимости (доверительном интервале) $q=0,05$. Если $t_p > t_r$, то значение y_{un} не согласуется с данными каждой строки и из дальнейших расчетов исключается.

После проверки однородности измерений во всех строках плана подсчитываются и заносятся в последнюю графу средние значения функции отклика \bar{y}_n . Далее производятся расчеты построчных дисперсий и проверка их однородности. Построчные дисперсии рассчитываются по формуле:

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{u=1}^{n-1} (y_{un} - \bar{y}_n)^2. \quad (7)$$

Затем подсчитывается сумма дисперсий по всем строкам плана $\sum_u S_n^2$ и определяется расчетное значение критерия Кохрена по формуле:

$$G_p = \left(S_{n\min}^z / \sum_u S_n^2 \right) < G_m, \quad (8)$$

где G_r – табличное значение критерия Кохрена, которое определяется при степенях свободы $f_1=n-1$ и $f_2=N$ и уровне значимости (доверительной вероятности 0,95) $q=0,05$ по таблице распределения Кохрена [4, 5].

При $G_p < G_T$ дисперсии считаются однородными и свидетельствуют о том, что в статистических данных нет случайных грубых ошибок, и измерения во всех строках плана имеют примерно одинаковую точность.

Если $G_T > G_p$, то предположение (гипотеза) об однородности дисперсий не подтверждается. В этом случае нужно принимать неформализованное решение, чтобы добиться выполнения условия $G_p < G_T$. Один из путей – переход к другому виду функций отклика. В тех случаях, когда число измерений в различных строках плана различно, применяется критерий Бартлетта.

При одинаковом числе параллельных опытов (серий измерений) во всех строках плана расчет дисперсий воспроизводимости производится по формуле

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_u S_N^2. \quad (9)$$

Оценка средних значений отклика в отдельных точках факторного пространства и проверка их значений производятся также по критерию Стьюдента:

$$t = \left[(\bar{y}_{N_{\max}} - \bar{y}_{N_{\min}}) / S_y \sqrt{n_{\max}^{-1} + n_{\min}^{-1}} \right] > t_m, \quad (10)$$

где t_T – табличное значение критерия Стьюдента, определяемое по числу степеней свободы $f = n_{\max} - n_{\min}$ и уровню значимости (доверительная вероятность 0,095) $q = 0,5$.

При $t_p > t_T$ различие между значениями отклика в различных точках плана существенно. Если $t_p < t_T$, средние значения \bar{y}_N отличаются статистически незначимо. В этом случае экспериментальные данные нельзя признать удовлетворительными, и необходимо поставить такой эксперимент, в котором значения отклика в отдельных точках плана отличались бы более существенно, что может быть достигнуто изменением масштабов переменных, интервалов варьирования факторов, применением планов второго порядка или перенесением области варьирования в другое место области исследования.

Определение коэффициентов уравнения регрессии производится по формуле

$$b_i = \left(\sum_n y_n x_{in} \right) / \sum_i x_{iN}^2, \quad (11)$$

а их статистическая значимость по формуле

$$S_b = S_y / \sqrt{Nk}. \quad (12)$$

Расчетное значение критерия Стьюдента:

$$t_p = (|b_i| / S_{b_i}) > t_m, \quad (13)$$

где t_T – табличное значение критерия определяется при степени свободы $f_{bi} = f_y = N(n-1)$ и уровне значимости $q = 0,05$ по таблицам распределения Стьюдента.

При $t_p > t_T$ все коэффициенты уравнения регрессии считаются значимыми, т. е. b_i не равно нулю. Если $t_p < t_T$, то предположение (гипотезу) о воз-

можном равенстве коэффициента b_i нулю следует принять и исключить из уравнения регрессии соответствующий член. Это значит, что исключаемый член, содержащий фактор x_i , существенно не влияет на отклик \bar{y} . Это утверждение может оказываться неверным даже при выполнении условия $t_p < t_T$, так как иногда коэффициент b_i оказывается малым из-за малого интервала варьирования J_i . Поэтому перед исключением $b_i x_i$ из уравнения надо выяснить причину малости коэффициента b_i . После проверки значимости коэффициентов b_i уравнение регрессии принимает вид:

$$\bar{y}_n = b_0 + \sum_i b_i \bar{x}_i + \dots \quad (14)$$

Проверка адекватности выбранного уравнения регрессии первоначально принятой математической модели исследуемого процесса производится по критерию Фишера.

Для этого вначале для каждой точки плана эксперимента определяются значения отклика \bar{y}_N , вычисленные по уравнению регрессии, затем определяется дисперсия адекватности:

$$S = \frac{n}{n-l} \sum_i (\bar{y}_N - \bar{y}_N)^2, \quad (15)$$

где \bar{y}_n – среднее значение отклика – берется из последней графы плана таблицы эксперимента; i – число значимых коэффициентов регрессии.

Расчетное значение критерия Фишера определяется по формуле

$$F_p = (S_{aq}^2 / S_y^2) < F_T, \quad (16)$$

а табличное F_T по двум степеням свободы $f_1 = N-1$ и $f_2 = N \cdot (n-1)$ и уровню значимости $q = 0,05$ по таблицам распределения Фишера.

При $F_p < F_T$ делается заключение об адекватности принятой модели исследуемому процессу. При $F_p > F_T$ считается, что выбранная модель не соответствует исследуемому объекту или процессу. В этом случае необходимы следующие неформальные решения (творческие действия):

- уменьшить интервалы варьирования J_i для всех или некоторых факторов;
- увеличить число параллельных опытов;
- в каждой строке плана эксперимента ввести новые, ранее не учтенные факторы;
- учесть, кроме парных взаимодействий (первого порядка), взаимодействия факторов более высокого порядка;
- изменить функцию отклика.

Литература

1. Налимов, В.В. Теория эксперимента / В.В. Налимов. – М.: Наука, 1971. – 205 с.
2. Румшинский, Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента / Л.З. Румшинский. М.: Наука, 1971. – 192 с.

3. Соснин, В.А. Экспериментальные методы исследования механики машин. Ч. 1. Организация и планирование эксперимента. Оценка результатов / В. А Соснин, Г. У. Уалиев. – Алматы : КазГУ, 1994. – 49 с.

5. Бородюк, В. П. Статистические методы в инженерных исследованиях : учеб. пособие /В. П. Бородюк [и др.]. – М.: Высшая школа, 1983. – 216 с.