УДК 517.9

А. Ф. Зубова, В. И. Зубов, Н. Н. Учватова*

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОЛРЯДКА

В статье даны условия устойчивости и неустойчивости исследуемой функции, а также условия колебательности дифференциальных уравнений. Эти условия опираются на определении числа отрицательных собственных значений системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: фазовая поверхность, плоская волна, автомодельное движение, независимая переменная, однородное уравнение, краевое условие.

Рассмотрим колебания сплошной среды, описываемые уравнением $a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} +$

$$+u\{\overline{p}(\alpha_0 t + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j) + \overline{\lambda}\} = 0 \qquad (1)$$

где $a_0, a_{ij}, \alpha_0, \alpha_j, \overline{\lambda}$ - вещественные постоянные.

Автомодельное движение представим в форме

$u = u(x)$, где $u = u(x)$, где $x = \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$.

Такие выражения описывают так называемые плоские волны, когда любая фазовая поверхность $x = C$, где C – постоянная ($C \in (-\infty, +\infty)$), представляет семейство плоскостей в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$, которые перемещаются в зависимости от изменения времени t.

Вычислим вторые производные искомого автомодельного движения по времени и независимым переменным. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{du}{dx} \cdot \alpha_0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \alpha_0 \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \alpha_0^2 .$$

Аналогично имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_j} = \frac{du}{dx} \cdot \alpha_j .$$

Далее

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \alpha_j \alpha_i .$$

Тогда оператор второго порядка, присутствующий в уравнении (1), на автомодельном движении принимает вид

$$a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{d^2 u}{dx^2} \gamma ,$$

где $\gamma = a_0 \alpha_0^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \alpha_i \alpha_j$, и уравнение (1)

$$\gamma \frac{d^2 u}{dx^2} + [\overline{p}(x) + \overline{\lambda}] u = 0 . \qquad (2)$$

Далее предполагаем $\gamma \neq 0$. Приведем уравнение (2) к виду

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + [p(x) + \lambda] u = 0 . \qquad (3)$$

Заметим, что уравнение (3) является однородным уравнением Шредингера $Hy = -y'' + V(x)y$ Рассмотрим краевые задачи

$$u'' + [p(x) + \lambda] u = 0, \quad u(0) = u(\omega), u'(0) = u'(\omega) ; \qquad (4)$$

$$v'' + [p(x) + \mu] v = 0, \quad v(0) = -v(\omega), \quad v'(0) = -v'(\omega). \qquad (5)$$

Известно, что при $\lambda \le \lambda_0$ решения уравнения $u'' + [p(x) + \lambda] u = 0$ неколебательные, при $\lambda > \lambda_0$ - колебательные, причем при $\lambda = \lambda_0$ уравнение имеет единственное нормированное периодическое решение, не обращающееся в нуль.

Таким образом, если $\lambda_0 \ge 0$, то решения уравнения $u'' + p(x)u = 0$ неколебательные.

Если известно, в какую зону попадает $\lambda = 0$, т. е. известно число отрицательных собственных значений задач (4), (5), то становится известным, к какой зоне устойчивости или неустойчивости принадлежит функция $p(x)$. Если же нет отрицательных собственных значений ($\lambda_0 = 0$), то решения уравнения $u'' + p(x)u = 0$ неколебательные.

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ – полная система функций, удовлетворяющая краевым условиям (4), $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ – полная система функций, удовлетворяющих краевым условиям (5). Матрицу квадратичной формы $J(\sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i)$ обозначим через A_n. Матрицу квадратичной формы $J(\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i)$ обозначим через B_n,

где $J(y) = \int_0^{\omega} [(y')^2 - p(x) y^2] dx$.

Рассмотрим последовательности

$$1, \Delta(A_1), \Delta(A_2), \ldots, \Delta(A_k), \ldots ; \qquad (6)$$

$$1, \Delta(B_1), \Delta(B_2), \ldots, \Delta(B_k), \ldots ; \qquad (7)$$

где $\Delta()$ - определители квадратичных матриц.

* - автор, с которым следует вести переписку.

Теорема. Для того, чтобы функция $p(x)$ принадлежала зоне устойчивости с номером $(2k-1)$ (или $2k$), необходимо и достаточно, чтобы число перемен знака в последовательности (6) было равно $(2k-1)$, а в последовательности (7) – $2k$ (соответственно в последовательности (6) – $(2k+1)$, в последовательности (7) – $2k$).

Теорема дает условия устойчивости для дифференциальных уравнений второго порядка (1).

Литература

1. Курант, Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт. – М. : Гостехиздат, 1951. - 500 с.

2. Ляпунов, А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. - М. : Гостехиздат, 1950. - 472 с.

3. Зубова, А. Ф. Безопасность функционирования технических систем : моногр. / А. Ф. Зубова, Н. В. Зубов. - СПб. : Изд-во СПбГУ, 2009. - 343 с.