УДК 519.71:62.50

В.В. Осипов

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Предлагается решение экстремальных задач терминального управления методом точечных представлений который был дополнен граничными соотношениями, вытекающими из связи, существующей между точечно-векторными изображениями одной и той же функции, ассоциированными с (смежными) чебышевскими сетками I и II рода.

Ключевые слова: метод точных представлений на смежных чебышевских сетках, точечное моделирование, метод изображающих векторов

Пусть рассматриваемый динамический объект с импульсной переходной характеристикой ИПХ $g(t)\in L_1(0,\infty)$ и передаточной функцией (ПФ)

$$W_g(p)=\int g(t)e^{-pt}dt=\frac{H(p)}{D(p)}=$$
$$=\frac{b_m p^m+\cdots+b_{m-i}p^{m-i}+\cdots+b_1p+b_0}{p^n+\cdots+a_{n-k}P^{n-k}+\cdots+a_1p+a_0} \qquad (1)$$

вполне управляем. Связь «вход-выход» для такого объекта кроме классических представлений:

$$x(t)=\int_0^t g(t\text{-}\eta)U(\eta)d\eta \ \Gamma \quad X(p)=W_g(p)\cdot U(p)$$

может быть задана и в форме точечных представлений, ассоциированных со смежными чебышевскими N-сетками, заданными на $[0,T]$.

В частности, будем иметь:

$$\int_0^t g(t\text{-}\eta)\mathrm{u}(\eta)d\eta=x(t)\xrightarrow{T_{II}}\overline{X}_{T_{II}}=$$
$$=\begin{Bmatrix}2\lambda_0\cdot g(Z)\cdot\overline{U}_{T_I}; & a)\\ 2\cdot(E_N+Z)^{-1}\cdot W_g^*(Z)\overline{U}_{T_I}, & б)\end{Bmatrix} \qquad (2)$$

где $g(Z)$ - теплицева матрица $N\times N$ с элементным вектором $g(Z)\overline{e_1}$, совпадающим с точечным изображающим вектором $\overline{g}_{TI}$ ИПХ $g(t)$, ассоциированным с чебышевской N-сеткой I рода

$$\left\{\tau_\nu^{(N)}/CosN\pi\tau_\nu^{(N)}=0\right\}\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \tau_\nu^{(N)}=\frac{2\nu-1}{2N}\qquad(\nu=\overline{1,N}) \quad :$$
$$g(t)\xrightarrow{T_I}\overline{g}_{TI}=g(Z)e_1=$$
$$=Colon\left[g(t_{1I}^{(N)}),.....g(t_{\nu I}^{(N)}),.....g(t_{NI}^{(N)})\right].$$

Теплицева матрица $W_g^*(Z)$ $(N\times N)$ возникает из ПФ $W_g(p)$ (1) динамического объекта следующим образом [1].

С помощью инверсного преобразования комплексной переменной $p=\frac{1}{\lambda}$ ПФ $W_g(p)$ динамического объекта преобразуется в инверсную функцию комплексной переменной

$$W_g(p)\Big|_{p=\frac{1}{\lambda}}=W_g\left(\frac{1}{\lambda}\right)=W_g*(\lambda)=$$
$$=\frac{\lambda^{n\text{-}m}\left(b_m+..+b_{m-i}\lambda^i+..+b_1\lambda^{m-1}+b_0\lambda\right)}{1+\ldots+a_{n-m}\lambda^k+\ldots+a_1\lambda^{n-1}+a_0\lambda^n}.$$

При этом для устойчивого объекта правая полуплоскость $\mathrm{Re}\,p\geq 0$ плоскости p - область аналитичности функции $W_g(p)$, преобразуется в правую же полуплоскость $\mathrm{Re}\lambda\geq 0$ плоскости λ которая оказывается областью аналитичности инверсной функции $W_g^*(\lambda)$.

Дробно – линейное преобразование

$$\lambda=\lambda_0\frac{1+z}{1-z}\qquad(\lambda_0>0)$$

отображает полуплоскость $\mathrm{Re}\lambda\geq -0$ в единичный круг $|z|\leq 1$ комплексной плоскости z.

Таким образом, функция комплексной переменной z

$$W_g^*\left(\lambda_0\frac{1+z}{1-z}\right)=W_g^*(z)$$

оказывается аналитической в единичном круге и, следовательно, представима в нём рядом Тейлора при z=0:

$$W_g^*(z)=\sum_{k=0}^{\infty}W_k\cdot z^k \qquad (3)$$

Множества таких функций и их представлений в виде степенных рядов как алгебраические структуры порождают важные изоморфные и гомоморфные отображения. Эти алгебраические взаимодействия подробно изучены в [1]. В частности, установлено, что заменой в (3) комплексного переменного z на каноническую матрицу Z $(N\times N)$, в силу её нильпотентности порядка N, осуществляется гомоморфное отображение алгебры функций, аналитических в круге $|z|\leq 1$, на алгебру теплицевых матриц $(N\times N)$ (Р – матриц) с элементными N – векторами, составленными из первых N коэффициентов степенных разложений вида (3) [1,2].

Таким образом,

$$W_g^*(Z)=\sum_{k=0}^{N-1}W_kZ^k=\begin{bmatrix} W_0 & & & & & \\ W_1 & W_0 & & & & \\ . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & \\ . & . & . & . & . & \\ W_{N\text{-}1} & . & . & . & W_1 & W_0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

и

$$W_{gT\mathrm{I}}^*=W_g^*(Z)\bar{e}_1=Colon\left[W_0,\dots W_k,\dots W_{N-1}\right]$$

Определение компонент этого элементного N – вектора матрицы (4), т. е. N первых коэффициентов в разложении (2), подробно рассмотрено в [1], в частности, для случая ПФ $W_g(p)$ дробно – рационального вида (1).

Сравнивая между собой точечные представления в (2), приходим к матричному равенству

$$\lambda_0 g(Z)=(E_N+Z)^{-1}W_g^*(Z)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda_0(E_N+Z)g(Z)=W_g^*(Z)$$

а умножением на N – вектор $\overline{e_1}$ получаем равенство для элементных векторов этих теплицевых матриц:

$$\lambda_0 g(Z)\bar{e}_1=\lambda_0\bar{\mathrm{g}}_{\mathrm{TI}}=$$

$$=(\mathrm{E_N}+\mathrm{Z})^{=1}\bar{\mathrm{W}}_{\mathrm{gTI}}\Leftrightarrow\lambda_0(E_N+Z)\bar{g}_{T\mathrm{I}}=\bar{W}_{gTI}\,.$$

Эти формулы выражают заключительный этап процедуры обращения преобразования Лапласа методом точечных представлений [1]. Соответствующие равенства будем иметь и для инверсных элементных N – векторов:

$$\lambda_0\tilde{g}_{TI}=\lambda_0 g^+(Z)\tilde{e}_1=\lambda_0 g^+(Z)\tilde{e}_N=(E_N+Z^+)^{-1}\cdot(W_g^*(Z))^+\bar{e}_N=$$
$$=(E_N+Z^+)^{-1}(W_g^*(Z))^+\cdot\tilde{e}_1=(E_N+Z^+)^{-1}\cdot\tilde{W}_{gTI} \qquad (5)$$

С учётом этих равенств, конечное состояние $x(T)$ объекта, в котором он окажется в момент $t=T$ в результате воздействия управлением $U(t)\xrightarrow{T_I}\bar{U}_{TI}$, определится формулой

$$x(T)=(\bar{x}_{TII},\bar{e}_N)=$$
$$=\left\{\begin{matrix}2\lambda_0(g(Z)\bar{U}_{TI},\bar{e}_N)=2\lambda_0(\bar{U}_{TI},g^+(Z)\bar{e}_N)\\ 2((E_N+Z)^{-1}W_g^*(Z)\bar{U}_{TI},\bar{e}_N)=2(\bar{U}_{TI},(E_N+Z^+)^{-1}\cdot(W_g^*(Z)^+\bar{e}_N)\end{matrix}\right\}= \qquad (6)$$
$$=2\lambda_0(\bar{U}_{TI},\tilde{g}_{TI})=2(\bar{U}_{TI},(E_N+Z^+)^{-1}\cdot\tilde{W}_{gTI})$$

изображения $\tilde{g}_{TI}$ ИПХ $g(t)$ динамического объекта, связанного с инверсным вектором $\tilde{W}_{gTI}$ соотношением (5). Пусть рассматриваемый динамический объект вполне управляем. Поставим следующую задачу. В математической формулировке речь пойдёт о двух типах указанной экстремальной задачи, в зависимости от выбранного класса допустимых управлений.

Первый тип таких задач связан с ограничением на гельдеровскую норму вектора $\bar{U}_{TI}$: определить управление $\bar{U}_{TI}$ с, заданное на $[0,T]$, с ограниченной сверху гельдеровской нормой

$$\left\|\bar{U}_{TI}\right\|_p=\left(\sum_{\nu=1}^{N}\left|U(t_\nu^{(N)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le K_p\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\bar{U}_{TI}\in\ell_p^{(N)};\qquad p\ge 1, \qquad (7)$$

и доставляющее максимум функционалу (6).

Такой вектор $\bar{U}_{TI}\in\ell_p^{(N)}$ будем называть оптимальным вектором управления первого типа (с ограничением на гельдеровские нормы).

Что касается показателя $p\ge 1$ в выражении нормы, то, как уже отмечалось, рассматривают обычно частные случаи $p=1,2$ и ∞ и соответствующие нормы:

$$\left.\begin{matrix}\left\|\bar{U}_{TI}\right\|_1=\sum_{\nu=1}^{N}\left|U(t_\nu^{(N)}\right|\le K_1\Rightarrow\bar{U}_{TI}\in\ell_1^{(N)} & \text{а)}\\ \left\|\bar{U}_{TI}\right\|_2=\left(\sum_{\nu=1}^{N}\left|U(t_\nu^{(N)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le K_2\Rightarrow\bar{U}_{TI}\in\ell_2^{(N)} & \text{б)}\\ \left\|\bar{U}_{TI}\right\|_\infty=\max\limits_{(1\le\nu\le N)}\left|U(t_\nu^{(N)}\right|\le K_\infty\Rightarrow\bar{U}_{TI}\in\ell_\infty^{(N)} & \text{в)}\end{matrix}\right\}(7')$$

Второй тип экстремальной задачи, практически, пожалуй, более важной связан с ограничением на управление иного вида, а именно: рассматривается класс управлений, как кусочно – непрерывных функций времени, ограниченных по модулю во всём промежутке $[0,T]$. Для всякой функции $U(t)$ из этого класса выполняется условие

$$\left|U(t)\right|\le U_0;\qquad t\in\left[0,T\right] \qquad (8)$$

Очевидно, все координаты точечно – векторного изображения всякой такой функции, т.е. координаты N – вектора

$$U(t)\xrightarrow{T_I}\bar{U}_{TI}=Colon\left[U(t_1^{(N)}),\dots U(t_\nu^{(N)}),\dots U(t_N^{(N)})\right] \qquad (9)$$

также будут ограничены по модулю величиной U_0.

Будем иметь систему неравенств:

$$\left|U(t_\nu^{(N)})\right|\le U_0\qquad(\nu=\overline{1,N}), \qquad (10)$$

эквивалентную условию (8) в смысле основной идеи метода точечных представлений.

Геометрически, неравенства (10) в пространстве с системой координат вектора (9) описывают гиперкуб с длиной рёбер $2U_0$. Это – гиперкуб управления.

Ограничение вида (8) может быть названо ограничением по амплитуде. Ограниченные по амплитуде функции могут быть и кусочно – постоянные в промежутке $[0,T]$.

В частности, отметим вариант, когда функция $U(t)$ с ограничением по амплитуде в каждом из η интервалов, на которые каким–то образом может быть разбит промежуток $[0,T]$, последовательно принимая значения $\pm U_0$, как бы переключаясь по интервально с краевого значения одного знака на такое же значение другого знака, поэтому такие функции называют функциями переключений.

Это свойство переносится и на соответствующие точечно – векторные изображения (9) кусочно–постоянных функций $U(t)$: N координат этих векторов разбиваются на конечные подмножества в соответствии с поинтервальным разбиением промежутка $[0,T]$; все координаты каждого такого подмножества последовательно принимают только крайние значения $\pm U_0$.

Описанные кусочно–постоянныефункции управления называют обычно релейными управлениями.

Множество функций релейного типа, определённых на $[0,T]$, пространства, конечно, не образуют, но являются некоторым подмножеством в функциональном пространстве $L_\infty(0,T)$ с нормой $\|U\|_\infty$,т.к.

$$\|U\|_\infty = \max_{(0\le t\le T)} |U(t)| = |U(t)| = U_0$$

а соответствующие точечные N – векторы образуют подмножество в $\ell_\infty^{(N)}$, т.к., в этом случае,

$$\|U_{TI}\|_\infty = \underset{(1\le\nu\le N)}{\mathrm{Max}} |U(t_\nu^{(N)})| = |U(t_\nu^{(N)})| = U_0$$

для всех $\nu = \overline{1,N}$

Таким образом, указанные модули для функций релейного типа могут рассматриваться в роли норм, а неравенства (8) и (10), следовательно, в роли ограничений на эти нормы.

Сформируем теперь и вторую экстремальную задачу терминального управления. Найти такой точечный N – вектор управления $\bar{U}_{TI}$ (9) с ограничениями на координаты в виде неравенств (10), который доставляет максимум функционалу (6).

Допустимый N – вектор $\bar{U}_{TI}$, решающий эту задачу, будем называть оптимальным вектором релейного типа.

Прежде чем решать поставленные задачи отметим одно

<u>Утверждение 1</u>

Допустимый N – вектор управления $\bar{U}_{TI}$ может быть оптимальным лишь тогда, когда ограничения на его нормы в виде нестрогих неравенств становятся равенствами.

По логике вещей, это утверждение совершенно естественно. Дело в том, что величина всякой нормы вектора управления определяет его возможности по выводу объекта на максимально возможный уровень его конечного состояния $x(T)$. Чем больше норма, тем больше максимально возможное значение $x(T)$. Поэтому выбор максимально возможного в условиях задачи значения нормы вектора управления $\bar{U}_{TI}$ т.к. замена неравенств для нормы равенствами – необходимое условие оптимальности вектора $\bar{U}_{TI}$.

Приступим к решению поставленных задач.

<u>Утверждение 2</u>

Оптимальный точечный N – вектор управления $\bar{U}_{TI}^0$ первого типа (с ограничением на $\ell_p^{(N)}$ - норму) имеет представление:

$$\bar{U}_{TI}^0 = \frac{K_p}{\|\overleftarrow{g}_{TI}\|_p} \cdot \overleftarrow{g}_{TI} = \frac{K_p}{\|\overleftarrow{g}_{TI}\|_p} \cdot Colon[g_N, \ldots g_{N-\nu+1}, \ldots g_1] \in \ell_p^{(N)} .$$

Он доставляет функционалу (6) максимум, равный

$$x(T)_{1\max}^0 = 2\lambda_0 \cdot K_p \frac{\|\bar{g}_{TI}\|_2^2}{\|\bar{g}_{TI}\|_p} \qquad (p = 1, 2, \infty)$$

где

$$\|\overleftarrow{g}_{TI}\|_p = \left(\sum_{\nu=1}^{N} |g_{N-\nu+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{N} |g_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\bar{g}_{TI}\|_p \qquad (p = 1, 2, \infty)$$

есть гельдеровская $\ell_p^{(N)}$ - норма инверсного вектора $\overleftarrow{g}_{TI}$, совпадающая с такой же нормой векторного изображения $\bar{g}_{TI}$ ИПХ $g(t) \in L_p(0,T)$.

<u>Доказательство.</u>

Максимальное значение функционала (6), как скалярного произведения N – векторов $\bar{U}_{TI}$ и $\overleftarrow{g}_{TI}$, достигается, когда эти векторы совпадают по направлению. Поэтому оптимальный точечный вектор управления $\bar{U}_{TI}$ следует искать в виде $\bar{U}_{TI}^0 = \lambda \cdot \overleftarrow{g}_{TI}$ с вещественным положительным множителем λ, подлежащим определению. По условию задачи, для $\ell_p^{(N)}$ - нормы $\|\bar{U}_{TI}\|_p$ должно выполняться неравенство (7), которое, согласно Утверждению 1, для оптимального вектора $\bar{U}_{TI}^0$ заменяется равенством, поэтому будем иметь:

$$\|\bar{U}_{TI}^0\|_p = \lambda \cdot \|\overleftarrow{g}_{TI}\|_p = K_p \Rightarrow \lambda = \lambda_p = \frac{K_p}{\|\overleftarrow{g}_{TI}\|_p},$$

где

$$\|\overleftarrow{g}_{TI}\|_p = \left(\sum_{\nu=1}^{N} |g_{N-\nu+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{N} |g_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|\bar{g}_{TI}\|_p .$$

Таким образом, искомый оптимальный вектор управления $\bar{U}_{TI}^0$ получает представление

$$\bar{U}_{TI}^0 = \lambda \cdot \overleftarrow{g}_{TI} = \frac{K_p}{\|\overleftarrow{g}_{TI}\|_p} \cdot \overleftarrow{g}_{TI} = \frac{K_p}{\|\overleftarrow{g}_{TI}\|_p} \cdot Colon[g_N, \ldots g_{N-\nu+1}, \ldots g_1]$$

максимальное значение $x(T)_{1\max}^0$ функционала (6) будет равно

$$x(T)_{1\max}^0 = 2\lambda_0 \cdot \lambda_p(\overleftarrow{g}_{TI}, \overleftarrow{g}_{TI}) = 2\lambda_0 \cdot \frac{K_p}{\|\overleftarrow{g}_{TI}\|_p} \cdot \|\overleftarrow{g}_{TI}\|_2^2 = 2\lambda_0 \cdot \frac{K_p}{\|\bar{g}_{TI}\|_p} \cdot \|\bar{g}_{TI}\|_2^2 ,$$

где

$$\|\overleftarrow{g}_{TI}\|_2^2 = \sum_{\nu=1}^{N} g_{N-\nu+1}^2 = \sum_{k=1}^{N} g_k^2 = \|\bar{g}_{TI}\|_2^2 ,$$

есть квадраты совпадающих эвклидовых норм векторов $\overleftarrow{g}_{TI}$ и $\bar{g}_{TI}$.

<u>Утверждение 3</u>

Оптимальный точечный N – вектор управления $\bar{U}_{TI}^0$ релейного типа с $\ell_\infty^{(N)}$ - нормой, ограниченной величиной U_0, имеет представление:

$$\bar{U}_{TI}^0 = U_0 \cdot Colon[Sign\ g_N, \ldots Sign\ g_{N-\nu+1}, \ldots Sign\ g_1].$$

Он доставляет функционалу (6) максимум, равный

$$x(T)^0_{2\max} = 2\lambda_0 \cdot U_0 \cdot \|\mathcal{G}_{TI}\|_1 = 2\lambda_0 \cdot U_0 \cdot \|\bar{g}_{TI}\|_1,$$

где

$$\|\mathcal{G}_{TI}\|_1 = \sum_{\nu=1}^{N} |g_{N-\nu+1}| = \sum_{k=1}^{N} |g_K| = \|\bar{g}_{TI}\|_1,$$

одинаковые $\ell_1^{(N)}$ - нормы векторов $\mathcal{G}_{TI}$ и $\bar{g}_{TI}$.

Доказательство.

Максимально возможное значение функционалу

$$x(T) = 2\lambda_0 \cdot (\bar{U}_{TI}, \mathcal{G}_{TI}),$$

как скалярному произведению N – векторов $\bar{U}_{TI}$ и $\mathcal{G}_{TI}$, может доставить точечный вектор управления $\bar{U}_{TI}$ релейного типа с фиксированным значением своей $\ell_\infty^{(N)}$ - нормы лишь тогда, когда его координаты будут совпадать по знаку с соответствующими координатами вектора $\mathcal{G}_{TI}$. Геометрически это означает расположение векторов в одном ортанте N – мерного пространства (угол между ними окажется меньше $\frac{\pi}{2}$), что гарантирует положительность их скалярного произведения.

Таким образом, оптимальный точечный N – вектор управления $\bar{U}_{TI}$ следует искать в виде

$$\bar{U}^0_{TI} = \Lambda_N \cdot \mathcal{G}_{TI} = Colon[\lambda_1 g_N, \ldots \lambda_\nu g_{N-\nu+1}, \ldots \lambda_N g_1], \quad (11)$$

т.е. в виде линейного преобразования, осуществляемого диагональной матрицей

$$\Lambda_N = diag[\lambda_1, \ldots \lambda_\nu, \ldots \lambda_N]$$

с вещественными положительными компонентами.

Определим их из условия ограниченности $\ell_\infty^{(N)}$ - нормы вектора $\bar{U}_{TI}$, в соответствии с условиями рассматриваемой экстремальной задачи.

Ограниченность $\ell_\infty^{(N)}$ - нормы точечного N – вектора управления

$$\bar{U}_{TI} = Colon\left[U(t_1^{(N)}), \ldots U(t_\nu^{(N)}), \ldots U(t_N^{(N)})\right]$$

релейного типа означает выполнение N покомпонентных неравенств вида (10) и для искомого оптимального N – вектора (11), следовательно можем написать:

$$\left|U(t_\nu^{(N)})\right| = \lambda_\nu |g_{N-\nu+1}| \le U_0 \qquad (\nu = 1, N)$$

В силу Утверждения 1 для оптимального вектора неравенства переходят в равенства

$$\lambda_\nu \cdot |g_{N-\nu+1}| = U_0; \quad \forall \nu = \overline{1, N}$$

из которых и следуют представления для λ_ν:

$$\lambda_\nu = \frac{U_0}{|g_{N-\nu+1}|}; \qquad (\nu = \overline{1, N})$$

Подставляя в (11), будем иметь для оптимального вектора $\bar{U}^0_{TI}$ релейного типа

$$\bar{U}^0_{TI} = Colon\left[U_0 \cdot \frac{g_N}{|g_N|}, \ldots U_0 \cdot \frac{g_{N-\nu+1}}{|g_{N-\nu+1}|}, \ldots U_0 \cdot \frac{g_1}{|g_1|}\right] = \quad (12)$$
$$= U_0 \cdot Colon[Sign\, g_N, \ldots Sign\, g_{N-\nu+1}, \ldots Sign\, g_1]$$

т.к.

$$\frac{g_{N-\nu+1}}{|g_{N-\nu+1}|} = Sign\, g_{N-\nu+1} = \begin{cases} +1 & g_{N-\nu+1} > 0 \\ -1 & g_{N-\nu+1} < 0 \end{cases} \qquad (\nu = \overline{1,N})$$

(12) и есть доказываемое представление.

Для максимального значения функционала (6) получим:

$$\begin{aligned} x(T)^0_{2\max} &= 2\lambda_0 \cdot (\bar{U}^0_{TI}, \mathcal{G}_{TI}) = 2\lambda_0 \cdot (\Lambda_N \mathcal{G}_{TI}, \mathcal{G}_{TI}) = \\ &= 2\lambda_0 \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \lambda_\nu g^2_{N-\nu+1} = \\ &= 2\lambda_0 \cdot U_0 \cdot \sum_{\nu=1}^{N} \frac{g^2_{N-\nu+1}}{|g_{N-\nu+1}|} = 2\lambda_0 \cdot U_0 \cdot \sum_{\nu=1}^{N} |g_{N-\nu+1}| = \\ &= 2\lambda_0 \cdot U_0 \cdot \|\bar{g}_{TI}\|_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Один иллюстрированный пример. Рассмотрим простейший динамический объект с ПФ

$$W_g(p) = \frac{1}{p+\alpha}$$

и ИПХ

$$g(t) = e^{-\alpha t}; t \in (0, \infty)$$

Промежуток времени $(0,T]$, на котором будем рассматривать все задачи, определим как реальное время переходного процесса, получая

$$\alpha T = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{T}$$

и, следовательно, рассматривая ИПХ $g(t)$ как функцию переменной $\tau = \frac{t}{T}; \tau \in (0,1]$:

$$g(t) = g(T \cdot \tau) = e^{-\alpha T \tau} = e^{-3\tau}; \quad \tau \in (0,1]$$

Точечный изображающий N – вектор этой функции, ассоциированный с чебышевской N – сеткой I рода

$$\tau_k^{(N)} = \frac{2k-1}{2N} \qquad (k = \overline{1, N})$$

имеет явное представление:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{TI} &= Colon[g_1, \ldots g_k, \ldots g_N] = \\ &= Colon\left[e^{-3\tau_1^{(N)}}, \ldots e^{-3\tau_k^{(N)}}, \ldots e^{-3\tau_N^{(N)}}\right] \end{aligned}$$

Экспонента $e^{-3\tau}$, как монотонно убывающая на [0,1] функция, вполне информативно может быть представлена точечным изображающим N – вектором при сравнительно небольших N.

Положим N=6, тогда компоненты вектора $\bar{g}_{TI}$ явно определятся как величина:

$$g_k = e^{-3\tau_k^{(N)}} = e^{-3 \cdot \frac{2k-1}{2N}} = e^{-3 \cdot \frac{2k-1}{12}} = e^{-\frac{2k-1}{4}} \qquad (k = \overline{(1,6)})$$

Эти величины приближённо могут быть найдены непосредственно по ПФ $W_g(p) = \frac{1}{p+\alpha}$, используя разработанную методику обращения преобразования Лапласа, описанную в [1].

В частности для рассматриваемой простейшей ПФ найдено

$$g_K = g(T\tau_k^{(N)}) \approx \frac{1}{1+\alpha\lambda_0}\left(\frac{1-\alpha\lambda_0}{1+\alpha\lambda_0}\right)^{k-1} \qquad (k=\overline{1,N}).$$

При $\alpha T = 3$ и $N = 6$ получим

$\alpha\lambda_0 = \alpha \cdot \dfrac{T}{2N} = \dfrac{3}{2N} = \dfrac{1}{4}$ и, следовательно, окажется

$$g_k \approx \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \qquad (k=\overline{1,6}).$$

Таблица 1 дает представление о точности приближённой формулы

Можно видеть, что относительная погрешность более высокая для первых k, не превышает 2,5%. Итак, точечный вектор $\bar{g}_{TI}$ при принятых значениях параметров имеет представление

$$\bar{g}_{TI} = Colon\left[g_1,\ldots g_k,\ldots g_N\right] = Colon\left[e^{-\frac{1}{4}},\ldots e^{-\frac{2k-1}{4}},\ldots e^{-\frac{11}{4}}\right].$$

Он является и элементным вектором теплицевой матрицы $g(Z)(6\times6)$:

$$g(Z) = \sum_{k=1}^{6} g_K \cdot Z^{k-1} = \begin{bmatrix} g_1 & & & & & \\ g_2 & g_1 & & & & \\ . & . & . & & & \\ g_k & . & g_2 & g_1 & & \\ \vdots & \ddots & . & . & \ddots & \\ g_N & \ldots & g_k & \ldots & g_2 & g_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-1/4} & & & & & \\ e^{-3/4} & e^{-1/4} & & & & \\ . & . & . & & & \\ e^{-\frac{2k-1}{4}} & \ldots & e^{-3/4} & e^{-1/4} & & \\ \vdots & \ddots & & . & . & \\ e^{-11/4} & \ldots & e^{-\frac{2k-1}{4}} & \ldots & e^{-3/4} & e^{-1/4} \end{bmatrix}$$

Для инверсного точечного вектора $\check{g}_{TI}$, очевидным образом, получим:

$$\check{g}_{TI} = g(Z)^{+} \cdot \bar{e}_N = Colon\left[e^{-\frac{11}{4}},\ldots e^{-\frac{13-2\nu}{4}},\ldots e^{-\frac{1}{4}}\right]$$

ℓ_p^6 - нормы векторов $\bar{g}_{TI}$ и $\check{g}_{TI}$ одинаковы и представляются формулой:

$$\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_p = \left\|\check{g}_{TI}\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{6} e^{-p\frac{2k-1}{4}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{4}}\left(\sum_{k=1}^{6}\left(e^{-\frac{p}{2}}\right)^{k-1}\right)^{\frac{1}{p}} = e^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1-e^{-3p}}{1-e^{-\frac{p}{2}}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

При частных значениях p=1, 2 и ∞ будем иметь:

$$\left.\begin{array}{lr} \left\|\bar{g}_{TI}\right\|_1 = e^{-\frac{1}{4}}\dfrac{1-e^{-3}}{1-e^{-\frac{1}{2}}} = 0{,}779\cdot\dfrac{1-0{,}0498}{1-0{,}6065} = 1{,}88; & \text{а)} \\ \left\|\bar{g}_{TI}\right\|_2 = e^{-\frac{1}{4}}\left(\dfrac{1-e^{-6}}{1-e^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}779\cdot1{,}257 = 0{,}979; & \text{б)} \\ \left\|\bar{g}_{TI}\right\|_\infty = e^{-\frac{1}{4}} = 0{,}779. & \text{в)} \end{array}\right\} (14)$$

Оптимальное управление $U^0(t)\xrightarrow{T_I}\bar{U}^0_{TI}$ из ℓ_p^6 ограничена по норме величиной K_p и, следовательно, получает вид:

$$\bar{U}^0_{TIp} = \frac{K_p}{\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_p}\cdot\check{g}_{TI} = \frac{K_p}{\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_p}\cdot Colon\left[e^{-\frac{11}{4}},\ldots e^{-\frac{13-2\nu}{4}},\ldots e^{-\frac{1}{4}}\right]$$

Это управление, «разгоняя объект» по кривой $x^0(t)$, за время T выводит его на максимально возможный уровень, равный

$$x(T)^0_{\max.p} = 2\lambda_0\cdot K_p\frac{\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_2^2}{\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_p} = 2\lambda_0\cdot\frac{K_p}{\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_p}\cdot 0.958 \quad (15)$$

При этом точечный изображающий вектор $\bar{X}_{TIIp}$ функции $x^0(t)\ t\in[0,T]$ (кривой «разгона»), ассоциированный с чебышевской сеткой II рода, определится по точечной модели объекта формулой (13):

$$x^0(t)_p \xrightarrow{T_{II}} \bar{X}_{TIIp} = 2\lambda_0 g(Z)\cdot\bar{U}^0_{TIp} = 2\lambda_0\frac{K_p}{\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_p}\cdot g(Z)\cdot\check{g}_{TI}$$

Поставляя в (15) численные значения (14) ℓ_p^6 - норм при указанных частных значениях показателя p, получим

$$\left.\begin{array}{lr} x(T)^0_{\max.1} = 2\lambda_0\cdot K_1\dfrac{0{,}958}{\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_1} = 2\lambda_0 K_1\cdot\dfrac{0{,}958}{1{,}88} = 2\lambda_0 K_1\cdot 0.509; & \text{а)} \\ x(T)^0_{\max.2} = 2\lambda_0\cdot K_2\dfrac{\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_2^2}{\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_2} = 2\lambda_0 K_2\cdot\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_2 = 2\lambda_0 K_2\cdot 0{,}979; & \text{б)} \\ x(T)^0_{\max.\infty} = 2\lambda_0\cdot K_\infty\dfrac{0{,}958}{\left\|\bar{g}_{TI}\right\|_\infty} = 2\lambda_0 K_\infty\cdot\dfrac{0{,}958}{0{,}775} = 2\lambda_0 K_\infty\cdot 1{,}229; & \text{в)} \end{array}\right\} (16)$$

Если постоянную K_p, ограничивающую ℓ_p - нормы управления, принять равной K – одинаковой для всех p = 1, 2 и ∞, то из всех максимумов (16) наибольшим окажется $X(T)^0_{\max\,\infty}$, соответствующий значению $p=\infty$.

Это связано с тем фактом, что из всех векторов управления $\bar{U}^0_{TIP}$ вектор $\bar{U}^0_{TI\infty}$ имеет наибольшую максимальную координату, равную

Таблица 1

k	1	2	3	4	5	6
$e^{-\frac{2k-1}{4}}$	0,7790	0,4724	0,2865	0,1718	0,1054	0,064
$\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1}$	0,8	0,48	0,288	0,1728	0,1037	0,062

$$\frac{K_\infty}{\|\bar{g}_{TI}\|_\infty}\cdot e^{-\frac{1}{4}} = K_\infty = K\,.$$

Можно видеть также, что коэффициент $2\lambda_0 \dfrac{K_p}{\|\bar{g}_{TI}\|_p}$ в представлении для вектора $\bar{X}_{TIIP}$ при сделанных предположениях окажется наибольшим при $p=\infty$.

В силу положительности ИПХ в данном примере $\left\{g(t)=e^{-3t};\ t\in[0,T]\right\}$, более простая ситуация складывается при оптимальном управлении релейного типа. В этом случае, точечный изображающий вектор управления, согласно Утверждению 3, получает представление

$$\bar{U}^0_{TI} = U_0 Colon[1,\ldots 1,\ldots 1] = U_0\bar{1}_T\,, \qquad (17)$$

т.к.

$$sign g_{N-\nu+1} = sign g_{7-\nu} = sign\left(e^{-\frac{13-2\nu}{4}}\right) = 1 \quad (\nu=\overline{1,6})\,.$$

Это управление доставляет максимум конечному значению кривой «разгона» $x^0(t);\ t\in[0,T]$, который согласно утверждению 3, будет равен

$$x^0(t)_{2\max} = 2\lambda_0 U_0\|\bar{g}_{TI}\|_1 = 2\lambda_0 U_0\cdot\sum_{k=1}^{6} e^{-\frac{2k-1}{4}} = 2\lambda_0 U_0\cdot 1{,}88\,.$$

Очевидно, оптимальное управление $U_0(t)$, как функция времени, соответствующая точечному изображению (17) окажется ступенчатой функцией: $U_0(t)=U_0\cdot 1(t)\ \ t\in[0,T]$, поэтому кривая «разгона» $x^0(t);\ t\in[0,T]$ будет отличаться от переходной характеристики

$$h^0(t)=\int_0^t g(\xi)d\xi$$

лишь масштабным множителем U_0.

Действительно в нашем случае

$$h^0(t)=h^0(T\tau)=\int_0^t e^{-\alpha\xi}d\xi=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) = \\ =\frac{T}{\alpha T}(1-e^{-\alpha T\tau})=\frac{T}{3}(1-e^{-3\tau}),$$

т.к. $\dfrac{T}{2N}=\lambda_0=\dfrac{T}{12}$ то $\dfrac{T}{3}=4\lambda_0$ и окончательно получим

$$h^0(t)=h^0(T\tau)=4\cdot(1-e^{-3\tau}) \quad (\tau\in[0,1])$$

и, следовательно, окажется

$$x^0(t)=U_0h^0(t)=4\cdot\lambda_0U_0(1-e^{-3\tau})=x^0(T\tau) \quad (\tau\in[0,1])$$

точечное изображение $\bar{X}^0_{TII}$ кривой $x^0(t)$, определяемое по точечной модели связи «вход-выход», в нашем случае получаем представление:

$$\bar{X}^0_{TII} = 2\lambda_0 g(Z)\cdot\bar{U}^0_{TI} =$$

$$= 2\lambda_0U_0\begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{4}} & & & & & \\ e^{-\frac{3}{4}} & e^{-\frac{1}{4}} & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ e^{-\frac{2k-1}{4}} & \cdots & e^{-\frac{3}{4}} & e^{-\frac{1}{4}} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ e^{-\frac{11}{4}} & \cdots & e^{-\frac{2k-1}{4}} & \cdots & e^{-\frac{3}{4}} & e^{-\frac{1}{4}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} =$$

$$= 2\lambda_0U_0\begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{4}} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^{k} e^{-\frac{2\nu-1}{4}} \\ \vdots \\ \sum_{\nu=1}^{6} e^{-\frac{2\nu-1}{4}} \end{bmatrix}$$

т.е. k-ая координата вектора $\bar{X}^0_{TII}$ приближенно представится в виде

$$\tilde{x}^0(t_k^{(6)})=\tilde{x}^0\left(T\frac{k}{6}\right)=2\lambda_0U_0\sum_{\nu=1}^{k}e^{-\frac{2\nu-1}{4}} \quad (k=\overline{1,6})\,.$$

Точные значения этих величин, определяемые как ординаты функции $x^0(t)$ в узлах сетки $\tau_k^{(6)}=\dfrac{k}{6}$ $(k=\overline{1,6})$ будут равны

$$x^0(t_k^{(6)})=x^0\left(T\frac{k}{6}\right)=4\cdot\lambda_0U_0(1-e^{-\frac{k}{2}}) \quad (k=\overline{1,6})\,.$$

Сравним между собой численные значения величин

$$\frac{x^0(t_k^{(6)})}{4\cdot\lambda_0U_0}=(1-e^{-\frac{k}{2}}) \ \text{ и } \ \frac{\tilde{x}^0(t_k^{(6)})}{4\lambda_0U_0}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{k}e^{-\frac{2\nu-1}{4}}$$

при всех $k=\overline{1,6}$.Результаты расчетов представлены в таблице2. Можно видеть, что относительная погрешность приближенных значений не превышает 1,5%. В заключении отметим следующий факт. Оптимальное управление релейного типа, а в нашем случае это управление $\bar{U}^0_{TI}$ (17), которое, как уже отмечалось, принадлежит ℓ^6_∞, поэтому оно, как и управление $\bar{U}^0_{TI\infty}$ обладает указанными экстремальными свойствами в отношении кривой $x^0(t)$, причем более сильными, чем управление $\bar{U}^0_{TI\infty}$. Дело в том, что если управление $\bar{U}^0_{TI\infty}$ имеет лишь одну наибольшую координату, равную K, то управление $\bar{U}^0_{TI}$ (17) имеет все координаты равные этой величине.

Таблица 2

k	1	2	3	4	5	6
$(1-e^{-\frac{k}{2}})$	0,3937	0,6321	0,7769	0,8647	0.918	0,9502
$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{k} e^{-\frac{2\nu-1}{4}}$	0,3895	0,6257	0,7689	0,8546	0,9075	0,9395

Кроме описанного частного случая экстремальной задачи терминального управления устойчивыми динамическими объектами были рассмотрены и решены более сложные (общие) случаи оптимального управления релейного типа, а также решена задача о максимальном быстродействии.

Литература

1. Осипов, В. М. Моделирование линейных динамических систем методом точечных представлений / В. М. Осипов, В. В. Осипов. - М. : МАКС Пресс, 2005. – 296 с.