УДК 681.51, 517.5, 62.50

В.В. Осипов

ТОЧЕЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЕРАЦИИ СВЕРТКИ

Рассматривается свертка как бинарная операция в пространстве ограниченных и абсолютно интегрируемых функций и как интегральный оператор с некоторым фиксированным разностным ядром. Свертка как бинарная операция в пространстве ограниченных функций превращает его в алгебру относительно L_1 -нормы. Решается задача о точечном изображении свертки как интегрального оператора с разностным ядром и как коммутативной бинарной операции.

Ключевые слова: точечное моделирование, метод точечных представлений.

1. Свертка как обобщенный интегральный оператор.

Рассмотрим интегральный оператор, обобщающий вольтеровский оператор интегрирования TJ_τ. Последний может быть представлен в виде интеграла с единичным разностным ядром (единичной весовой функцией):

$$y(\tau) = TJ_\tau \cdot x(\tau) = T\int_0^\tau x(\xi)d\xi = T\int_0^\tau 1(\tau-\xi)x(\xi)d\xi,$$

причем выполняется условие

$$1(\tau-\xi) = \begin{cases} 1 & (\tau-\xi) \ge 0 \Rightarrow \quad (0 \le \xi \le \tau); \\ 0 & (\tau-\xi) < 0 \Rightarrow \quad (\xi > \tau). \end{cases} \qquad (1)$$

Более общий оператор такого типа получим, если в качестве разностного ядра (весовой функции) будет взята некоторая функция $g(\tau) \in M(0,1)$ со свойством, аналогичным (1):

$$g(\tau-\xi) = \begin{cases} g(\tau-\xi); & (\tau-\xi) \ge 0 \Rightarrow \quad (0 \le \xi \le \tau); \\ 0; & (\tau-\xi) < 0 \Rightarrow \quad (\xi > \tau). \end{cases}$$

В результате возникает оператор, действующий по формуле

$$y(\tau) = T\int_0^\tau g(\tau-\xi)x(\xi)d\xi = TS_\tau \cdot x(\tau) = g * x. \qquad (2)$$

Его область определения – пространство $M(0,1)$. Область значений – пространство $C(0,1)$, являющееся подпространством в $M(0,1)$.

Оператор TS_τ называется оператором свертки; его называют также интегралом свертки функций $g(\tau)$ и $x(\tau)$ из $M(0,1)$ (операцией свертки этих функций) или просто сверткой, что символически обозначается в виде $g*x$.

Свертка – операция коммутативная:

$$\begin{aligned} y(\tau) &= T\int_0^\tau g(\tau-\xi)x(\xi)d\xi = g*x = \\ &= T\int_0^\tau x(\tau-\xi)g(\xi)d\xi = x*g \end{aligned}. \qquad (3)$$

В связи с этим отметим, что обе сворачиваемые функции считаются тождественно равными нулю при отрицательных значениях своих преобразованных аргументов (преобразованных в смысле замены переменного $t=T\tau$), т. е.

$$g(\tau) \equiv 0; \quad \tau < 0 \quad \text{и} \quad x(\tau) \equiv 0 \ \text{ при } \ \tau < 0,$$

что автоматически будет выполняться для произвольных функций, если их умножать на единичную функцию $1(t)$, т. е. считать, что

$$g(\tau) = g(\tau)\cdot 1(\tau) \quad \text{и} \quad x(\tau) = x(\tau)\cdot 1(\tau); \qquad \tau \ge 0,$$

как это делается в операционном исчислении на основе одностороннего преобразования Лапласа.

В частности, отметим, что результат (вольтеровского) интегрирования функции $x(\tau)$ есть свертка этой функции с единичной функцией $1(\tau)$:

$$TJ_\tau \cdot x(\tau) = T\int_0^\tau x(\xi)d\xi = T\int_0^\tau 1(\tau-\xi)x(\xi)d\xi = \\ = 1*x = x*1.$$

Возможна свертка трех и большего числа функций, рассматриваемая как последовательное попарное свертывание в любом порядке, в силу коммутативности этой операции. Возможна также многократная свертка функции $x(\tau)\in M(0,1)$ с одной и той же функцией $g(\tau)\in M(0,1)$ как ядром сверточного оператора TS_τ, что определяет соответствующую степень этого оператора

$$(TS_\tau)^k \cdot x(\tau) = \underbrace{(g*g*\cdots*g)}_{k} * x = g^{[k]} * x,$$

где символом $g^{[k]}$ обозначена k -кратная свертка функции $g(\tau)$ с собой, причем $g^{[1]}=g$.

В частности, k -ая степень оператора интегрирования TJ_τ может быть определена

$$(TJ_\tau)^k \cdot x(\tau) = T^k \underbrace{\int_0^\tau \cdots \int_0^\tau}_{k} x(\tau)d\tau^k = 1^{[k]} * x.$$

Так, при k=2 получим:

$$1^{[2]} = 1*1 = T\int_0^\tau 1(\tau-\xi)1(\xi)d\xi = T\int_0^\tau 1\cdot 1 d\xi = T\tau,$$

поэтому окажется

$$(TJ_\tau)^2 \cdot x(\tau) = T^2 \int_0^\tau\int_0^\tau x(\tau)d\tau^2 = 1^{[2]} * x = \\ = T^2\int_0^\tau 1(\tau-\xi)x(\xi)d\xi = T\tau * x(\tau).$$

При k=3 будем иметь

$$1^{[3]} = 1^{[2]} * 1 = T^2 \int_0^\tau (\tau - \xi) \cdot 1 d\xi = T^2 \int_0^\tau 1(\tau - \xi) \xi d\xi =$$

$$= T^2 \int_0^\tau \xi d\xi = \frac{(T\tau)^2}{2}$$

и, следовательно,

$$\left(TJ_\tau\right)^3 \cdot x(\tau) = T^3 \int_0^\tau \int_0^\tau \int_0^\tau x(\tau) d\tau^3 = 1^{[3]} * x =$$

$$= T^3 \int_0^\tau \frac{(\tau - \xi)^2}{2} x(\xi) d\xi = \frac{(T\tau)^2}{2} * x(\tau).$$

Далее, действуя по этой схеме, придем к выводу, что

$$\left(TJ_\tau\right)^k \cdot x(\tau) = 1^{[k]} * x = T^k \int_0^\tau \frac{(\tau - \xi)^{k-1}}{(k-1)!} x(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{(T\tau)^{k-1}}{(k-1)!} * x(\tau) \quad (k = 1, 2, ...)$$

Для Sup -нормы сверточного оператора TS_τ с ядром $g(\tau)$ из $M(0,1)$ будем иметь

$$\left\| TS_\tau \right\| = \mathop{Sup}_{\|x\| \neq 0} \frac{\left\| TS_\tau \cdot x(\tau) \right\|}{\|x\|} = \|g\|_{L_1} = T \int_0^1 |g(u)| du\,, \qquad (4)$$

т. к. для интеграла свертки (2) получаем оценку

$$|y(\tau)| = \left| T \int_0^\tau g(\tau - \xi) x(\xi) d\xi \right| \leq$$

$$\leq \mathop{Sup}_{\tau \in [0,1]} |x(\tau)| \cdot T \int_0^\tau |g(\tau - \xi)| \cdot |d\xi| \leq$$

$$\leq \|x\| \cdot T \int_0^\tau |g(u)| du \leq \|x\| \cdot T \int_0^1 |g(u)| du$$

и, следовательно,

$$\|y\| = \left\| TS_\tau \cdot x(\tau) \right\| = \mathop{Sup}_{\tau \in [0,1]} |y(\tau)| = \|x\| \cdot T \int_0^\tau |g(u)| du\,,$$

что эквивалентно (4).

Таким образом, Sup-норма $\left\| TS_\tau \right\|$ сверточного оператора TS_τ с ядром $g(\tau) \in M(0,1)$ совпадает с конечной L_1 -нормой

$$\|g\|_{L_1} = T \int_0^1 |g(\tau)| d\tau$$

этого ядра. Оператор TS_τ не только ограничен, но, очевидно, и линеен. И еще одно. Свертка (3) двух функций из $M(0,1)$ есть вторая бинарная операция, определенная в этом пространстве, являющемся пространством ограниченных и абсолютно интегрируемых (суммируемых) функций, определенных на [0,1]. Сделаем его нормированным, введя естественным образом L_1 -норму

$$\|f\|_{L_1} = T \int_0^1 |f(\tau)| d\tau < \infty; \qquad f(\tau) \in M(0,1)\,.$$

Для L_1 -нормы свертки (3) выполняется кольцевое свойство [1]

$$\|g * x\|_{L_1} \leq \|g\|_{L_1} \cdot \|x\|_{L_1}\,,$$

а также все обычные аксиомы бинарной операции. Возникающая таким образом сверточная алгебра функций не имеет, однако, единичного элемента, т. е. функции $e(\tau)$ из $M(0,1)$ со свойством $f*e=f$.

Такой элемент существует в более широком пространстве обобщенных функций. Это дельта-функция Дирака $\delta(\tau)$ – сингулярная обобщенная функция, обладающая рядом важных свойств [1].

Возникшую сверточную и коммутативную алгебру функций из $M(0,1)$ без единицы обозначим символом $ASL_1(0,1)$. Она – подалгебра алгебры обобщенных функций.

2. Векторная свертка. Гомоморфизмы сверточных алгебр.

Точечное преобразование свертки (2) приводит к векторно-матричному равенству для точечных изображений:

$$\begin{aligned} y(\tau) &= T \int_0^\tau g(\tau - \xi) x(\xi) d\xi = \\ &= TS_\tau \cdot x(\tau) \xrightarrow{T_N} Y_T = TS_T \cdot X_T\,, \end{aligned} \qquad (5)$$

где матрица TS_T ($N \times N$) есть точечно-матричное представление сверточного оператора TS_τ с ядром $g(\tau) \in M(0,1)$. Найдем явно это представление, используя общий метод [2]. Дело сводится к определению коэффициентов разложения функций

$$\begin{aligned} &TS_\tau \cdot \pi_N (\tau - \tau_\nu^{(N)}) = \\ &= T \int_0^\tau g(\tau - \xi) \pi_N (\xi - \tau_\nu^{(N)}) d\xi \qquad (\nu = \overline{1, N}) \end{aligned} \qquad (6)$$

по базисным элементам $\left\{ \pi_N (\tau - \tau_\nu^{(N)}) \right\}$ пространства $Sp_N^0(0,1)$ сплайновых форм, являющихся подпространством в $M(0,1)$, что эквивалентно проектированию (6) в $Sp_N^0(0,1)$ с помощью проектора π_N [2].

Речь идет о коэффициентах разложения

$$\begin{aligned} &\pi_N \left[TS_\tau \cdot \pi_N (\tau - \tau_\nu^{(N)}) \right] = \\ &= \sum_{k=\nu}^N \alpha_{k\nu} \pi_N (\tau - \tau_\nu^{(N)}) \qquad (\nu = \overline{1, N}). \end{aligned}$$

Это значения функций (6) в узлах чебышевской N–сетки

$$\tau_k^{(N)} = \frac{2k\text{-}1}{2N} \qquad (k = \overline{1, N})\,, \qquad (7)$$

т. е.

$$\alpha_{k\nu}=\left[TS_\tau\cdot\pi_N(\tau-\tau_\nu^{(N)})\right]\Big|_{\tau=\tau_k^{(N)}}=$$

$$=T\int_0^\tau g(\tau_k^{(N)}-\xi)\pi_N(\xi-\tau_\nu^{(N)})d\xi \qquad (k=\overline{1,N}).$$

Геометрически эти коэффициенты численно равны площадям частей под кривыми $g(\tau_k^{(N)}-\xi)$ $(k=\overline{\nu,N})$ в пределах длительности прямоугольного импульса $\pi_N(\xi-\tau_\nu^{(N)})$ при фиксированном ν и, в соответствии с квадратурной формулой трапеций, будут приближенно равны:

$$\alpha_{k\nu}\approx\begin{cases}\frac{T}{2N}g(\tau_1^{(N)})=\lambda_0 g(\tau_1^{(N)})\ \mathrm{k}=\nu\\ \frac{T}{2N}\left[g(\tau_{k-\nu+1}^{(N)})+g(\tau_{k-\nu}^{(N)})\right]=\\ \lambda_0\left[g(\tau_{k-\nu+1}^{(N)})+g(\tau_{k-\nu}^{(N)})\right] \qquad (\mathrm{k}>\nu).\end{cases} \tag{8}$$

Отметим, что при k=ν площадь «половинной» трапеции определится как площадь прямоугольника со сторонами $\frac{T}{2N}$ и $g(\tau_1^{(N)})$. Возникающая при этом ошибка, в общем случае, оказывается заметно больше тех ошибок, которые имеют место при определении площадей последующих «полных» трапеций (при k>ν).

Это обстоятельство и является причиной более значительной погрешности при определении $y(\tau_1^{(N)})$ – первой координаты точечного векторного изображения Y_T свертки в (5) по сравнению с погрешностями других компонент вектора Y_T.

Коэффициенты (8) и образуют компоненты точечно-матричного представления TS_T сверточного оператора TS_τ:

$$TS_T=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&&&&\\ \vdots&\ddots&&&\\ \alpha_{\nu1}&\cdots&\alpha_{\nu\nu}&&\\ \vdots&&\vdots&\ddots&\\ \alpha_{N1}&\cdots&\alpha_{N\nu}&\cdots&\alpha_{NN}\end{bmatrix}\approx$$

$$\approx\lambda_0\begin{bmatrix}g_1&&&&\\ \vdots&\ddots&&&\\ (g_\nu-g_{\nu-1})&\cdots&g_1&&\\ \vdots&\ddots&&\ddots&\\ (g_N-g_{N-1})&\cdots&(g_\nu-g_{\nu-1})&\cdots&g_1\end{bmatrix}, \tag{9}$$

где, для краткости записи, обозначено:

$$g_\nu=g(\tau_1^{(N)}) \qquad (\nu=\overline{1,\mathrm{N}}).$$

Матрица (9) является матрицей полиномиального сдвига (Р-матрицей) [2] и имеет следующее представление через каноническую матрицу сдвига Z $(N\times N)$:

$$TS_T=\lambda_0\left[g_1E+\sum_{\nu=2}^N(g_\nu-g_{\nu-1})Z^{\nu-1}\right]=$$

$$=\lambda_0\sum_{\nu=1}^N g_\nu Z^{\nu-1}+\lambda_0\cdot Z\cdot\sum_{\nu=1}^N g_\nu Z^{\nu-1}=$$

$$=\lambda_0(E+Z)\cdot\sum_{\nu=1}^N g_\nu Z^{\nu-1}= \tag{10}$$

$$=\lambda_0(E+Z)\cdot\begin{bmatrix}g_1&&&&\\ \vdots&\ddots&&&\\ g_\nu&\cdots&g_1&&\\ \vdots&\ddots&&\ddots&\\ g_N&\cdots&g_\nu&\cdots&g_1\end{bmatrix}\quad(N\times N).$$

Вектор

$$G_T=\lambda_0\cdot Colon\begin{bmatrix}g_1,(g_2-g_1),\ldots(g_\nu-g_{\nu-1}),\ldots\\ \ldots(g_N-g_{N-1})\end{bmatrix}=$$

$$=\lambda_0(E+Z)\cdot Colon\left[g_1,\ldots g_\nu,\ldots g_N\right]= \tag{11}$$

$$=\lambda_0(E+Z)\cdot g_T$$

есть элементный N -вектор P -матрицы (9) или (10). Очевидно, N -вектор

$$g_T=Colon\left[g_1,\ldots g_\nu,\ldots g_N\right]$$

является элементным вектором P -матрицы:

$$\begin{bmatrix}g_1&&&&\\ \vdots&\ddots&&&\\ g_\nu&\cdots&g_1&&\\ \vdots&\ddots&&\ddots&\\ g_N&\cdots&g_\nu&\cdots&g_1\end{bmatrix}=\sum_{\nu=1}^N g_\nu Z^{\nu-1}\quad(N\times N).$$

Итак, получаем:

$$y(\tau)=T\int_0^\tau g(\tau-\xi)x(\xi)d\xi\xrightarrow{T_N}TS_T\cdot X_T=Y_T,$$

причем, точечно-матричное представление TS_T (9) сверточного оператора TS_τ оказывается P–матрицей $(N\times N)$ с элементным N -вектором G_T (11) и, следовательно, матрично-векторное произведение TS_TX_T, как установлено в [2], есть векторная свертка G_T*X_T элементного вектора G_T и N -вектора X_T – точечного изображающего вектора функции $x(\tau)$:

$$y(\tau)=T\int_0^\tau g(\tau-\xi)x(\xi)d\xi=TS_\tau\cdot x(\tau)\xrightarrow{T_N}Y_T= \tag{12}$$

$$=TS_T\cdot X_T=G_T*X_T.$$

Или в форме покоординатных (сверточных) равенств:

$$y(\tau_\nu^{(N)})=$$

$$=\lambda_0\sum_{i=1}^{\nu}\left[q(\tau_{\nu-i+1}^{(N)})+q(\tau_{\nu-i}^{(N)})\right]x(\tau_i^{(N)}) \quad (\nu=\overline{1,\mathrm{N}}), \tag{13}$$

причем, $g(\tau_0^{(N)})\equiv 0$.

Векторная свертка, как и свертка функций, – операция коммутативная,

$$Y_T = G_T * X_T = X_T * G_T$$

и поэтому вместо (13) можем написать эквивалентную систему равенств:

$$y(\tau_\nu^{(N)}) =$$

$$= \lambda_0 \sum_{i=1}^{\nu} x(\tau_{\nu-i+1}^{(N)}) \left[g(\tau_i^{(N)}) + g(\tau_{i-1}^{(N)}) \right] \quad (\nu = \overline{1,\mathrm{N}}).$$

Ранее было установлено [2], что векторная свертка, вторая бинарная операция в N -мерном пространстве R_N элементных векторов, превращает это пространство в коммутативную нормированную (банахову) алгебру с единицей относительно l_1 -нормы. Это – сверточная N-алгебра ASl_1 элементных векторов.

Для l_1 -нормы векторной свертки выполняется кольцевое свойство:

$$\left\|Y_T\right\|_1 = \left\|TS_T \cdot X_T\right\|_1 = \left\|G_T * X_T\right\|_1 \le \left\|G_T\right\|_1 \cdot \left\|X_T\right\|_1,$$

где

$$\left\|G_T\right\|_1 \le \lambda_0 \left\|E+Z\right\|_1 \cdot \left\|g_T\right\|_1 = 2\lambda_0 \cdot \left\|g_T\right\|_1 =$$

$$= \frac{T}{N} \sum_{\nu=1}^{N} \left| g(\tau_\nu^{(N)}) \right| \xrightarrow{N\to\infty} T\int_0^1 \left| g(\tau) \right| d\tau = \left\|g\right\|_{L_1}.$$

Предельное равенство имеет место в силу равномерной распределенности чебышевской N-сетки (7). Это означает, что при $N\to\infty$ векторная l_1 -норма $\left\|G_T\right\|_1$ совпадает с L_1 -нормой $\left\|g\right\|_{L_1}$ функции $g(\tau)\in M(0,1)$, которая одновременно, согласно (4), является нормой сверточного оператора TS_τ. Отметим также представление:

$$\left\|Y_T\right\|_1 = \sum_{\nu=1}^{N} \left| y(\tau_\nu^{(N)}) \right| \quad \text{и} \quad \left\|X_T\right\|_1 = \sum_{\nu=1}^{N} \left| x(\tau_\nu^{(N)}) \right|.$$

Таким образом, согласно (12), свертка $g*x$ любой пары функций $g(\tau)$ и $x(\tau)$ из $M(0,1)$ с помощью точечного преобразования переходит в свертку G_T*X_T изображающих N -векторов сворачиваемых функций, причем, для функции $x(\tau)$ в качестве изображающего берется точечный N-вектор X_T, ассоциированный с чебышевской N-сеткой (7), а для другой функции $g(\tau)$, рассматриваемой в роли ядра сверточного оператора TS_τ, в качестве изображающего берется N -вектор G_T, определяемый (11).

Отметим, однако, несколько иное представление для этого вектора, поясняющее его смысл в другой связи. В силу представления [2]

$$TJ_T = \lambda_0 \frac{E+Z}{E-Z} \qquad (\mathrm{N}\times\mathrm{N})$$

для точечной матрицы интегрирования (11) можно записать следующим образом:

$$G_T = \lambda_0 (E+Z) \cdot g_T =$$

$$= (E-Z) \cdot \lambda_0 \frac{E+Z}{E-Z} \cdot g_T = (E-Z) \cdot TJ_T \cdot g_T. \tag{14}$$

Поскольку, далее

$$\int_0^t g(t)dt = T\int_0^\tau g(T\tau)d\tau =$$

$$= TJ_\tau \cdot g(\tau) \xrightarrow{T_N} \left(TJ_\tau \cdot g(\tau)\right)_T = TJ_T \cdot g_T, \tag{15}$$

$$(E-Z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\mathrm{N}\times\mathrm{N}) \tag{16}$$

есть матричный разностный оператор, то точечный N -вектор G_T в представлении (14) есть результат воздействия разностного оператора (16) на точечное изображение TJ_Tg_T интеграла от $g(\tau)$ - ядра сверточного оператора TS_τ согласно (15).

Отметим еще одно обстоятельство. Как уже отмечалось, сверточная алгебра функций из $M(0,T)$ не имеет единичного элемента. Такой элемент имеет более широкая сверточная алгебра – сверточная алгебра обобщенных функций [1]. В ней роль единичного элемента играет δ-функция Дирака $\delta(t)$ – важнейшая сингулярная обобщенная функция с определяющим свойством:

$$TS_\tau(\delta)x = \delta * x = \int_0^t \delta(t-\eta)x(\eta)d\eta =$$

$$= T\int_0^\tau \delta(\tau-\xi)x(\xi)d\xi = x(\tau) = x(T\tau) = x(t). \tag{17}$$

Последнее имеет место для всякой функции $x(t)\in \mathrm{M}(0,T)$. Таким образом, если нормированное пространство $M(0,T)$ – пространство кусочно-непрерывных функций с L_1 -нормами – дополнить сингулярным элементом $\delta(t)$ с единичной L_1 -нормой

$$\left\|\delta\right\|_{L_1} = \int_0^1 \left|\delta(t)\right| dt = 1$$

и ввести в этом пространстве вторую бинарную операцию – свертку элементов, то в силу (17) получаем сверточную алгебру с единицей. Оставим прежний символ $ASL_1(0,1)$ для обозначения этой алгебры, указывая, однако, наличие в ней единицы в необходимых случаях.

Возникает вопрос: во что переходит единичный элемент $\delta(t)$ дополнительной сверточной алгебры $ASL_1(0,1)$ при ее точечном преобразовании T_N? Как при этом преобразуется сверточный оператор в (17) с δ -ядром?

Дело в том, что прямое точечное преобразование δ -элемента не существует, т. е. не существует, в обычном смысле, точечного изображающего N -вектора δ_T дельта-функции $\delta(t)$. Вместе с тем, согласно общей формуле (12), можем написать для точечного изображения свертки (17) с δ-ядром

$$TS_\tau(\delta)x(\tau)=T\int_0^\tau \delta(\tau-\xi)x(\xi)d\xi= \qquad (18)$$
$$=x(\tau)\xrightarrow{T_N}\Delta_T * X_T,$$

где X_T – точечный изображающий N -вектор функции $x(\tau)\in M(0,1)$, а символом Δ_T обозначен изображающий N-вектор δ-ядра сверточного оператора. Согласно (14), он определится формулой

$$\Delta_T=(E-Z)\cdot TJ_T\cdot\delta_T, \qquad (19)$$

причем, окажется

$$TJ_T\cdot\delta_T=1_T=Colon[1,1,\dots 1], \qquad (20)$$

как точечное изображение интеграла от δ-функции, равной функции $1(\tau)$, поскольку согласно (15) будем иметь:

$$\int_0^t \delta(t)dt=T\int_0^\tau \delta(T\tau)d\tau=1(\tau)\xrightarrow{T_N}TJ_\tau\cdot\delta_T=1_T$$

Заметим, что равенство (20) определяет понятие точечного изображающего N-вектора δ_T для δ-функции $\delta(t)$, хотя в обычном смысле, как уже отмечалось, такого понятия не существует.

Подставляя (20) в (19), найдем, учитывая (16), для изображающего N -вектора Δ_T:

$$\Delta_T=(E-Z)\cdot TJ_T\cdot\delta_T=$$
$$=(E-Z)\cdot 1_T=e_1=Colon[1,0,\dots 0],$$

т. е. изображающий N -вектор Δ_T δ -ядра сверточного оператора в (18) оказывается единичным вектором e_1, являющимся единицей в сверточной алгебре ASl_1 векторов из R^N.

Таким образом, можем написать:

$$\delta * x=T\int_0^\tau \delta(\tau-\xi)x(\xi)d\xi=$$
$$=x(\tau)\xrightarrow{T_N}\Delta_T * X_T=e_1 * X_T=X_T.$$

С учетом (12) это означает, что точечное преобразование T_N осуществляет гомоморфное отображение сверточной алгебры $ASL_1(0,1)$ с единицей на сверточную N–алгебру ASl_1 соответствующих изображающих векторов.

Однако остается открытым вопрос о явном представлении вектора δ_T – точечного изображающего N -вектора δ-функции $\delta(\tau)$, который существует в смысле равенства (20). Разрешая это векторно-матричное уравнение относительно δ_T, получим:

$$\delta_T=(TJ_T)^{-1}1_T=\frac{1}{\lambda_0}(E+Z)^{-1}\cdot(E-Z)\cdot 1_T=$$
$$=\frac{1}{\lambda_0}(E+Z)^{-1}e_1=$$
$$=\frac{1}{\lambda_0}Colon\left[1,-1,\dots(-1)^{k-1},\dots(-1)^{N-1}\right].$$

Таким образом, вектор δ_T, оказывается, есть элементный N -вектор P -матрицы

$$\frac{1}{\lambda_0}(E+Z)^{-1}=$$
$$=\frac{1}{\lambda_0}\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ (-1)^{k-1} & \cdots & -1 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ (-1)^{N-1} & \cdots & \cdots & & -1 & 1\end{bmatrix}(\mathrm{N}\times\mathrm{N}).$$

3. Теорема о точечном изображении свертки и преобразование Лапласа.

Пусть $g(t)$ и $x(t)$ две функции, определенные на $[0,\infty)$, ограниченные на любом конечном отрезке $[0,T]$ и удовлетворяющие условиям:

$$\int_0^\infty |g(t)|e^{-\sigma_g t}dt<\infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty |x(t)|e^{-\sigma_x t}dt<\infty. \qquad (21)$$

Наименьшие неотрицательные вещественные числа σ_g и σ_x, при которых выполняется (21), называются абсциссами абсолютной интегрируемости рассматриваемых функций. Для таких функций (оригиналов) существует преобразование Лапласа

$$L[g(t)]=G(p)=\int_0^\infty g(t)e^{-pt}dt;$$
$$L[x(t)]=X(p)=\int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt,$$

которые, как функции комплексной переменной «p», оказываются аналитическими в соответствующих полуплоскостях $Re\ p>\sigma_g$ и $Re\ p>\sigma_x$ плоскости «p».

Выполним инверсное преобразование переменной «p», полагая

$$p=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{p}.$$

Этим преобразованием всякая полуплоскость $Re\ p>\sigma$ плоскости p переходит во внутренность круга плоскости λ с центром в точке $Re\lambda=\frac{1}{2\sigma}$ и радиусом $\frac{1}{2\sigma}$. Действительно, пусть $\lambda=\alpha+i\beta$, тогда

$$\operatorname{Re}p=\operatorname{Re}\frac{1}{\lambda}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}>\sigma\Rightarrow\alpha^2+\beta^2<\frac{\alpha}{\sigma}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\alpha-\frac{1}{2\sigma}\right)^2+\beta^2<\frac{1}{2\sigma}\Rightarrow \qquad (22)$$
$$\Rightarrow\left|\lambda-\frac{1}{2\sigma}\right|<\frac{1}{2(\sigma)^2}.$$

Отметим, что при $\sigma \to 0$ внутренность круга (22) преобразуется в правую полуплоскость $Re\lambda > 0$ плоскости λ.

Функции комплексной переменной λ:

$$G^*(\lambda) = G\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \int_0^\infty g(t) e^{-\frac{t}{\lambda}} dt$$

$$\text{и} \quad X^*(\lambda) = X\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \int_0^\infty x(t) e^{-\frac{t}{\lambda}} dt$$

назовем инверсными преобразованиями Лапласа функций-оригиналов $g(t)$ и $x(t)$ соответственно. Это аналитические функции в своих круговых областях, пересечение которых есть круговая область (22), как область аналитичности обеих функций, если считать

$$\sigma = \mathrm{Max}\{\sigma_g, \sigma_x\}. \quad (23)$$

Свертка рассматриваемых оригиналов

$$y(t) = \int_0^t g(t-\theta) x(\theta) d\theta = g * x$$

есть функция, определенная на $[0,\infty)$ с абсциссой абсолютной интегрируемости (23). Ее изображение по Лапласу $Y(p)$, как известно [3], определится как произведение изображений по Лапласу сворачиваемых функций:

$$L[y(t)] = Y(p) = L[G(p) \cdot X(p)] = g * x.$$

Таким образом, свертка как бинарная операция в пространстве оригиналов при преобразовании Лапласа переходит в обычное умножение соответствующих изображений по Лапласу сворачиваемых функций.

Вместе с тем, как установлено выше, точечное преобразование свертки на конечном промежутке $[0,T]$ приводит к матрично-векторному умножению точечных преобразований сворачиваемых функций, которое объявляется их векторной сверткой в пространстве R_T^N точечных изображений. Наблюдаемая аналогия наводит на мысль о существовании связи между точечным преобразованием свертки двух функций и ее преобразованием по Лапласу.

Прежде, однако, отметим два вспомогательных утверждения, необходимых для дальнейшего.

Утверждение 1. Взаимно обратные дробно-линейные преобразования комплексных переменных λ и z:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{1+z}{1-z} \Rightarrow z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda + \lambda_0} \qquad (\lambda_0 > 0); \qquad (24)$$
$$\lambda = \alpha + i\beta; \quad z = x + iy$$

конформно отображают друг в друга круговые области:

область

$$\left|\lambda - \lambda_0 \frac{1+r^2}{1-r^2}\right| \le \frac{2r\lambda_0}{1-r^2} \quad (r < 1), \qquad (25)$$

целиком расположенную в правой полуплоскости плоскости λ, и область

$$|z| \le r \Rightarrow x^2 + y^2 \le r^2 \qquad (26)$$

плоскости z, причем, точка $\lambda = \lambda_0$ переходит в начало координат z=0 плоскости z. При $r \to 1-0$ область (25) вырождается в правую полуплоскость плоскости λ, а (26) становится центральным кругом единичного радиуса $|z| \le 1$.

Действительно, в координатной системе (α,β) область (25) преобразуется следующим образом

$$\left|\lambda - \lambda_0 \frac{1+r^2}{1-r^2}\right| \le \frac{2r\lambda_0}{1-r^2} \Rightarrow \left(\alpha - \lambda_0 \frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 + \beta^2 \le \frac{4r^2\lambda_0^2}{(1-r^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\lambda_0 \frac{1+r^2}{1-r^2} + \lambda_0^2 \le 0.$$

Подставляя представления:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 = |\lambda|^2 = \lambda_0^2 \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = \lambda_0^2 \frac{(1+x)^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2}; && \text{а)} \\ &\alpha = Re\lambda = \lambda_0 \frac{1 - x^2 - y^2}{(1-x)^2 + y^2}, && \text{б)} \end{aligned}\right\}$$

получим неравенство

$$\frac{(1-r^2)\left[(1+x)^2 + y^2\right] - 2(1+r^2)\left[1 - x^2 - y^2\right] + (1-r^2)\left[(1-x)^2 + y^2\right]}{(1-r^2)\left[(1-x)^2 + y^2\right]} \le 0$$

которое при $r<1$ эквивалентно такому же неравенству для числителя. Последнее после приведения подобных приобретает вид (26).

Граничная окружность области (25) пересекает вещественную ось $Re\lambda = \alpha$ в точках $\lambda_0 \frac{1-r}{1+r}$ и $\lambda_0 \frac{1+r}{1-r}$, которые при отображении переходят соответственно в точки –r и r вещественной оси $Re z = x$, как точки пересечения с граничной окружностью $|z| = r$ области (26). При $r \to 1-0$ радиус $\lambda_0 \frac{1+r^2}{1-r^2}$ граничной окружности области (25) неограниченно возрастает; отрезок $\left[\lambda_0 \frac{1-r}{1+r}, \lambda_0 \frac{1+r}{1-r}\right]$ переходит в положительную полуплоскость $[0,\infty)$, а сама круговая область (3.10) – в положительную полуплоскость $Re\lambda = \alpha \ge 0$; при этом круговая область (26) становится центральным кругом единичного радиуса.

Утверждение 2. Если выполнены условия

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_0 \frac{1+r}{1-r} \le \frac{1}{\sigma} \Rightarrow r \le \frac{1-\lambda_0\sigma}{1+\lambda_0\sigma}; && \text{а)} \\ &\frac{2r\lambda_0}{1-r^2} \le \frac{1}{2\sigma}, && \text{б)} \end{aligned}\right\}, \qquad (27)$$

то круговая область (25), целиком располагаясь внутри круга (22), оказывается областью аналитичности инверсного преобразования Лапласа $G^*(\lambda)$ некоторого оригинала g(t) с абсциссой абсолютной интегрируемости σ. При этом, в силу конформного отображения круговых областей (25) и (26), осуществляемого дробно-линейным преобразованием (24), функция

$$G^*(\lambda) = G^*\left(\lambda_0 \frac{1+z}{1-z}\right) = W^*(z)\ ,$$

как функция комплексного переменного z, окажется аналитической в центральном круге (26) и, следовательно, представима в нем степенным рядом:

$$G^*\left(\lambda_0 \frac{1+z}{1-z}\right) = W^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k z^k; \qquad |z| \le r \le 1$$

с вещественными коэффициентами

$$W_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}W^*(z)\Big|_{z=0} = \\ = \frac{2\lambda_0}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[G^*(\lambda)(\lambda+\lambda_0)^{k-1}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0} \quad (k = 0,1,...). \tag{28}$$

Действительно, условия (27) гарантируют попадание круга (3.10) внутрь круговой области (22), поскольку отрезок $\left[\lambda_0 \frac{1-r}{1+r}, \lambda_0 \frac{1+r}{1-r}\right]$, отсекаемый на вещественной оси Reλ=α окружностью (25), является ее диаметром и оказывается внутри отрезка $\left[0, \frac{1}{\sigma}\right]$ – диаметра круга (22).

Доказательство второго утверждения, т. е. формулы (28) – второе представление для коэффициентов $\{W_k\}$ упустим.

Сделаем одно замечание, касающееся вида и свойств функций-оригиналов.

Уже отмечалось, что в общем случае это функции переменной $t \in [0,\infty)$, имеющие конечные абсциссы абсолютной интегрируемости. Вместе с тем, предполагается, что на всяком конечном промежутке $[0,T]$ функции-оригиналы ограничены и, по крайней мере, кусочно непрерывны с конечным числом возможных точек разрыва I рода.

Класс таких функций образует линейное пространство, которое было обозначено символом M(0,T) или M(0,1), если произвести замену переменной t, полагая $t=T\tau$ и считая, что $f(t)\in M(0,T) \sim f(T\tau)=f(\tau)\in M(0,T)$.

Пространство становится нормированным относительно L_1-нормы, как уже отмечалось в начале этой главы. Функции из M(0,1) и рассматриваются в методе точечных представлений.

Вместе с тем, эти функции относятся к классу измеримых ограниченных функций, характерным (определяющим) свойством которых является т. н. C-свойство в смысле Н. Н. Лузина, т. е. способность таких функций (и даже функций «почти всюду конечных») совпадать с непрерывными функциями почти всюду на $[0,T]$.

Смысл этого понятия связан с теорией меры и, в сущности, состоит в том, что функция из $M(0,T)$ в бесконечно малых окрестностях конечного числа своих возможных точек разрыва заменяется на непрерывную функцию, причем, общая длина всех таких интервалов «исправления» – сколь угодно малая величина по сравнению с длиной всего промежутка $[0,T]$, в котором определена функция. (Мера множества точек исправления – сколь угодно малая величина).

К этому примыкает следующий важный результат, известный как теорема Фреше [4]: для всякой измеримой и почти везде конечной функции $f(t)$ $t\in[0,T]$ (т.е. функция из $M(0,T)$) существует последовательность полиномов, сходящихся равномерно к $f(t)$ почти всюду. Это значит, что существует представление в виде степенного ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\ ,$$

сходящегося равномерно почти всюду к $f(t)\in M(0,T)$. Отметим, что при интегрировании последнего

$$\int_0^t f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} \qquad f(t) \in M(0,T) \tag{29}$$

по любому переменному промежутку $[0,t]\subseteq[0,T]$ получим тождественное равенство, и степенной ряд справа в (29) будет сходиться равномерно во всем промежутке $[0,T]$ к непрерывной функции слева.

Рассмотрим теперь теорему о точечном изображении свертки.

Теорема.

Если g(t) и x(t) – функции, определенные на $[0,\infty)$, имеют абсциссы абсолютной интегрируемости σ_g и σ_x соответственно и в любом конечном промежутке [0,T] ($T<\infty$) оказываются измеримыми ограниченными функциями (т.е. функциями из M(0,T)), то для всякого T, удовлетворяющего условию

$$T < \frac{2N}{\sigma} \Leftrightarrow \frac{T}{2N} = \lambda_0 < \frac{1}{\sigma}; \qquad \sigma = \mathrm{Max}\{\sigma_g, \sigma_x\},$$

точечное векторное изображение свертки этих функций, ассоциированное с чебышевской N-сеткой

$$t_\nu^{(N)} = \frac{T(2\nu-1)}{2N} = \lambda_0(2\nu-1) = T\tau_\nu^{(N)} \quad (\nu = \overline{1,N})\ ,$$

определится формулой

$$\int_0^t g(t-\eta)x(\eta)d\eta = \\ = T\int_0^\tau g(\tau-\xi)x(\xi)d\xi \xrightarrow{T_N} G^*(TJ_T)X_T = \\ = W_g^*(Z)X_T, \tag{30}$$

где X_T – точечное векторное изображение функции $x(t)=x(T\tau)=x(\tau)$; TJ_T – точечная матрица интегрирование [2], а матрица $G^*(TJ_T)$ $(N\times N)$, возникающая из инверсного изображения по Лапласу $G^*(\lambda)=G^*\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ функции-оригинала g(t) путем формальной замены комплексной переменной λ на матрицу TJ_T $(N\times N)$, имеет P -представление

$$G^*(TJ_T)=\begin{bmatrix} W_0 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ W_k & \cdots & W_0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\ W_{N-1} & \cdots & W_k & \cdots & W_0 \end{bmatrix}=, \qquad (31)$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1} W_k Z^k = W_g^*(Z) \quad (N\times N),$$

причем,

$$W_k=\frac{2\lambda_0}{k!}\cdot\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[G^*(\lambda)(\lambda+\lambda_0)^{k-1}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_0}=$$

$$=\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{dz^k}W_g^*(z)\Big|_{z=0} \qquad (k=0,1,...),$$

а Z $(N\times N)$ есть каноническая матрица сдвига [2].

Доказательство теоремы упустим в данной статье.

Полученное точечное изображение свертки (30) имеет вид произведения P-матрицы (31), определяемой по инверсному лапласовому изображению $G^*(\lambda)$ одной из сворачиваемых функций $g(t)$, на точечный изображающий N-вектор X_T другой функции x(t) из $M(0,T)$. Подобное произведение, как было установлено, есть векторная свертка элементного N -вектора

$$\overline{W}_g = Colon\left[W_0, W_1, \cdots W_k, \cdots W_{N-1}\right] = W_g^*(Z)e_1, \quad (32)$$

P -матрицы (31) и точечного N -вектора X_T:

$$g*x=\int_0^t g(t-\eta)x(\eta)d\eta=$$

$$T\int_0^\tau g(\tau-\xi)x(\xi)d\xi \xrightarrow{T_N} G^*(TJ_T)X_T=\overline{W}_g*X_T.$$

Элементный N-вектор (32), наряду с точечным изображающим N-вектором, может рассматриваться в роли изображающего вектора функции $g(\tau)\in M(0,1)$ с l_1 -нормой

$$\left\|\overline{W}_g\right\|_1=\sum_{k=0}^{N-1}|W_k|.$$

Назовем его изображающим W -вектором функции $g(t)\in M(0,T)$, определенной, однако, как уже отмечалось, на всей положительной полуоси и имеющей преобразование Лапласа. Таким образом, в результате точечного преобразования T_N снова имеем отмеченный уже факт (гомоморфного) отображения сверточной операции двух функций из $M(0,1)$ на сверточную же операцию соответствующих изображающих векторов из R^N:

$$y(t)=T\int_0^\tau g(\tau-\xi)x(\xi)d\xi=g*x \xrightarrow{T_N} \overline{W}_g*X_T=Y_T$$

или в покоординатной записи:

$$y(\tau_\nu^{(N)})=\sum_{k=1}^{\nu}W_{\nu-k}x(\tau_k^{(N)}) \qquad (\nu=\overline{1,N}).$$

Естественно, имеет место кольцевое свойство для l_1 -нормы векторной свертки:

$$\|Y_T\|_1=\left\|\overline{W}_g*X_T\right\|_1\le\left\|\overline{W}_g\right\|_1\cdot\|X_T\|_1.$$

Литература

1. Осипов, В. М. Обобщенные функции в теории приближения / В. М. Осипов. – Новосибирск : Изд-во НГУ, 1992. – 318 с.

2. Осипов, В. В. Моделирование линейных динамических систем методом точечных представлений / В. В.Осипов, В. М.Осипов. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 296 с.

3. Лурье, А. М. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики / А. М. Лурье. – М. : Гостехиздат. – 1950.

4. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – СПб.: Лань, 1999. – 560 с.