УДК 517.9

О. А. Зубова

ПРОБЛЕМА ИДЕНТИФИКАЦИИ

Решить задачу идентификации – значит построить решающее правило, которое наиболее точно будет относить точки пространства к тому или иному множеству. Последнее означает, что необходимо построить так называемую оптимальную гиперплоскость.

Ключевые слова: множество, пространство, задача минимизации, супердифференциал, штрафные функции, функционал.

Постановка задачи идентификации.

Пусть в пространстве R^n задан два множества точек A и $B: A=\{a_i \mid i\in I\}; B=\{b_j \mid j\in J\}$. Задача идентификации заключается в построении решающего правила – определенного закона, по которому точка пространства R^n, принадлежащая объединению этих множеств, объявляется элементом одного из них.

Решение задачи идентификации.

Введем функцию $r(x,\bar{l})$:

$$r(x,\bar{l})=(l,x)+d;\quad \bar{l}=[d,l];\quad l,x\in R^n,\quad d\in R^1.$$

Наложим ограничение на вектор $l: \|l\|=1$. Функция $r(x,\bar{l})$ с точностью до знака определяет расстояние от точки $x\in R^n$ до гиперплоскости $r(x,\bar{l})=0$, разделяющей множества A и B. Пусть точка c пространства R^n принадлежит объединению множеств A и $B: c\in A\cup B$. Построим решающее правило следующим образом:

$$\begin{cases} r(x,\bar{l})>0 \Rightarrow c\in A,\\ r(x,\bar{l})<0 \Rightarrow c\in B.\end{cases}$$

В качестве оценки эффективности того или иного решающего правила обычно используют натуральные функционалы, определяющие количество неправильно определенных точек. В этом случае, чем меньше значение функционала, то есть чем меньше количество неправильно определенных точек, тем лучше решающее правило. Использование таких функционалов сопряжено с различного рода трудностями, связанными с разрывностью натурального функционала, поэтому вводят так называемые суррогатные функционалы, аппроксимирующие натуральные функционалы. Далее будем исследовать два суррогатных функционала $F_1(\bar{l})$ и $F_2(\bar{l})$, задаваемых формулами

$$F_1(\bar{l})=\sum_{j\in J}\max\{0,(l,b_j)+d\}+\sum_{i\in I}\max\{0,(-l,a_j)-d\},$$

$$F_2(\bar{l})=\frac{1}{2}(\sum_{j\in J}[\max\{0,(l,b_j)+d\}]^2+$$

$$+\sum_{i\in I}[\max\{0,(-l,a_j)-d\}]^2,$$

Для нахождения наилучшего решающего правила необходимо решить задачу условной минимизации

$$F_i(\bar{l})\underset{\bar{l}\in\Omega}{\longrightarrow}\min,\quad i=1,2,$$

где $\Omega=\{\bar{l}=[d,l] \mid d\in R, l\in R^n, \|l\|=1\}\subset R^{n-1}$. Введем штрафные функции $\Phi_1(\bar{l})$ и $\Phi_2(\bar{l})$:

$$\Phi_1(\bar{l})=F_1(l)+\lambda\varphi(\bar{l}),\quad \Phi_2(\bar{l})=F_2(\bar{l})+\lambda\varphi(\bar{l}),\quad (1)$$

где $\varphi(\bar{l})=|1-\|l\||$, а λ – штрафной параметр, $\lambda\ge 0$ (см. [1]). Тогда задача минимизации функционалов $F_1(\bar{l})$ и $F_2(\bar{l})$ а множестве $\Omega=\{(d,l) \mid \|l\|=1\}=\{(d,l) \mid \varphi(\bar{l})=0\}$ будет эквивалентна задаче минимизации штрафных функций $\Phi_1(\bar{l})$ и $\Phi_2(\bar{l})$ на всем пространстве R^n:

$$\Phi_1(\bar{l})\underset{\bar{l}\in R^{n+1}}{\longrightarrow}\min,\quad i=1,2.$$

Функции $F_1(\bar{l}), F_2(\bar{l})$ и $\varphi(\bar{l})$ квазидифференцируемы (см. [2]), поэтому квазидифференцируемы функции $\Phi_1(\bar{l})$ и $\Phi_2(\bar{l})$ и выполняется равенство

$$D\Phi_i(\bar{l})=[\underline{\partial}\Phi_i(\bar{l}),\bar{\partial}\Phi_i(\bar{l})],$$

$$\underline{\partial}\Phi_i(\bar{l})=\underline{\partial}F_i(\bar{l})+\lambda\underline{\partial}\varphi(\bar{l}),$$

$$\bar{\partial}\Phi_i(\bar{l})=\bar{\partial}F_i(\bar{l})+\lambda\bar{\partial}\varphi(\bar{l}),\quad i=1,2,$$

где $D\Phi_i(\bar{l})$ – квазидифференциал функции $\Phi_i(\bar{l}), \underline{\partial}\Phi_i(\bar{l})$ – субдифференциал функции $\Phi_i(\bar{l}), \bar{\partial}\Phi_i(\bar{l})$ – супердифференциал функции $\Phi_i(\bar{l})$.

Пусть

$$I_0=\{i\in I \mid r(a_i,\bar{l})=0\}=\varnothing,$$
$$J_0=\{j\in J \mid r(b_j,\bar{l})=0\}=\varnothing.$$

Найдем суб- и супердифференциалы функций $F_1(\bar{l}), F_2(\bar{l})$ и $\varphi(\bar{l})$.

$$\underline{\partial}F_1(\bar{l})=\sum_{j\in J_+}[1,b_j]+\sum_{i\in I_-}[-1,-a_i],\quad \bar{\partial}F_1(\bar{l})=\{0_{n+1}\},$$

$$\underline{\partial}F_2(\bar{l})=\sum_{j\in J_+}r(b_j,\bar{l})[1,b_j]+\sum_{i\in I_-}r(a_i,\bar{l})[-1,-a_i],\quad (2)$$

$$\bar{\partial}F_2(\bar{l})=\{0_{n+1}\},\quad \underline{\partial}\varphi\bar{l}=co\{[0,-l],[0,l]\},\quad \bar{\partial}\varphi(\bar{l})=\{0_{n+1}\},$$

где $I_-=\{i\in I \mid r(a_i,\bar{l})<0\},\quad J_+=\{j\in J \mid r(b_j,\bar{l})>0\}$. Тогда из формул (1) и (2) следует, что субдифференциалы и супердифференциалы функций $\Phi_1(\bar{l})$ и $\Phi_2(\bar{l})$ будут иметь вид:

$$\underline{\partial}\Phi_1(\bar{l}) = \sum_{j\in J_+}[1,b_j] + \sum_{i\in I_-}[-1,-a_i] + \lambda co\{[0,-l],[0,l]\},$$

$$\underline{\partial}\Phi_2(\bar{l}) = \sum_{j\in J_+} r(b_j,\bar{l})[1,b_j] + \sum_{i\in I_-} r(a_i,\bar{l})[-1,-a_i] + \lambda co\{[0,-l],[0,l]\} \quad (3)$$

$$\bar{\partial}\Phi_1(\bar{l}) = \{0_{n+1}\}, \quad \bar{\partial}\Phi_2(\bar{l}) = \{0_{n+1}\}.$$

Необходимым условием минимума функций $\Phi_1(\bar{l}), \Phi_2(\bar{l})$ является выполнение следующего включения:

$$\begin{aligned} -\bar{\partial}\Phi_1(\bar{l}_1^*) &\subset \Phi_1(\bar{l}_1^*), \\ -\bar{\partial}\Phi_2(\bar{l}_2^*) &\subset \Phi_2(\bar{l}_2^*). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив формулы (3) в выражение (4), мы получим

$$0_{n+1} \in \sum_{j\in J_+}[1,b_j] + \sum_{i\in I_-}[-1,-a_i] + \lambda co\{[0,-l_1^*],[0,l_1^*]\}$$

$$0_{n+1} \in \sum_{j\in J_+} r(b_j,\bar{l})[1,b_j] + \sum_{i\in I_-} r(a_i,\bar{l})[-1,-a_i] + \lambda co\{[0,-l_2^*],[0,l_2^*]\}, \quad (5)$$

где $I_- = \{i\in I \mid r(a_i,\bar{l}) < 0\}$, $J_+ = \{j\in J \mid r(b_j,\bar{l}) > 0\}$. Распишем по координатам. По первой координате имеем:

$$|J_+| - |I_-| = 0, \quad \sum_{j\in J_+} r(b_j,\bar{l}^*) + \sum_{i\in I_-} r(a_i,\bar{l}^*) = 0, \quad (6)$$

где $|J_+|$ и $|I_-|$ – количество элементов множества J_+ и I_- соответственно. По $2,\ldots,(n+1)$ координатам (5) эквивалентно следующему:

$$\sum_{j\in J_+} b_j - \sum_{i\in I_-} a_i = \mu l^*, \quad \sum_{j\in J_+} r(b_j,\bar{l}^*) + \sum_{i\in I_-} r(a_i,\bar{l}^*) = \mu l^*, \quad (7)$$

где $\mu = \text{const}, \mu = [-\lambda,\lambda]$. Первое равенство в формуле (6) означает, что решающее правило, для которого количество неверно идентифицированных точек множества B равно количеству неверно идентифицированных точек множества A, будет наилучшим в смысле функционала $F_1(\bar{l})$. Из второго равенства формулы (6) следует, что необходимым условием оптимальности в смысле функционала $F_2(\bar{l})$ решающего правила является равенство двух сумм: суммы расстояний от неверно определенных точек множества A до разделяющей гиперплоскости $r(x,\bar{l}) = 0$ и аналогичной суммы до множества B. То есть используя два различных функционала $F_1(\bar{l})$ и $F_2(\bar{l})$ для оценки эффективности решающего правила, мы получаем два условия, при помощи которых можно сравнить различные решающие правила между собой. Функционал $F_2(\bar{l})$, в отличие от $F_1(\bar{l})$, является гладким, поэтому он представляет большой интерес для практики.

Алгоритм решения задачи идентификации.

Решить задачу идентификации – значит построить решающее правило, которое наиболее точно будет относить точки пространства к тому или иному множеству. Последнее означает, что необходимо построить так называемую оптимальную гиперплоскость. Фактически это эквивалентно нахождению такого вектора $\bar{l}^* = [d^*, l^*]$, $\bar{l}^* \in R^{n+1}$, что гиперплоскость $r(x,\bar{l}^*) = 0$. Далее изложен алгоритм нахождения вектора $\bar{l}^*$ с помощью функционала $F_2(\bar{l})$.

В качестве начального приближения выберем произвольное $\bar{l} \in R^{n+1}$. Пусть уже найдено $\bar{l}_k \in R^{n+1}$. Если $0_{n+1} \in \underline{\partial}\Phi_2(\bar{l})$, то $\bar{l}_k$ – искомый вектор, и процесс прекращается. Если же $0_{n+1} \notin \underline{\partial}\Phi_2(\bar{l})$, то положим $g_k = -\bar{Q}(\bar{l}_k)$ и рассмотрим луч

$$\{\bar{l} \in R^{n+1} \mid \bar{l} = \bar{l}_{k\alpha} = \bar{l}_k - \alpha g_k, \alpha \ge 0\},$$

где $\bar{Q}(\bar{l}_k)$ – минимальный элемент субдифференциала $\underline{\partial}\Phi_2(\bar{l})$. Используя формулу (6) и (7) и необходимое условие минимума квадратичной формы $\frac{1}{2}\|Q + \mu l\|^2$ этот вектор $\bar{Q}(\bar{l}_k)$ нетрудно найти:

$$\bar{Q}(\bar{l}_k) = [\sum_{j\in J_+} r(b_j,\bar{l}_k) - \sum_{i\in I_-} r(a_i,\bar{l}_k), Q_k + (Q_k, l_k) l_k],$$

где $Q_k = [\sum_{j\in J_+} r(b_j,\bar{l}_k) b_j - \sum_{i\in I_-} r(a_i,\bar{l}_k) a_i]$. Далее найдем $\min_{\alpha\ge 0}\Phi_2(\bar{l}_{k\alpha}) = \Phi_2(\bar{l}_{k\alpha_k})$ (предполагаем, что $\inf\Phi_2(\bar{l}_{k\alpha})$ достигается) и положим $\bar{l}_{k+1} = \bar{l}_{k\alpha_k} = \bar{l}_k - \alpha_k g_k$.

В результате мы построим последовательность векторов $\{\bar{l}_k\}$. Если эта последовательность состоит из конечного числа векторов, то последний полученный вектор $\bar{l}^*$ будет оптимальным по построению. В противном случае всякая предельная точка последовательности $\{\bar{l}_k\}$ будет оптимальной.

Вышеизложенный метод является гипоградиентным методом и поэтому сходится.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (03-01-00668).

Литература

1. Демьянов, В. Ф. Введение в минимакс / В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. - М. : Наука, 1972. – 360 с.

2. Зубов, А. В. Теория устойчивости и применение к задачам численного анализа : / А. В. Зубов, Н. В. Зубов. - СПб., 2001. - 102 с..