УДК 519.71:62.50

*В.В. Осипов, В.А. Овинников**

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

В статье решается задача Коши для дифференциально-разностного уравнения методом точечных представлений, использующим точечное представлений функций и оператора интегрирования в узлах чебышевской сетки первого рода.

Ключевые слова: метод точных представлений, точечное моделирование, метод изображающих векторов

1.Введение

Дифференциально-разностные уравнения запаздывающего типа (уравнения с запаздывающим аргументом) составляют особый класс уравнений, теория которых заметно отличается от теории соответствующих дифференциальных уравнений без запаздывания.

Отличие прежде всего связано с тем принципиальным фактом, что будущее протекание процесса, как решение уравнения с запаздыванием, зависит не только от настоящего, но и от прошлого.

Так, начальная задача (задача Коши) для дифференциального уравнения с постоянным запаздыванием на величину $t_з$ требует для своего решения при $t \geq 0$ не только знание начальных условий в точке t=0 (как для уравнений без запаздывания), но еще и полную информацию о некоторой начальной функции $\phi\,(t)$ и ее производных, определенных «в прошлом» – на отрезке [-$t_з$,0]. Таким образом, требуется знание начальных условий не в одной точке t=0, а на множестве точек [-$t_з$,0] из прошлого. Это множество называется начальным[4].

Дифференциально-разностные уравнения с запаздыванием при нулевых начальных условиях возникают, в частности, при исследовании динамики САР, имеющей звено чистого запаздывание в цепи обратной связи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим начальную задачу для линейного дифференциально-разностного уравнения с запаздывающим аргументом n-го порядка:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n-\nu} + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu} \frac{d^\nu y(t-t_з)}{dt^\nu} = x(t); \quad t \geq 0 \tag{1}$$

Эта задача, естественно, связана с заданием на $[-t_з\ ,0]$ некоторой непрерывной и (n-1) раз дифференцируемой функции ϕ(t) $t \in [-t_з\ ,0]$ для которой должны выполняться равенства:

$$\phi^{(\nu)}(t-t_з) = y^{(\nu)}(t-t_з) \quad (\nu = \overline{0,(n\text{-}1)}\,) \quad t \in [0\ ,t_з] \tag{2}$$

и, в частности, при t = $t_з$ должно быть:

$$\phi^{(\nu)}(0) = y^{(\nu)}(0) = y_0^\nu \qquad (\nu = \overline{0,(n-1)}\,) \tag{3}$$

где y_0^ν $(\nu = \overline{0,n-1})$ - заданные начальные условия, как значения (правых) производных функций $y(t)$ в точке t=0. Можно предполагать начальную функцию $\phi\,(t)$ нашей задачи в виде отрезка степенного ряда, функции $y(t)$ в окрестности точки t=0, определенного и для отрицательных значений аргумента из промежутка $[-t_з\ ,0]$:

$$\phi(t) = y_0 + y_0' t + \frac{y_0''}{2!}t^2 + \frac{y_0'''}{3!}t^3 + \ldots \ldots + \frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!}t^{(n-1)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!}t^k \tag{4}$$

Тогда, очевидным образом, будут выполняться равенства (2) и (3), как необходимые и определяющие условия для начальной функции $\phi\,(t)$. Функция (4) есть прошлое процесса y(t), настоящее и будущее которого описывается уравнением (1) при t ≥0. Будем искать решение поставленной задачи в виде процесса $\overset{0}{y}(t)$, совпадающего с процессом $y(t)$ при t ≥0, но не имеющею явной связи с „прошлым”, однако, учитывающего его влияние через добавление к правой части уравнения (1) некоторой функции, определяемой заданной начальной функцией (4). Речь идет о функции $\overset{0}{y}(t)$, со следующими свойствами:

$$\overset{0}{y}{}^{(\nu)}(t) = \begin{cases} y^{(\nu)}(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad (\nu = \overline{0,(n-1)}) \tag{5}$$

и

$$\overset{0}{y}{}^{(\nu)}(t-t_з) = \begin{cases} y^{(\nu)}(t-t_з) & t \geq t_з \\ 0 & t < t_з \end{cases} \qquad (\nu = \overline{0,(n-1)}) \tag{6}$$

* - автор, с которым следует вести переписку.

причем имеются в виду правые производные функций при нулевых значениях их аргументов. Предполагаемое решение $\overset{0}{y}(t)$ удовлетворяет следующему уравнению при $t \geq 0$:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n-\nu} \overset{0}{y}{}^{(\nu)}(t) + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu} y^{(\nu)}(t-t_з) = \\ = x(t) + f(\phi; t); \quad a_0 = 1, \tag{7}$$

где $f(\phi;\ t)$ — некоторая функция, определяемая начальной функцией (4) и параметрами дифференциального уравнения (1), связанными с запаздыванием. Определим явно эту функцию.

Учитывая сказанное, запишем решение поставленной задачи (1), определенной на $[-t_з, \infty]$ в следующем виде:

$$Y(t) = E(t_з, t)\phi(t) + 1(t)\overset{0}{y}(t) = \begin{cases} \phi(t) & t \in [-t_з, 0] \\ \overset{0}{y}(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

где $E(t_з, t) = 1(t + t_з) - 1(t) = \begin{cases} 1 & t \in (-t_з, 0) \\ 0 & t \notin [-t_з, 0] \end{cases}$

есть единичный импульс („окно") длительностью $t_з$, расположенный на отрезке $[-t_з, 0]$.

Символом $1(\bullet)$ обозначены единичные функции:

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}; \quad 1(t + t_з) = \begin{cases} 1 & t > t_з \\ 0 & t < t_з \end{cases}$$

Для производных функций $y(t)$, имея в виду производные в интервалах $(-t_з, 0)$ и $(0, \infty)$ для составляющих эту функцию, будем иметь

$$y^{(\nu)}(t) = E(t_з, t)\phi^{(\nu)}(t) + 1(t)\overset{0}{y}{}^{(\nu)} \\ (t) = \begin{cases} \phi^{(\nu)}(t) & t \in (-t_з, 0) \quad (\nu = 1, (n-1)) \\ y^{(\nu)}(t) & t > 0 \quad (\nu = 1, (n-1)) \end{cases} \quad \phi^{(n)}(t) = 0 \tag{8}$$

со стыковкой односторонних производных в точке t=0

$$\phi^{(\nu)}(t)_{t=-0} = \phi^{(\nu)}(0) = \overset{0}{y}{}^{(\nu)}(0) = \overset{0}{y}{}^{(\nu)}(t)_{t=+0} \\ (\nu = \overline{1, (n-1)}) \tag{9}$$

При запаздывании аргумента на величину $t_з$, все составные функции в (8) сместятся вправо по оси t на ту же величину, занимая только положительную полуось $[0, \infty)$:

$$y^{(\nu)}(t-t_з) = E(t_з; t-t_з)\phi^{(\nu)}(t-t_з) + \\ +1(t-t_з)\overset{0}{y}{}^{(\nu)}(t-t_з) = \\ = \begin{cases} \phi^{(\nu)}(t-t_з) & t \in [0, t_з) \\ y^{(\nu)}(t-t_з) & t > t_з \end{cases} \quad (\nu = \overline{1, (n-1)}) \tag{10}$$

Подставляя (8) и (10) в (1), получим при $t \geq 0$:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} \overset{0}{y}{}^{(\nu)}(t) + E(t_з; t-t_з)\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu}\phi^{(\nu)}(t-t_з) + \\ +\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu} \overset{0}{y}{}^{(\nu)}(t-t_з) = x(t)$$

или в форме (7):

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} \overset{0}{y}{}^{(\nu)}(t) + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu} \overset{0}{y}{}^{(\nu)}(t-t_з) = x(t) - \\ -E(t_з; t-t_з)\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu}\phi^{(\nu)}(t-t_з) \tag{11}$$

Таким образом, добавочная функция $f(\phi; t)$ в правой части уравнения (7) имеет вид

$$f(\phi; t) = -E(t_з; t-t_з)\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu}\phi^{(\nu)}(t-t_з) \qquad t \in [0, t_з]$$

и представляет собой финитную функцию с интервалом финитности $(0, t_з)$. Итак, $y(t)$ – решение начальной задачи (1) с „предысторией" $\phi(t)$ $t \in [-t_з, 0]$, при $t \geq 0$ совпадает с функцией y(t), не имеющей „предыстории", согласно условиям (5) и (6), и являющейся решением задачи Коши для преобразованного уравнения (11) с начальными условиями (9) и измененной правой частью, учитывающей „предысторию" процесса $y(t)$.

В силу сказанного и тождественных равенств (5) и (6) целесообразно отказаться от „нулевой" отметки в обозначениях функции $\overset{0}{y}(t)$ и ее производных. Тогда, поставленная начальная задача для уравнения (1) окажется эквивалентной при $\forall\, t \geq 0$ следующей задаче Коши для преобразованного уравнения (11) в прежних обозначениях:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu} y^{(\nu)}(t) + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu} y^{(\nu)}(t-t_з) = x(t) - \\ -E(t_з; t-t_з)\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu}\phi^{(\nu)}(t-t_з), \tag{12}$$

с чистым запаздыванием

$$y^{(\nu)}(t-t_з) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t < t_з) \\ y^{(\nu)}(t-t_з) & t > t_з \end{cases}, \\ (\nu = 1, (n\text{-}1)) \tag{13}$$

и финитной добавочной функцией

$$E(t_з; t-t_з)\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu}\phi^{(\nu)}(t-t_з) = \\ = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu}\phi^{(\nu)}(t-t_з) & t \in (0, t_з) \\ 0 & t \notin [0, t_з] \end{cases} \tag{14}$$

в правой части уравнения, определенной заданной начальной функции ϕ(t), ее производными членов с запаздыванием.

Известный пошаговый метод решения указанной задачи при таком преобразовании реализуется естественным образом. Этот подход может быть использован для преобразования начальных задач в задаче Коши и для более сложных линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Преобразованную таким образом задачу предлагается решить методом точечных представлений, хорошо приспособленным для описания запаздывания и решения подобных задач.

3.Метод решения

При практической реализации пошагового метода решения начальных задач даже в простейших случаях имеет место все возрастающая сложность и громоздкость возникающих задач Коши на промежутках, которыми разбивается отрезок $[0,T]$.

Здесь весьма перспективным является метод точечных представлений, позволяющий перейти от заданной линейной задачи к ее гомоморфной конечномерной модели в пространстве точечных представлений, в частности, оказывается весьма эффективным как метод решения начальных задач для линейных дифференциально–разностных уравнений с постоянным запаздыванием, предварительно преобразованных в эквивалентные задачи Каши. Метод автоматически реализует пошаговый подход, причем без разбиения отрезка $[0,T]$ на промежутки, связанные с запаздыванием.

Дело в том, что в основе точечно–матричных представлений наиболее важных операторов, в частности оператора интегрирования, лежит каноническая матрица (правого) сдвига Z ($N\times N$), реализующая сдвиг всех N отсчетов $\left\{y(\tau_\nu^{(N)})\right\}$ изображаемой финитной функции $y(\tau)$, как компонент ее точечного N – вектора

$$Y_T = Colon\left[y(\tau_1^{(N)}),\dots y(\tau_\nu^{(N)}),\dots y(\tau_N^{(N)})\right],$$

на один шаг в право, что дает точечный изображающий N – вектор финитной функции $y(\tau-\frac{1}{N})$ с запаздывающим аргументом на величину $\tau_з=\frac{1}{N}$, равную расстоянию между узлами чебышевской N – сетки :

$$y(\tau-\frac{1}{N})\xrightarrow{T_N} Z\cdot Y_T = \\ = Colon\left[0, y(\tau_1^{(N)}),\dots y(\tau_{\nu-1}^{(N)}),\dots y(\tau_{N-1}^{(N)})\right]$$

При таком сдвиге последний отсчет $y(\tau_N^{(N)})$ функции $y(\tau)$ выходит за пределы промежутка $[0,1]$. Запаздывание на величину $\tau_з$, равную рациональному числу $\frac{m}{N}$ $(m=1,2,\dots N-2)$, означает умножение точечного изображающего N – вектора Y_T на m – ю степень матрицы Z:

$$y(\tau-\frac{m}{N})\xrightarrow{T_N} Z^m\cdot Y_T = \\ = Colon\left[\underbrace{0,\dots 0}_{m}, y(\tau_1^{(N)}),\dots y(\tau_{N-m}^{(N)})\right] \quad (15)$$

что, как видим, эквивалентно сдвигу вправо на m шагов всей “гребенки” отсчетов из m отсчетов $\left\{y(\tau_\nu^{(N)})\right\}$ функции $y(\tau)$, при этом за пределами “финитного окна” промежутка $[0,1]$ оси “τ” окажутся m последних отсчетов, а на месте m первых отсчетов окажутся нули.

Естественным образом определяется и изображающий N – вектор результата (вольтерровского) интегрирования функции $y(\tau-\frac{m}{N})$:

$$J_T\cdot y(\tau-\frac{m}{N}) = T\int_0^\tau y(\tau-\frac{m}{N})d\tau \xrightarrow{T_N} TJ_T\cdot Z^m Y_T = \\ = \lambda_0\frac{E+Z}{E-Z}Z^m\cdot Y_T \quad (16)$$

что легко обобщается на ν - кратное интегрирование:

$$J_\tau^\nu\cdot y(\tau-\frac{m}{N}) = T^\nu\underbrace{\int_0^\tau\cdots\int_0^\tau}_{\nu\ раз} y(\tau-\frac{m}{N})d\tau^\nu \xrightarrow{T_N} \left(TJ_T\right)^\nu\cdot Z^m Y_T = \\ = \lambda_0^\nu\frac{\left(E+Z\right)^\nu}{\left(E-Z\right)^\nu}Z^m\cdot Y_T$$

Для иллюстрации работы метода точечных представлений рассмотрим сперва простейшую начальную задачу на отрезке $[0,T]$:

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)+by(t-t_з)=x(t); \\ \phi(0)=y(0)=y_0;\quad t\in[0,T] \quad (17)$$

Преобразуем ее в эквивалентную задачу Коши. В данном частном случае начальная функция $\varphi(t)$ есть постоянная, равная заданному начальному значению y_0:

$$\varphi(t)=\varphi(0)=y_0;\quad t\in[-t_з,0],$$

поэтому на $[0,T]$ получаем следующую задачу Коши

$$\frac{dy(t)}{dt}+a\cdot y(t)+b\cdot y(t-t_з)= \\ = x(t)-b\cdot E(t_з;t-t_з)\cdot y_0;\quad y(0)=y_0 \quad , \quad (18)$$

где добавочная функция в правой части есть “финитное окно” промежутка $[0,t_з]$ высотой y_0:

$$E(t_з;t-t_з)\cdot y_0 = \left[1(t)-1(t-t_з)\right]y_0 = \begin{cases} y_0 & t\in(0,t_з) \\ 0 & t\notin[0,t_з] \end{cases},$$

а функция $y(t-t_з)$ с запаздывающим аргументом есть чистое запаздывание на величину $t_з$:

$$y(t-t_з)=\begin{cases} y(t-t_з) & t_з\le t\le T \\ 0 & t< t_з \end{cases}$$

Сделаем замену переменного, полагая $t=T\tau$; $\tau\in[0,1]$; $t_з=T\tau_з$ и не указывая параметр T в обозначениях функций:

$$y(t) = y(T\tau) = y(\tau); \qquad x(t) = x(\tau); \qquad \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{T}\cdot\frac{dy(\tau)}{d\tau};$$

$$E(t_з; t - t_з)\cdot y_0 = \left[1(\tau) - 1(\tau - \tau_з)\right] y_0 = \begin{cases} y_0 & \tau \in (0, \tau_з) \\ 0 & \tau \notin [0, \tau_з] \end{cases}$$

$$y(t - t_з) = y(\tau - \tau_з) = \begin{cases} y(\tau - \tau_з) & \tau_з \le \tau \le 1 \\ 0 & \tau < \tau_з < 1 \end{cases}.$$

Задача (18) получает вид:

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{dy(\tau)}{d\tau} + a\cdot y(\tau) + b\cdot y(\tau - \tau_з) =$$
$$= x(\tau) - b\cdot\left[1(\tau) - 1(\tau - \tau_з)\right]\cdot y_0; \quad y(0) = y_0$$

Воздействуем на обе стороны уравнения (вольтерровским) оператором интегрирования

$$T\cdot J_\tau \to T\cdot\int_0^\tau (\bullet)\, d\tau$$

и получаем, что

$$J_\tau\cdot\frac{1}{T}\frac{dy(\tau)}{d\tau} = \int_0^\tau \frac{dy(\tau)}{d\tau}\, d\tau = y(\tau) - y(0) = y(\tau) - y_0.$$

В результате будем иметь интегральное уравнение

$$y(\tau) + a\cdot T\int_0^\tau y(\tau)d\tau + b\cdot T\int_0^\tau y(\tau - \tau_з)d\tau =$$

$$= T\int_0^\tau x(\tau)d\tau - b\cdot T\int_0^\tau \left[1(\tau) - 1(\tau - \tau_з)\right]\cdot y_0 d\tau.$$

Перейдем теперь к соответствующему уравнению для точечных N – векторных изображений, ассоциированных с чебышевской N – сеткой. При этом заданную величину постоянного запаздывания $\tau_{з.}$ заменим ближайшим рациональным числом $\frac{m}{N}$ (m – натуральное число) ($m \le N$-2). Учитывая (16), а также точечное представление

$$T\int_0^\tau \left[1(\tau) - 1(\tau - \tau_з)\right]\cdot y_0 d\tau \xrightarrow{T_N} TJ_T(E - Z^m)y_0 1_T,$$

где 1_T есть точечная единица

$$1_T = Colon\left[1, \ldots 1, \ldots 1\right], \text{получим:}$$

$$Y_T + a\cdot TJ_T Y_T + b\cdot TJ_T\cdot Z^m\cdot Y_T =$$
$$= TJ_T\cdot X_T - TJ_T\cdot b(E - Z^m)y_0 1_T + y_0 1_T.$$

Подставим сюда вместо точечной матрицы интегрирования TJ_T ее известное представление через каноническую матрицу сдвига Z:

$$TJ_T = \lambda_0\cdot\frac{E + Z}{E - Z} = \lambda_0\cdot(E - Z)^{-1}\cdot(E + Z);$$
$$\lambda_0 = \frac{T}{2N},$$

после чего умножим все члены уравнения на не вырожденную P – матрицу

$$E - Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (N\times N)$$

и учтем тождество $(E - Z)\cdot 1_T = e_1 = Colon\left[1, 0, \ldots 0\right]$. В результате будем иметь:

$$\left[(E - Z) + a\lambda_0(E + Z)\right]Y_T + b\lambda_0(E + Z)\cdot Z^m\cdot Y_T =$$
$$= \lambda_0(E + Z)X_T - \lambda_0 b(E + Z)(E - Z^m) + y_0 1_T(E - Z)$$

или

$$\begin{aligned}&(h_0^{(1)}E + h_1^{(1)}Z)Y_T + b\lambda_0(E + Z)\cdot Z^m\cdot Y_T = \\ &= \lambda_0(E + Z)\left[X_T - y_0 b\cdot e(m)\right] + y_0 e_1\end{aligned}, \qquad (19)$$

где

$$h_0^{(1)} = a\lambda_0 + 1; \qquad h_1^{(1)} = a\lambda_0 - 1,$$

а символом $e(m)$ обозначен N – вектор

$$e(m) = (E - Z^m)\cdot 1_T = Colon\left[\underbrace{1, \ldots 1}_{m}, 0, \ldots 0\right],$$

у которого m первых координат – единицы, а остальные N-m координат нули.

В подробной записи, учитывая (15), получим систему из N рекуррентных скалярных равенств:

$$\left.\begin{array}{l} h_0^{(1)}y_1 = \lambda_0\cdot(x_1 - by_0) + y_0; \\ h_1^{(1)}y_1 + h_0^{(1)}y_2 = \lambda_0\cdot(x_1 + x_2 - 2by_0); \\ h_1^{(1)}y_2 + h_0^{(1)}y_3 = \lambda_0\cdot(x_2 + x_3 - 2by_0); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_1^{(1)}y_{m-1} + h_0^{(1)}y_m = \lambda_0\cdot(x_{m-1} + x_m - 2by_0); \\ h_1^{(1)}y_m + h_0^{(1)}y_{m+1} + b\lambda_0 y_1 = \lambda_0\cdot(x_m + x_{m+1} - by_0); \\ h_1^{(1)}y_{m+1} + h_0^{(1)}y_{m+2} + b\lambda_0(y_1 + y_2) = \lambda_0\cdot(x_{m+1} + x_{m+2}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_1^{(1)}y_{m+k} + h_0^{(1)}y_{m+k+1} + b\lambda_0(y_k + y_{k+1}) = \lambda_0\cdot(x_{m+k} + x_{m+k+1}); \quad (k = \overline{1, N\text{-}m\text{-}1}). \end{array}\right\}(20)$$

Из этой системы, последовательно и буквально “вручную”, могут быть определены все компоненты $y_\nu = y(\tau_\nu^{(N)})$ $(\nu = \overline{1, N})$ неизвестного точечного N – вектора Y_T приближенного решения начальной задачи (17).

В качестве некоторой иллюстрации высокой эффективности метода найдем компоненты точечных N – векторов Y_T приближенных решений начальных задач.

$$\begin{aligned}&\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t - t_з) = 20\cdot 1(t) \\ &(0 \le t \le 0,5); \quad \phi(t) = \phi(0) = y_0 = 0\end{aligned}. \qquad (21)$$

и

$$\begin{aligned}&\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t - t_з) = 20\cdot 1(t) \qquad t \in [0, 0,5]; \\ &\phi(t) = \phi(0) = y_0 = 1; \quad t \in [-t_з, 0]\end{aligned} \qquad (22)$$

Это простейший частный случай начальной задачи (17) возникающей при T=0,5сек.; a=0; b=10; $x(\tau)$=201(τ); $t_{з.}$=0,1сек. Примем N=10, тогда

$$\lambda_0 = \frac{T}{2N} = \frac{1}{40} = 0,025$$

и $\frac{m}{N} = \tau_з = \frac{t_з}{T} = 0,2 = \frac{2}{10} \Rightarrow m = 2;\ h_0^{(1)} = 1;\ h_1^{(1)} = \text{-}1$

При таких значениях параметров задачи система рекуррентных равенств (20) приобретает вид:

Таблица1.

$t_\nu^{(10)}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{5}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{13}{40}$	$\frac{15}{40}$	$\frac{17}{40}$	$\frac{19}{40}$
$y(t_\nu^{(10)})$	0.5	1,5	2,437	2,937	2,943	2,578	2,088	1,097	1,531	1,675
$y(t_\nu^{(10)})$	1,25	1,75	2,219	2,468	2,471	2,289	2,044	1,848	1,765	1,796
y_ν	0.5	1,5	2,375	2,875	2,906	2,593	2,18	1,804	1,611	1,615
y_ν	1,25	1,75	2,187	2,437	2,453	2,296	2,074	1,886	1,794	1,803

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{4}(2-y_0)+y_0 \\ -y_1+y_2=\frac{1}{2}(2-y_0) \\ -y_2+y_3+\frac{1}{4}y_1=\frac{1}{4}(4-y_0) \\ -y_3+y_4+\frac{1}{4}(y_1+y_2)=1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -y_{\nu-1}+y_\nu+\frac{1}{4}(y_{\nu-3}+y_{\nu-2})=1 \qquad (\nu=4,5,\ldots N) \end{array}\right\} \quad (23)$$

По этим элементарным формулам найдены компоненты $\{y_\nu\}$ точечного вектора Y_T при $y_0=0$ (задача (21)) и при $y_0=1$ задача (22)). Результаты представлены в таблице1. В первых строках указаны точные значения решений тех же задач (22) и (23) в узлах чебышевской N – сетки $t_\nu^{(N)}=\frac{2\nu-1}{2N}T$ при N=10 и T=0,5с., найденных методом шагов.

Точность решений, полученных методом точечных представлений, оказывается достаточно высокой, если иметь в виду столь небольшое значение N (N=10) и довольно колебательный характер процессов на выбранном отрезке $[0,T]$, особенно при нулевых начальных условиях.

При увеличении N в два раза, т.е. при N=20, точность резко возрастает. Максимальная погрешность не превышает 1 – 2 % (расчеты здесь не приводятся).

Кстати отметим, что, в этом случае, степень “m”, характеризующая величину запаздывания в методе точечных представлений также возрастает в два раза, т.к. $m=\frac{t_з}{T}N=\frac{0,1}{0,5}20=4$.

Систему рекуррентных равенств (23) эквивалентную векторно-матричному уравнению (19) следует рассматривать как эффективный алгоритм численного решения поставленной начальной задачи (17) на отрезке $[0,T]$ методом точечных представлений при конкретном задании численных значений всех параметров задачи.

Решение примера показывает это очевидным образом. Для формульного же представления точечного изображающего N – вектора Y_T, как решения векторно–матричного уравнения (19), система (23), в общем случае, мало пригодна. Это решение, однако, найдется стандартным путем, обращая системную матрицу в левой части уравнения (19):

$$Y_T=\left[H_1(Z)+S_0(m;Z)\right]^{-1}\cdot \cdot\left\{\lambda_0(E+Z)\cdot\left[X_T-b\cdot y_0\cdot e(m)\right]+y_0\cdot e_1\right\},$$

где

$$H_1(Z)=h_0^{(1)}E+h_1^{(1)}Z \qquad (N\times N)$$

–двухдиагональная невырожденная P – матрица ($h_0^{(1)}\neq 0$), а

$$S_0(m;Z)=b\lambda_0(E+Z)\cdot Z^m=b\lambda_0(Z^m+Z^{m+1})=S_1(Z)\cdot Z^m=$$

$$=b\lambda_0\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad (N\times N)$$

— также двухдиагональная P – матрица со сдвинутой на m шагов нулевой диагональю.

Теперь рассмотрим решение методом точечных представлений более общей начальной задачи (1) на отрезке $[0,T]$, которая после преобразования становится задачей Коши для уравнения (12) с чистым запаздыванием (13) и финитной добавочной функцией (14) в правой части уравнения, определяемой начальной функцией (4), заданной на $[-t_з,0]$, ее производными и параметрами членов с запаздыванием.

Решение же $y(t)$ $t\in[0,T]$ задачи Коши для линейного дифференциального уравнения n – го порядка с запаздыванием вида (1) в общем случае представляется в виде суммы двух составляющих

$$y(t)=y_I(t)+y_{II}(t)\xrightarrow{T_N}Y_T=Y_{T^I}+Y_{T^{II}}.$$

Первая составляющая $y_I(t)$ есть решение задачи при нулевых начальных условиях. Точечный изображающий N – вектор Y_{T^I} этого решения определяется формулой:

$$Y_{T^{I}} = G_n(m;Z)\cdot\lambda_0^n(E+Z)^n\cdot X_T = W_n^*(m;Z)\cdot X_T\,.$$

Здесь изображающий N – вектор решения нашей частной задачи Коши обозначен символом $Y_{T^{I}}$, вместо ранее используемого символа Y_T.

Кроме того, введена P – матрица, т.е. матрица, представимая в виде матричного полинома по степеням канонической матрицы Z $(N\times N)$

$$W_n^*(m;Z) = G_n(m;Z)\cdot\lambda_0^n(E+Z)^n = \frac{\lambda_0^n(E+Z)^n}{H_n(Z)+S_n(Z)\cdot Z^m}\,,$$

где

$$H_n(m;Z)\cdot Y_T = \lambda_0^n\cdot(E+Z)^n\cdot X_T\,,$$

а

$$H_n(m;Z) = H_n(Z)+S_n(Z)\cdot Z^m = \sum_{q=0}^{N-1} h_q^{(n)}(m)\cdot Z^q\,. \quad (24)$$

и

$$G_n(m;Z) = H_n^{-1}(m;Z) = \\ = \sum_{q=0}^{N-1} g_q^{(n)}(m)\cdot Z^q \qquad (N\times N)\,, \quad (25)$$

Найдем вторую составляющую $Y_{T^{II}} \xleftarrow{T_N} y_{II}(t) \quad t\in[0,T]$. Это точечный N – вектор решения $y_{II}(t)$ задачи Коши на $[0,T]$ для дифференциального уравнения (12), определяемого только начальными условиями, когда $x(t)\equiv 0$:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n-\nu}y_{II}^{(\nu)}(t)+\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu}y_{II}^{(\nu)}(t-t_з) = \\ = f(\phi;t) \qquad t\in[0,T]\,, \quad (26)$$

где

$$f(\phi;t) = -\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu}\phi^{(\nu)}(t-t_з) \qquad t\in[0,t_з] \quad (27)$$

есть финитная функция (14).

Применим к (26) процедуру перехода от линейного дифференциального уравнения к уравнению в точечных изображениях, которая включает в себя замену переменного $t=T\tau$ в функциях и производных; переход к эквивалентному интегральному уравнению путем n – кратного интегрирования обеих частей уравнения с учетом ненулевых начальных условий; точечное представление интегрального уравнения с вводом параметра запаздывания $m=\tau_з N$ и почленным умножением на P – матрицу $(E-Z)^n$ $(N\times N)$.

В результате всех этих действий получим векторно–матричное уравнение для $Y_{T^{II}}$ с прежней системной матрицей $H_n(m;Z)$, определяемой (24), но другой правой частью:

$$H_n(m;Z)\cdot Y_{T^{II}} = \lambda_0^n\cdot(E+Z)^n f_T(\phi) + \\ +(E-Z)^{-1}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\bar{H}_n(i)y_0^{(i)} \quad (28)$$

Второй член в правой части этого уравнения без всяких изменений “перешел” из задачи Коши для уравнения без запаздывания.

Символом $f_T(\varphi)$ обозначен точечный изображающий N – вектор финитной функции (27) с интервалом финитности $(0,t_з)$, поэтому только “m” первых компонент этого вектора отличны от нуля и определяются параметрами членов с запаздыванием в уравнении (26) и начальными условиями задачи.

Найдем явное представление этого вектора через указанные параметры.

Для начальной функции (4) и ее $(n-1)$ первых производных имеем

$$\phi^{(\nu)}(t) = \sum_{k=\nu}^{n-1} y_0^{(k)}\cdot\frac{t^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \qquad (\nu=\overline{0,n-1}); \qquad t\in[-t_з,0]\,.$$

Следовательно, для финитной функции (27) получим представление

$$f(\phi;t) = -\sum_{\nu=0}^{n-1} b_{n-\nu}\cdot\sum_{k=\nu}^{n-1} y_0^{(k)}\cdot\frac{(t-t_з)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \qquad t\in[0,t_з]\,.$$

Развернем сумму и сгруппируем члены при $y_0^{(k)} \quad (k=\overline{0,n-1})$. В результате окажется:

$$f(\phi;t) = -b_n\sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)}\cdot\frac{(t-t_з)^k}{k!} - b_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} y_0^{(k)}\cdot\frac{(t-t_з)^{k-1}}{(k-1)!} - \dots - \\ -b_1\cdot y_0^{(n-1)} = b_n\cdot y_0^{(0)} - \left[b_n(t-t_з)+b_{n-1}\right]y_0^{(1)} - \\ -\left[b_n\frac{(t-t_з)^2}{2!}+b_{n-1}\frac{(t-t_з)}{1!}+b_{n-2}\right]y_0^{(2)} - \dots - \sum_{i=0}^{k} b_{n-i}\frac{(t-t_з)^{k-i}}{(k-i)!}y_0^{(k)} - \\ -\dots - \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-i}\frac{(t-t_з)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} = \\ = -\sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)}\left[\sum_{i=0}^{k} b_{n-i}\frac{(t-t_з)^{k-i}}{(k-i)!}\right] = -\sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)}\cdot P(k;t-t_з),$$

где

$$P(k;t-t_з) = \sum_{i=0}^{k} b_{n-i}\frac{(t-t_з)^{k-i}}{(k-i)!} \qquad (k=\overline{0,n-1}); \quad t\in[0,t_з]$$

есть полиномы степени $k=\overline{0,n-1}$ относительно аргумента $(t-t_з)$, определенные на отрезке $[0,t_з]$. Выполним замену переменного, полагая $t-t_з=T(\tau-\tau_з)$. Получаем финитную функцию на $(0,\tau_з)$ в виде разложения по финитным же полиномам:

$$f(\phi;T\tau) = f(\phi;\tau) = \\ = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)}\cdot P(k;T(\tau-\tau_з)) & \tau\in[0,\tau_з]; \\ 0 & \tau\notin[0,\tau_з], \end{cases} \quad (29)$$

причем полином нулевой степени также следует считать финитным, т.е.

$$P(0;T(\tau-\tau_з)) = \begin{cases} b_n & \tau\in[0,\tau_з]; \\ 0 & \tau\notin[0,\tau_з]. \end{cases} \quad (30)$$

Положим $\tau_з \approx \frac{m}{N}$ - рациональное число, ближайшее к заданной относительной величине запаздывания $\tau_з = \frac{t}{T}$, тогда на интервале финитности $(0,\tau_з)$ функции (29) будет располагаться ровно m первых узлов N – сетки

$$\tau_\nu^{(N)} = \frac{2\nu-1}{2N} \qquad (\nu=\overline{1,N})$$

Сложный аргумент $T(\tau - \tau_з)$ финитных полиномов в (29) в этих узлах будет принимать дискретные значения, определяемые формулой

$$T(\tau-\tau_з)=\frac{\mathrm{T}}{2N}(2\nu-2m-1)= \lambda_0\cdot[2(\nu-m)-1] \qquad (\nu=1,2,\ldots m),$$

а отсчеты полиномов

$$P(k;\lambda_0\cdot[2(\nu-m)-1])= =\sum_{i=0}^{k}b_{n-i}\lambda_0^{k-i}\frac{[2(\nu-m)-1]^{k-i}}{(k-i)!}; \quad (k=\overline{0,n-1}); \ (\nu=\overline{1,m});$$

будут m первыми компонентами точечных изображающих N – векторов $\bar{P}_T(k)$ $(k=\overline{0,n-1})$ этих полиномов. Остальные $N - m$ компонент векторов $\bar{P}_T(k)$ $(k=\overline{0,n-1})$ будут равны нулю, причем при k=0 окажется, в силу (30),

$$\bar{P}_T(0)=b_n\cdot Colon\left[\underbrace{1,\ldots 1}_{m},\underbrace{0,\ldots 0}_{N-m}\right],$$

Таким образом, точечный изображающий N – вектор $f_T(\varphi)$ финитной функции (29) представится в виде линейной комбинации точечных N – векторов $\bar{P}_T(k)$ $(k=\overline{0,n-1})$ с начальными условиями в качестве коэффициентов:

$$f_T(\phi)=-\sum_{k=0}^{n-1}y_0^{(k)}\cdot\bar{P}_T(k)$$

и, как уже отмечалось, будет иметь отличные от нуля только m первых своих компонент.

Вернемся к векторно–матричному уравнению (28). Его решение, т.е. вторая составляющая $Y_{T^{II}}$ решения Y_T задачи Коши (12), связано снова с обращением (25) системной матрицы $H_n(m;Z)$ и представляется в виде

$$Y_{T^{II}}=G_n(m;Z)\cdot\lambda_0^n(E+Z)^n\cdot f_T(\phi)+ +G_n(m;Z)(E-Z)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{H}_n(i)y_0^{(i)}$$

Объединение обеих составляющих Y_{T^I} и $Y_{T^{II}}$ дает формулу

$$Y_T=Y_{T^I}+Y_{T^{II}}=W_n^*(m;Z)\cdot[X_T+f_T(\phi)]+ +G_n(m;Z)(E-Z)^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{H}_n(i)y_0^{(i)}$$

определяющую точечный N – вектор Y_T решения $y(t)$ задачи Коши (12) на отрезке $[0,T]$, эквивалентной начальной задаче (1) на том же отрезке.

4. Заключение

На основе предлагаемого метода была разработана прикладная программа, позволяющая находить точечный изображающий вектор решения этой задачи.

Приближенно – аналитический метод решения дифференциально – разностных уравнений с запаздыванием любых порядков (предварительно преобразованных в задачу Коши) на основе точечных представлений является весьма эффективным, что показывают многочисленные примера проведенные на ЭВМ.

Литература

1. Осипов, В. М. Моделирование линейных динамических систем методом точечных представлений / В. М. Осипов, В. В. Осипов. - М. : МАКС Пресс, 2005. – 296 с.

2. Хейл, Дж. Теория функционально – дифференциальных уравнений : пер. с англ. / Дж. Хейл. - М. : Мир, 1984. - 421с.

3. Эльсгольц, Л. С. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. С. Эльсгольс. - М.: Наука, 1964.-128 с.

4. Солодов, А. В. Системы с переменным запаздыванием / А. В. Солодов, Е. А. Солодова .- М. : Наука, 1980. -384 с.