УДК 517.9

*И.В. Зубов, Н.В. Зубов, М.В. Стрекопытова**

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

В статье дано необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений вне зависимости от выбора однородных форм степени $m>1$.

Ключевые слова: однородные формы, сходящийся ряд, нулевое решение, положение равновесия, асимптотическая устойчивость в целом.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{m=\mu}^{\infty} X_s^{(m)}, \quad s=1,\ldots,n \qquad (1)$$

Функции $X_s^{(m)}$ – однородные формы степени m величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вещественными коэффициентами, при этом коэффициенты форм $X_s^{(\mu)}, s=1,\ldots,n$ постоянные, а коэффициенты $X_s^{(m)}, m>\mu, s=1,\ldots,n$ ограниченные функции t, заданные при $t\ge 0$ и непрерывные при $t\in[0,+\infty)$. Далее будем предполагать, что ряды, стоящие в правых частях системы (1), сходятся при достаточно малых $|x_1|,\ldots,|x_n|$ и при $t\ge 0$.

А.М. Ляпунов [1] дал при $\mu=1$ необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) вне зависимости от выбора форм $X_s^{(m)}, m>2k+1$.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы дать необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) при $\mu=2k+1, k>0$ – натуральное число, вне зависимости от выбора форм $X_s^{(m)}, m>2k+1$.

Дадим качественную характеристику окрестности асимптотического устойчивого положения равновесия. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=f_s\left(x_1 \ldots x_n\right), \quad s=1,\ldots,n. \qquad (2)$$

Будем предполагать, что правые части системы(2) вещественны, заданы при $-\infty<x_i<+\infty$, $i=1,\ldots,n$ и удовлетворяют условиям существования и единственности решения:

$$x_s=x_s(t,x_1^0),$$
$$x_s(0,x_1^0,\ldots,x_n^0)=x_s, \qquad s=1,\ldots n,$$

при любых конечных величинах $x_s^0, s=1,\ldots,n$. Пусть $f_s(0,\ldots,0)=0, \quad s=1,\ldots,n$.

Теорема 1. Для того чтобы нулевое решение системы (2) было асимптотически устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) существует по крайней мере одна O^+ - кривая системы (2); 2) не существует O^- - кривой системы (2); 3) существует окрестность $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le h^2$, не содержащая целых траекторий системы (2).

Замечание 1. Если $n<3$, то условие 3) становится лишним, если нулевое решение изолировано.

Замечание 2. Для того чтобы нулевое решение системы (2) было асимптотически устойчивым в целом, необходимо и достаточно, чтобы: 1) были выполнены условия 1) – 3) теоремы 1; 2) не существовало окрестности бесконечно удаленной точки, содержащей целые траектории системы (2).

Дадим представление *O*-кривых. Через a обозначим величину, которой далее будем придавать значения 1 или –1. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_s}{d\varphi}=x_s+aX_s^{(\mu)}, \qquad s=1,\ldots,n. \qquad (3)$$

Предположим, что существует решение системы (3)

$$x_s=x_s(\varphi,a), \qquad s=1,\ldots,n, \qquad (4)$$

при $\varphi\in(-\infty,+\infty)$, и образуем систему линейных уравнений

$$\frac{dx_s}{d\varphi}=\sum_{i=1}^{n} p_{si}(\varphi), \qquad s=1,\ldots,n, \qquad (5)$$

где

$$p_{si}=\delta_{si}+a\frac{\delta X_s^{(\mu)}}{\delta x_i}\Big|_{\substack{x_1=x_1(\varphi,a)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n=x_n(\varphi,a)}}.$$

Через $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ обозначим характеристичные числа системы (5).

Положим $z=z_0(1+2katz_0^{2k})^{-1/2k}$, z_0 – вещественная постоянная ($k=\frac{1}{2}(\mu-1)$).

Теорема 2. Если: 1) функции (4) ограничены при $\varphi\to+\infty$; 2) среди величин $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ имеется l положительных: $\lambda_i>0$ при $i\le l$; 3) система (5) правильная, то система (1) имеет два семейства О-кривых, каждое из которых зависит от

* - автор, с которым следует вести переписку.

l произвольных постоянных и представимо в форме рядов

$$x_s^j(t) = z(-1)^j x_s(-\ln z, a) +$$

$$+ \sum_{m+m_1+\ldots+m_l \geq 1} K_s^{(j,m,m_1,\ldots m_l)}(t) c_l^{m_1} \ldots c_l^{m_l} z^{m+\sum_{i=1}^{l} m_i \lambda_i}, \qquad (6)$$

$$j = 1, 2; \qquad s = 1, \ldots, n,$$

сходящихся при $|c_i| \leq c_0, |z| \leq z_1$. Функции $K_s^{(j,m,m_1,\ldots m_l)}(t)$ таковы, что $K_s^{(j,m,m_1,\ldots,m_l)}(t) z^{\alpha} \to 0$ при $at \to +\infty, \alpha > 0$ – любая постоянная.

Замечание 1. Выбором величины z_0 можно добиться того, чтобы ряды (6) сходились при $0 \leq at < +\infty$.

Замечание 2. Если коэффициенты форм $X_s^{(m)}$ при $m \geq \mu$ постоянные и функции (4) периодические одного периода $\omega > 0$, то функции $K_s^{(j,m,m_1,\ldots,m_l)}$ представимы в форме

$$K_s^{(j,m,m_1,\ldots,m_l)} = \sum_{r=0}^{M} \Phi_r^{(s,j,m,m_1,\ldots,m_l)} (\ln z)^r,$$

$$j = 1, 2; \qquad s = 1, \ldots, n$$

где функции $\Phi_r^{(s,j,m,m_1,\ldots,m_l)}$ периодические относительно z; M – целое неотрицательное число, зависящее от $m, m_1, m_2, \ldots m_l$.

Замечание 3. Если функции (4) постоянные, $x_s(\varphi, a) = x_s^{(0)}$, то $\Phi_r^{(s,j,m,m_1,\ldots,m_l)}$ – постоянные величины, а интегральные кривые семейства (6) входят в начало координат, касаясь луча $x_s = (-1)^j \tau x_s^{(0)}, \tau > 0$ – вещественный параметр.

Теорема 3. Пусть $n = 2$. Если система уравнений $x_i + X_i^{(\mu)} = 0, i = 1, 2$ имеет нетривиальное вещественное решение, то для того, чтобы нулевое решение системы (1) было асимптотически устойчивым вне зависимости от выбора форм $X_s^{(\mu)}, m > \mu$, необходимо и достаточно выполнение условий: 1) система $x_i = X_i^{(\mu)}, i = 1, 2$ не имеет вещественных решений, отличных от $x_1 = x_2 = 0$; 2) нулевое решение $x_1 = x_2 = 0$ системы (1) изолировано.

Замечание. Теорему 3 легко доказать, если учесть, что при ограниченности функций (4) существует по крайней мере одна положительная величина среди. $\lambda_1, \ldots \lambda_n$

Перейдем к решению поставленной задачи в общем случае.

Уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_i + X_i^{(\mu)}) = \psi(x_1, \ldots x_n)(1 + V), \qquad (7)$$

где $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ – аналитическая определенно-отрицательная функция, например $\psi = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение, определенное условием $V(0) = 0$ [2].

Теорема 4. Для того, чтобы нулевое решение системы (1) было асимптотически устойчивым при любом выборе функций $X_s^{(m)}, m > \mu$, необходимо и достаточно, чтобы:

1) область $V > -1$ была ограничена;

2) нулевое решение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ системы (1) изолировано.

Замечание. Результаты, полученные здесь, позволяют существенно продвинуться вперед в изучении сомнительных [1] случаев.

Литература

1. Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
2. Зубов, А. В. Динамика управляемых систем / А. В. Зубов, Н. В. Зубов, В. Н. Лаптинский. СПб.: СПбГУ, 2008. – 336 с.
3. Еругин, Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – Минск, 1963.