МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 656.072, 519.833.2

Управление транспортной системой в условиях выбора пассажирами между двумя видами городского пассажирского транспорта

М.Е. Корягин

Кемеровский государственный сельскохозяйственный институт, ул. Марковцева 5, Кемерово, Россия
markkoryagin@yandex.ru
Статья поступила 10.06.2013, принята 9.08.2013

Рассмотрена система управления городским пассажирским транспортом в условиях существования двух подсистем, отличающихся тарифом, интервалом движения, временем передвижения. Построена функция полезности пассажира, связанная с выбором подсистемы городского пассажирского транспорта. Пассажиропоток представлен в виде набора перемещений со стоимостью свободного времени, распределенного по экспоненциальному закону. Построена функция затрат пассажиропотока, которая зависит от тарифов, интенсивности движения транспорта, а также вероятности выбора одной из двух подсистем городского пассажирского транспорта. Переменной для пассажиропотока является вероятность выбора подсистемы пассажирского транспорта. Доказана выпуклость вниз функции затрат пассажиров от переменной. Городской пассажирский транспорт представлен множеством операторов, каждый из которых эксплуатирует набор маршрутов. Некоторые пассажиропотоки могут быть обслужены несколькими маршрутами, из-за чего возникает конфликт интересов транспортных операторов. После распределения пассажиров между подсистемами городского пассажирского транспорта рассмотрена математическая модель распределения пассажиров между маршрутами каждой подсистемы общественного транспорта. Модель основана на выборе первого транспортного средства, подошедшего к остановочному пункту, позволяющего перевезти пассажира до места назначения. Построена бескоалиционная игра транспортных операторов, максимизирующих свою прибыль, и пассажиропотоков, минимизирующих свои расходы на перемещение. Доказано существование равновесия Нэша.

Ключевые слова: городской пассажирский транспорт, транспортные операторы, стоимость свободного времени, теория игр, равновесие Нэша.

Transport system management under the conditions of passengers' choice between two types of public transport

M.E. Koryagin

Kemerovo State Agricultural Institute, 5 Markovtseva st., Kemerovo, Russia
markkoryagin@yandex.ru
Received10.06.2013, accepted 9.08.2013

The system of the urban passenger transport management has been considered under the conditions when there are two subsystems different in tariff, traffic interval and travel time. A passenger's utility function involving the choice of the urban passenger transport subsystem has been constructed. Passenger traffic is represented as a set of spare time cost movements distributed exponentially. The function of the passenger traffic inputs has been constructed. It is depended on the tariffs, traffic intensity as well as the probability of selecting one of the two urban passenger transport subsystems. The variable for the passenger traffic is the probability of selecting a passenger transport subsystem. The convexity of the passengers inputs function with respect to the variable has been proved. Urban passenger transport is presented by a great number of transport companies, each of them running a set of routes. Some of the passenger traffic flows can be served by several routes and, therefore, a conflict of interest among transport operators occurs. After the distribution of passengers between the urban passenger transport subsystems, the mathematical model of the passengers' distribution among the routes of each public transport subsystem has been constructed. The model is based on the selection of the first vehicle approached a stopping point that allows transporting to the destination. The coalition-free game of transport companies that aim at maximizing their profit and passenger traffic trying to minimize their travel costs has been constructed. The existence of Nash equilibrium has been proved.

Keywords: urban passenger transport, transport companies, spare time cost, game theory, Nash equilibrium.

Введение. Переход общественного транспорта российских городов в рыночную среду привел к тому, что в настоящее время сформировались две подсистемы общественного транспорта, которые называют «муниципальный транспорт» и «маршрутные такси». Существование двух подсистем приводит к дублированию маршрутных сетей. Отрицательный эффект от дублирования показан в [1]. К тому же само понятие «общественный транспорт» говорит о некотором равенстве пассажиров. Поэтому существование двух подсистем является пережитком периода экономического кризиса 90-х годов. Объединение подсистем общественного транспорта является одним из способов повышения эффективности работы транспортной системы.

Однако стоит разобраться, почему существуют эти две подсистемы? Каковы экономические и социальные причины данной ситуации? Кроме наличия льготных категорий пассажиров, существует расслоение людей по стоимости свободного времени [2 – 4]. Стоимость времени связана с уровнем жизни человека, расслоение по доходам в России велико, поэтому для некоторых пассажиров потеря времени имеет большее значение, чем дополнительные затраты на проезд, а для других – наоборот.

Если в 90-х годах пассажиры выбирали между маршрутными такси и муниципальным транспортом, то в настоящее время – между общественным транспортом и личным. Задача выбора способа передвижения (между личным и общественным транспортом) рассмотрена в [1, 5]. В данных работах этот подход применен для описания конкуренции между общественным транспортом в целом.

Также стоит упомянуть работу [6], в которой описана упрощенная модель выбора пассажирами маршрута передвижения. В этом случае решение о посадке принималось автоматически, т. е. зависело от категории пассажира: пассажиры, имеющие льготы на проезд, осуществляли посадку только в муниципальный транспорт, а остальные пассажиры осуществляли посадку в первое подошедшее транспортное средство.

На самом деле, поток пассажиров более разнородный и, соответственно, решение о посадке в подошедшее транспортное средство будет зависеть от важности поездки конкретного человека.

Математическая постановка задачи. Рассмотрим два вида общественного транспорта: муниципальный транспорт и маршрутные такси.

Основные вопросы заключаются в том, как поступит, какое решение примет пассажир при подходе на остановочный пункт муниципального транспорта, а какое – при подходе маршрутного такси. Пусть μ_0 – интенсивность движения муниципального транспорта, а μ_1 – маршрутных такси. Время передвижения соответственно t_0 и t_1, а β_0 и β_1 – тарифы на муниципальном транспорте и маршрутном такси.

Варианты постановок задачи зависят от соотношения времени ожидания и времени передвижения на подвидах ГПТ. Поэтому рассмотрим лишь один вариант: при подходе муниципального транспорта все пассажиры осуществляют в него посадку, т. к. ожидание маршрутного такси не позволит сэкономить время:

$$t_1 + \frac{1}{\mu_1} \geq t_0 . \quad (1)$$

В этом случае поведение пассажиров можно описать схемой, отображенной на рис. 1.

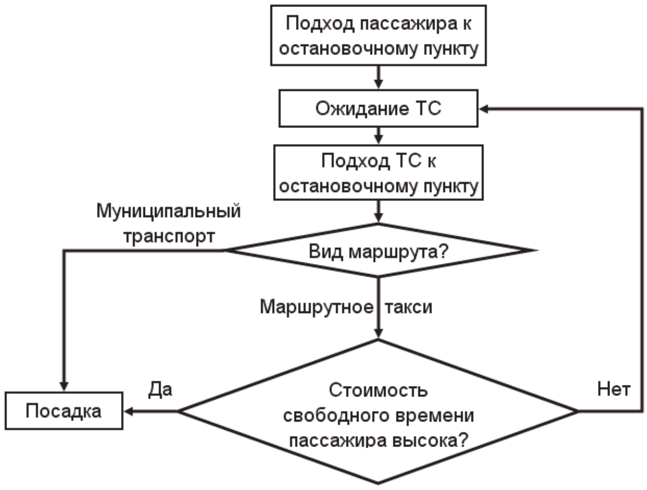

Рис. 1. Принятие решения пассажиром о посадке в транспортное средство при выполнении условия (1)

Тогда остается лишь рассмотреть вопрос, будет ли пассажир ожидать муниципальный транспорт или нет. Соответственно, если x – стоимость времени пассажира, то в случае подхода маршрутного такси затраты пассажира на перемещение (при посадке в маршрутное такси):

$$t_1 x + \beta_1 . \quad (2)$$

При ожидании муниципального транспорта:

$$\left(t_0 + \frac{1}{\mu_0} \right) x + \beta_0 . \quad (3)$$

Цель потока населения – минимизировать суммарные затраты на перемещения, изменяя параметр p_0 (вероятность выбора маршрутного такси). Пусть $\gamma' = -\gamma \ln\left(p_0 \right)$ – стоимость времени, при которой для пассажира оба варианта равноценны.

В [5] пассажиры имеют различную стоимость свободного времени, которая описывается с помощью экспоненциального закона распределения. Выбор экспоненциального распределения более предпочтителен, так как в России практически отсутствует средний класс, а также много бедных и очень богатых людей. В зарубежной литературе [7] для описания выбора способа передвижения предполагается, что стоимость свободного времени описывается равномерным распределением, чему соответствует более равномерное распределение доходов государства между людьми.

Тогда, по аналогии с [5], средние расходы на одно перемещение на муниципальном транспорте состоят из потерь времени и стоимости проезда:

$$\frac{\gamma + \gamma p_0 \ln\left(p_0 \right) - \gamma p_0}{1 - p_0} \left[\frac{1}{\mu_0} + t_0 \right] + \beta_0 . \quad (4)$$

Средние расходы на одно перемещение на маршрутном такси:

$$\left[\gamma-\gamma\ln\left(p_0\right)\right]t_1+\beta_1 . \qquad (5)$$

Суммарные затраты потока на одну поездку – взвешенная сумма затрат на перемещения на автомобиле и общественном транспорте (4-5):

$$\left[\gamma+\gamma p_0\ln\left(p_0\right)-\gamma p_0\right]\left[\frac{1}{\mu_0}+t_0\right]+\beta_0\left(1-p_0\right)+$$

$$+\left[\gamma p_0-\gamma p_0\ln\left(p_0\right)\right]t_1+p_0\beta_1 . \qquad (6)$$

Первая производная суммарных затрат (6) на единичную поездку составит:

$$\gamma\ln\left(p_0\right)\left[\frac{1}{\mu_0}+t_0-t_1\right]+\left(\beta_1-\beta_0\right). \qquad (7)$$

Вторая производная от (6):

$$\gamma\frac{1}{p_0}\left[\frac{1}{\mu_0}+t_0-t_1\right]\geq 0 . \qquad (8)$$

Таким образом, функция затрат на единичную поездку (6) выпукла вниз (8) по параметру p. Или функция выигрыша потока пассажиров выпукла вверх по стратегии потока p. Условие (1) является естественным, т. к. при подходе маршрутного такси не имеет смысла ожидать муниципальный транспорт ради экономии времени.

Решение задачи минимизации (6) по параметру p_1, очевидно, приводит к решению уравнения, левая часть которого (2), а правая – (3).

Если же выполняется условие :

$$t_1+\frac{1}{\mu_1}<t_0 , \qquad (9)$$

то при подходе муниципального транспорта есть возможность сэкономить время перемещения, если дождаться маршрутного такси. Тогда, если p_1 – вероятность выбора маршрутного такси, то затраты пассажиропотока по аналогии с (6) составят:

$$\left[\gamma+\gamma p_1\ln\left(p_1\right)-\gamma p_1\right]t_0+\beta_0\left(1-p_1\right)+$$

$$+\left[\gamma p_1-\gamma p_1\ln\left(p_1\right)\right]\left[t_1+\frac{1}{\mu_1}\right]+p_1\beta_1 . \qquad (10)$$

Схема поведения пассажиров в данном случае соответствует рис. 2.

Вторая производная меньше нуля из-за введенного условия (9):

$$\gamma\frac{1}{p_1}\left[t_0-t_1-\frac{1}{\mu_1}\right]\geq 0 . \qquad (11)$$

Таким образом, функция затрат на единичную поездку (10) также выпукла вниз (11) по параметру p_1.

Рис. 2. Принятие решения пассажиром о посадке в транспортное средство при выполнении условия (9)

Обобщение постановки задачи в городской среде. В городских условиях существует множество пунктов возникновения потребности в перемещении и пунктов назначения. Также уровень жизни в районах города неоднороден. Поэтому введем следующие параметры:

N – количество остановочных пунктов, по которым движутся транспортные средства и перемещаются пассажиры;

$t^0_{i,j}$ – время перемещения человека при использовании муниципального транспорта (за исключением времени ожидания) между пунктами i и j;

$t^1_{i,j}$ – время перемещения человека при использовании маршрутного такси (за исключением времени ожидания) между пунктами i и j;

$p^0_{i,j}$ – вероятность посадки в маршрутное такси при его подходе на остановочный пункт при перемещении между пунктами i и j;

$p^1_{i,j}$ – вероятность посадки в маршрутное такси при подходе на остановочный пункт муниципального транспорта при перемещении между пунктами i и j;

$\lambda_{i,j}$ – интенсивность потока пассажиров, поступающих на i-й остановочный пункт с потребностью переехать на маршрутном транспортном средстве на j-й остановочный пункт ($i,j=\overline{1,N}$);

K – количество конкурирующих между собой пассажирских транспортных операторов (или количество конкурирующих маршрутов), муниципальный транспорт имеет индекс 0;

L_k – количество маршрутов, которые эксплуатирует k-й транспортный оператор ($k=\overline{1,K}$);

$A^{k,l}_{i,j}$ – принимает значение 1, если по l-му маршруту k-го транспортного оператора можно переехать с i-

го остановочного пункта на j-й, иначе принимает значение 0 ($i,j=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,L_k}$, $k=\overline{1,K}$);

$\mu_{k,l}$ – интенсивность пуассоновского потока транспортных средств, движущихся по l-му маршруту k-го транспортного оператора ($l=\overline{1,L_k}$, $k=\overline{1,K}$);

$\alpha_{k,l}$ – себестоимость одного рейса общественного транспорта k-го оператора, движущегося по l-му маршруту ($l=\overline{1,L_k}$, $k=\overline{1,K}$);

$\gamma_{i,j}$ – средняя стоимость времени пассажиров, перемещающихся между пунктами i и j, ($i,j=\overline{1,N}$).

Рассмотрим потери пассажиропотока между пунктами i и j при выполнении ограничения:

$$t^1_{i,j}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}\ge t^0_{i,j}\,. \qquad (12)$$

По аналогии с (6), часть пассажиров, которая при подходе маршрутного такси осуществит в него посадку, в среднем теряет:

$$\left[\frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}t^1_{i,j}+\frac{\sum_{l=1}^{L_0}A^{0,l}_{i,j}\mu_{0,l}}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}t^0_{i,j}\right]\left[\gamma-\gamma\ln\left(p^0_{i,j}\right)\right]+$$

$$+\frac{\gamma-\gamma\ln\left(p^0_{i,j}\right)}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}+\frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}\beta_0+\frac{\sum_{l=1}^{L_0}A^{0,l}_{i,j}\mu_{0,l}}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}\beta_1\,.$$

Оставшиеся пассажиры в среднем теряют

$$\left[\frac{1}{\sum_{l=1}^{L_0}A^{0,l}_{i,j}\mu_{0,l}}+t^0_{i,j}\right]\frac{\gamma+\gamma p^0_{i,j}\ln\left(p^0_{i,j}\right)-\gamma p^0_{i,j}}{1-p^0_{i,j}}+\beta_0\,.$$

Тогда суммарные расходы пассажиропотока при перемещении между пунктами i и j на одну поездку:

$$G_{i,j}\left(\left\{\mu_{k,r}\right\}_{\substack{r=\overline{0,L_k}\\k=\overline{1,K}}},\left\{p^0_{i,j}\right\}_{\substack{i=\overline{1,N_k}\\j=\overline{1,N}}}\right)=$$

$$=\left[\gamma+\gamma p^0_{i,j}\ln\left(p^0_{i,j}\right)-\gamma p^0_{i,j}\right]\left[\frac{1}{\sum_{l=1}^{L_0}A^{0,l}_{i,j}\mu_{0,l}}+t^0_{i,j}\right]+$$

$$+\frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}t^1_{i,j}+\sum_{l=1}^{L_0}A^{0,l}_{i,j}\mu_{0,l}t^0_{i,j}}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}\left[\gamma p^0_{i,j}-\gamma p^0_{i,j}\ln\left(p^0_{i,j}\right)\right]+$$

$$+\frac{\left[\gamma p^0_{i,j}-\gamma p^0_{i,j}\ln\left(p^0_{i,j}\right)\right]}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}+$$

$$+\frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}\beta_0 p^0_{i,j}+\frac{\sum_{l=1}^{L_0}A^{0,l}_{i,j}\mu_{0,l}}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}\beta_1 p^0_{i,j}\to\min_{p_{i,j}}\,. \qquad (13)$$

Утверждение. Расходы пассажиропотока при перемещении между пунктами i и j являются выпуклой функцией по вероятности выбора маршрутного такси для передвижения.

► Вторая производная от (13) по $p^0_{i,j}$:

$$\frac{1}{p^0_{i,j}}\left[\frac{1}{\sum_{l=1}^{L_0}A^{0,l}_{i,j}\mu_{0,l}}+t^0_{i,j}-\frac{1}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}\right]-$$

$$-\frac{1}{p^0_{i,j}}\left[\frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}t^1_{i,j}+\frac{\sum_{l=1}^{L_0}A^{0,l}_{i,j}\mu_{0,l}}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}t^0_{i,j}\right]=$$

$$=\frac{1}{p^0_{i,j}}\frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}{\sum_{l=1}^{L_0}A^{0,l}_{i,j}\mu_{0,l}\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}+$$

$$+\frac{1}{p^0_{i,j}}\left(t^0_{i,j}-t^1_{i,j}\right)\frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}{\sum_{k=0}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}\ge 0\,.$$

Вторая производная от (13) больше нуля, поэтому (13) является выпуклой вниз функцией. ◄

Аналогично доказывается утверждение о выпуклости вниз функции затрат пассажиропотока при выполнении ограничения:

$$t^1_{i,j}+\frac{1}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L_k}A^{k,l}_{i,j}\mu_{k,l}}< t^0_{i,j}\,.$$

Оптимизация управления городским пассажир-

ским транспортом при выборе пассажиропотоком между двумя видами городского пассажирского транспорта. На основе [5, 6] построим игровую модель конкуренции муниципального транспорта и маршрутных такси. Целью каждого из участников является максимизация прибыли при фиксированных тарифах, т. е. за счет грамотного перераспределения транспортных средств по маршрутам.

Пассажиропотоки распределяются между маршрутами, учитывая затраты на проезд и стоимость свободного времени каждого индивида. Целевая функция пассажиропотока, перемещающегося между пунктами i и j, соответствует формуле (13).

Прибыль маршрутных такси транспортного оператора m является разностью доходов, полученных от продажи билетов, и расходов на выполнение рейсов:

$$H_m=\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_{i,j}\sum\limits_{l=1}^{L_m}A_{i,j}^{m,l}\mu_{m,l}}{\sum\limits_{k=0}^{K}\sum\limits_{l=1}^{L_k}A_{i,j}^{k,l}\mu_{k,l}}\beta_1 p_{i,j}^0-\sum_{l=1}^{L_m}\alpha_{m,l}\mu_{m,l}\to\max_{\substack{\mu_{m,l}\\ l=\overline{1,L_m}}} \quad (14)$$

Отметим, что дробь возникает из необходимости расчета доли маршрутов транспортного оператора в пассажиропотоке между пунктами i и j. Очевидно [6], что эта доля соответствует доле автобусов оператора m в общем потоке общественного транспорта, перевозящего пассажиров между данными остановочными пунктами.

Прибыль муниципального транспорта, индекс которого 0:

$$H_0=\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\lambda_{i,j}\beta_0\left[1-\frac{\sum\limits_{k=1}^{K}\sum\limits_{l=1}^{L_k}A_{i,j}^{k,l}\mu_{k,l}}{\sum\limits_{k=0}^{K}\sum\limits_{l=1}^{L_k}A_{i,j}^{k,l}\mu_{k,l}}p_{i,j}^0\right]-$$

$$-\sum_{l=1}^{L_0}\alpha_{0,l}\mu_{0,l}\to\max_{\substack{\mu_{0,l}\\ l=\overline{1,L_0}}}. \quad (15)$$

Муниципальный транспорт перевозит пассажиров, которые не использовали маршрутные такси (15).

Доказательство существования решения. Таким образом, построим игру между муниципальным и частным транспортом, а также пассажиропотоками:

$$\Gamma=\left\langle \begin{array}{l}1+K+N^2,\{\mu_{k,r}\}_{\substack{k=\overline{0,K},\\ r=\overline{1,L_k}}},\{p_{i,j}\}_{\substack{i=\overline{1,N}\\ j=\overline{1,N}}},\{H_k\}_{k=\overline{0,K}},\\ \{-G_{i,j}\}_{\substack{i=\overline{1,N}\\ j=\overline{1,N}}}\end{array}\right\rangle.$$

В данном случае рассматривается бескоалиционная игра операторов пассажирского транспорта и пассажиров. Недостаток публикаций в области применения теории игр отмечен в [8]. Существующие работы в данном направлении рассматривают не более двух участников игры – двух транспортных операторов [9, 10]. Теоретические аспекты оптимизации работы общественного транспорта в условиях конфликта интересов с применением теории игр рассмотрены в [11], а набор моделей, описывающих конфликтные ситуации, в [1].

Теорема. Игра пассажиропотоков и транспортных операторов Γ имеет ситуацию равновесия Нэша.

► Рассмотрим условия теоремы существования ситуации равновесия по Нэшу [12 – 14].

1. *Множество стратегий каждого игрока непусто, выпукло и компактно*.

Очевидно, что множество стратегий пассажиропотоков между каждыми остановочными пунктами i и j непусто, выпукло и компактно, так как стратегии (вероятности) находятся в интервале [0,1].

Интенсивность движения транспорта ограничена снизу, так как интенсивность потоков транспортных средств, движущихся по каждому маршруту, не отрицательна:

$$\mu_{k,l}\ge 0,\ l=\overline{1,L_k},\ k=\overline{0,K}.$$

Ограничение сверху экономической целесообразностью. Для каждого оператора существует возможность отказаться от эксплуатации маршрута, тогда прибыль составит $H_k=0$, соответственно, это минимальная прибыль. Найдем максимальное количество выполняемых рейсов, которое может дать нулевую прибыль (при условии, что все пассажиры предпочтут маршруты данного оператора)

$$\overline{\mu_{k,l}}=\frac{\beta\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{N}\lambda_{i,j}A_{i,j}^{k,l}}{\alpha_{k,l}}.$$

Таким образом, решение находится в интервале $\left[0,\overline{\mu_{k,l}}\right]$.

Данные ограничения обеспечивают выполнение условия теоремы для стратегий транспортных операторов. Также интенсивность движения по муниципальным маршрутам конечна в силу ограниченных финансовых возможностей бюджета.

2. *Функция выигрыша каждого игрока непрерывна по стратегиям всех игроков и квазивогнута по собственным стратегиям.*

Непрерывность обеспечивается видом функции выигрыша. Квазивогнутость обеспечивается более сильным утверждением – выпуклостью вверх. Утверждение, описанное выше, доказывает выпуклость вниз функций затрат пассажиропотоков. Но для пассажиропотоков описана функция затрат, а не выигрыша, поэтому функция выигрыша ($-G_{i,j}$) выпукла вверх.

Представим функцию выигрыша в следующем виде:

$$H_k\left(\{\mu_{m,r}\}_{\substack{r=\overline{1,L_m}\\ m=\overline{0,K}}}\right)=\beta_1\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}p_{i,j}^{0}\lambda_{i,j}\left[1-\frac{\sum\limits_{m\neq k}\sum\limits_{r=1}^{L_m}A_{i,j}^{m,r}\mu_{m,r}}{\sum\limits_{m=1}^{K}\sum\limits_{r=1}^{L_m}A_{i,j}^{m,r}\mu_{m,r}}\right]-$$

$$-\sum_{l=1}^{L_k}\alpha_{k,l}\mu_{k,l}\,. \qquad (16)$$

Второе слагаемое линейно и не влияет на выпуклость функции. В первом слагаемом – константа и гипербола (числитель не зависит от стратегий игрока). Поэтому данная функция выпукла вверх по $\{\mu_{k,r}\}_{r=\overline{1,L_k}}$.

В случае $k=0$ формула прибыли (13) уже представлена в виде (16), поэтому доказательство вогнутости является очевидным.

Так как все условия теоремы выполнены, то в игре существует равновесие Нэша в чистых стратегиях. ◄

Аналогично доказывается существование равновесия Нэша при нарушении условия (12).

Заключение. Основным результатом работы является доказательство существования оптимального решения (равновесия) задачи управления двумя подсистемами городского пассажирского транспорта. В условиях расслоения населения до доходам экономически обосновано существование двух подсистем (обычная и с повышенной стоимостью проезда).

Существование равновесия позволяет эффективно решать задачи управления двумя подсистемами транспорта для различных российских городов. Важной особенностью является возможность учета дублирования маршрутных схем на участках улично-дорожной сети. Равновесные интенсивности движения (обратная величина к интервалу движения) позволят составить наиболее выгодное расписание движения для любого транспортного оператора.

Литература

1. Корягин М.Е. Равновесные модели системы городского пассажирского транспорта в условиях конфликта интересов. Новосибирск: Наука, 2011. 140 с.

2. Михайлов А.С. Управление рынком перемещений городского населения. Алматы: Гылым, 2003. 238 с.

3. Коробов С.А. Совершенствование пассажироперевозок на основе выбора рациональной структуры внутригородских перемещений: автореф. дис. … канд. техн. наук. Тюмень, 2009. 23 с.

4. Корягин М.Е., Нестерова А.А. Влияние наличия автомобилей в семье на выбор способа передвижения // Вестн. Иркут. гос. техн.ун-та. 2011. № 1. С. 104–108.

5. Koryagin M.E. Competition of public transport flows // Automation And Remote Control. 2008. Vol. 69(8). P. 1380-1389.

6. Корягин М.Е. Минимизация суммарных затрат времени пассажиров и городского пассажирского транспорта // Устойчивость и процессы управления: тр. междунар. конф., 29 июня – 1 июля 2005 г. Т.3: Секция 9-10. СПб., С. 1557-1565.

7. Wichiensin M. An Inter-Modal Equilibrium Model of Privatised Transit in Combination with Road-Based Congestion Charging. PhD Thesis of Muanmas Wichiensin, submitted to Centre for Transport Studies Department of Civil and Environmental Engineering Imperial College London, 2007. 210 p.

8. Hollander Y., Prashker J.N. The Applicability of Non-Cooperative Game Theory in Transport Analysis // Transportation. 2006. Vol. 33 (5). P. 481-496.

9. Evans A. Competition and the Structure of Local Bus Markets // Journal of Transport Economics and Policy, 1990. Vol. 34(3). P. 255-281.

10. Fernandes E., Marcotte P. Operators-Users Equilibrium Model in a Partially Regulated Transit System // Transportation Science. 1992. Vol. 26(2). P. 93-105.

11. Корягин М.Е. Теоретические аспекты оптимизации управления движением городского транспорта // Вестн. Кузбас. гос. техн. ун-т. 2012. № 1. С. 125-131.

12. Новиков Д.А., Губко М.В. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. 148 с.

13. Debreu G.A. Social Equilibrium Existence Theorem // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1952. Vol. 38. P. 886-893.

14. Nash J. Non-Cooperative Games // The Annals of Mathematics. 1951.Vol. 2. P. 286-295.

References

1. Koryagin M.E. The equilibrium model of urban passenger transport in the context of the conflict of interest. Novosibirsk: Nauka. 2011. 140 s.

2. Mikhailov A.S. Market management of the urban population movement. Almaty: Gylym. 2003. 238 s.

3. Korobov S.A. Improving of the passenger traffic based on the choice of a rational structure of intraurban movements: dis. … kand. tekhn. nauk. Tyumen. 2009. 23 s.

4. Koryagin M.E., Nesterova A.A. Effect of car availability in a family to choose the mode of transportation // Vestn. Irkut. gos. tekhn. un-ta. 2011. № 1. S. 104–108.

5. Koryagin M.E. Competition of public transport flows // Automation and Remote Control. 2008. Vol. 69(8). Pp. 1380-1389.

6. Koryagin M.E. Minimization of total losses of time of passengers and urban passenger transport // Ustoychivost' i protsessy upravleniya: tr. mezhdunar. konf. T. 3. SPb.: SPbGU. 2005. S. 1557-1565.

7. Wichiensin M. An Inter-Modal Equilibrium Model of Privatised Transit in Combination with Road-Based Congestion Charging. PhD Thesis of Muanmas Wichiensin, submitted to Centre for Transport Studies Department of Civil and Environmental Engineering Imperial College London. 2007. 210 p.

8. Hollander Y., Prashker J.N. The Applicability of Non-Cooperative Game Theory in Transport Analysis // Transportation. 2006. Vol. 33 (5). Pp. 481-496.

9. Evans A. Competition and the Structure of Local Bus Markets // Journal of Transport Economics and Policy, 1990. Vol. 34(3). Pp. 255-281.

10. Fernandes E., Marcotte P. Operators-Users Equilibrium Model in a Partially Regulated Transit System // Transportation Science, 1992. Vol. 26 (2). Pp. 93-105.

11. Koryagin M.E. Theoretical aspects of the traffic control optimization of intercity public transportation // Vestn. Kuzbas. gos. tekhn. un-ta. 2012. № 1. S. 125-131.

12. Novikov D.A., Gubko M.V. The game theory to control organizational systems. M.: Sinteg, 2002. 148 s.

13. Debreu G. A Social Equilibrium Existence Theorem // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1952. Vol. 38. Pp. 886-893.