References

1. Luzgin V.V. Sistemnyj analiz diagnosticheskoj in-formacii promyshlennyh ob#ektov // Vestnik moskovskogo avtomobil'no-dorozhnogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta (MADI). M. 2010. № 4 (23). S. 73.
2. Luzgin V.V. Struktura, formirovanie i funkcionirovanie jevristicheskih programm diagnostirovanija promyshlennyh obektov // Vestnik moskovskogo avtomobil'no-dorozhnogo instituta (gosudar-stvennogo tehnicheskogo universiteta). M. 2009. № 4 (19). S. 25-29.
3. Luzgin V.V., Govorushhenko N.Ja. Metod diagnostirovanija linejnyh di-namicheskih zven'ev i sistem, // Sb. «Avtomobil'nyj transport», vyp. 11, «Tehnika», Kiev. 1974. S. 62-67.
4. Luzgin V.V., Koltygin D.S., Patrusova A.M. Vtorichnaja identifikacija (VtorId v 1.00), // Avtorskoe svidetel'stvo ob oficial'noj registracii programmy dlja JeVM. N 2003612203 25.09.2003.
5. Luzgin V.V., Larionov A.S., Panasov V.V. Prikladnoj metod issledovanija dina-miki sistem avtomaticheskogo regulirovanija s zapazdyvaniem // Nauchnyj vestnik NGTU. Novosibirsk. 2008. № 2. S.170.
6. Luzgin V.V. Identifikacija dinamiki vtorichnogo naprjazhenija transformatora vysokovol'tnyh impul'sov s uchjotom zapazdyvanija i nestacionarnosti // Sovremennye tehnologii. Sistemnyj analiz. Irkutsk. 2011. № 4. S. 130.

УДК 517.929: 517.93 /.935

Разрешимость нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с последействием и его приложения

А.С. Ларионов[a], И.А. Никишина[b]

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия
[a] larios84@yandex.ru, [b] ipa_Q@mail.ru
Статья поступила 19.05.2013, принята 12.08.2013

Рассматривается нелинейное функционально-дифференциальное уравнение первого порядка с локально определенным оператором (оператором Немыцкого) в правой части, не обладающим, вообще говоря, свойством монотонности. Предлагаются достаточные условия разрешимости в некотором конусном отрезке краевой задачи и задачи Коши. В основе доказательства теорем о существовании (и единственности) решения нелинейных задач лежит редукция исходного дифференциального уравнения к эквивалентному в некотором смысле интегральному уравнению Гаммерштейна с монотонным вполне непрерывным оператором. Для таких уравнений справедливо утверждение о разрешимости и о существовании упорядоченной пары решений. Редукция к уравнению с монотонным оператором оказывается возможной, если функция Грина некоторой вспомогательной линейной краевой задачи (функции Коши соответствующего линейного функционально-дифференциального уравнения) сохраняет свой знак. Полученные в первой части статьи результаты применяются для исследования динамических процессов, протекающих в экономике, биологии, педагогике. В частности, изучается динамика основных производственных фондов на предприятии с учетом запаздывания в процессе освоения капитальных вложений. При этом предполагается, что поступление инвестиций носит нелинейный характер. Исследуется также нелинейная задача из области динамики популяции, учитывающая временные запаздывания (модель Хатчинсона-Райта): приводятся достаточные условия существования ограниченного решения функционально-дифференциальной модели.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, математическая модель, монотонный оператор, экономика, биология.

Solvability of a nonlinear functional differential equation of the first order with aftereffect and its applications

A.S. Larionov[a], I.A. Nikishina[b]

Bratsk State University, 40 Makarenko st., Bratsk, Russia
[a] larios84@yandex.ru, [b] ipa_Q@mail.ru
Received 19.05.2013, accepted 12.08.2013

In this paper, a nonlinear functional differential equation of the first order with a locally defined operator (Nemytsky's operator) on the right-hand side is considered. Generally speaking, the operator doesn't possess the property of monotonicity. The sufficient solvability conditions at some cone segment of the boundary value problem and the Cauchy's problem are proposed. The proof of the theorems on the existence (and uniqueness) of the nonlinear problems solution is based on the reduction of the initial differential equation to an equivalent, in some sense, Hammerstein's integral equation with a monotone completely continuous operator. For such equations, the statement of solvability and the existence of the solutions ordered pair is true. The reduction to the equation with a monotone operator is possible if Green's function of some auxiliary linear problem (Cauchy's function of the corresponding linear functional differential equation) retains its sign. The results obtained in the first part of the paper are used for the research of dynamic processes in Economics, *Biology, Pedagogics. In particular, the dynamics of the basic production assets of an enterprise taking into account the delay in the process of capital investment is studied. At the same time, it is assumed that the nature of the investment flow is nonlinear. The nonlinear problem from the field of population dynamics taking into consideration time delay (the model of Hutchinson-Wright) is investigated as well. The sufficient conditions for the existence of bounded solutions of a functional differential model are given.*

Keywords: functional differential equation, mathematical model, monotone operator, Economics, Biology.

Для изучения процессов, протекающих в различных областях практической деятельности, широко используются методы математического моделирования. Длительное время средством математического описания динамических процессов служили обыкновенные дифференциальные уравнения. Однако стремительное развитие в середине XX века электротехники, механики, биологии, экономики, теории автоматического управления, экологии, химической технологии, иммунологии и других отраслей науки и техники привело к постановкам таких прикладных задач, в которых требуется учитывать влияние на процесс его предшествующих состояний – «предыстории». В этом случае удовлетворительной математической моделью является естественное обобщение [1] дифференциального уравнения – функционально-дифференциальное уравнение (ФДУ). Теория таких уравнений стала интенсивно развиваться, начиная с 40-х годов прошлого века. Отметим здесь монографии Э. Пинни, А.Д. Мышкиса, Р. Беллмана и К. Кука, Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина, Дж. Хейла, Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Р.Ф. Рахматуллиной и обзорные статьи [2], [3].

Важное место в теории ФДУ занимают нелинейные краевые и начальные задачи. Такие задачи естественно возникают при моделировании реальных процессов в том случае, когда линейные модели дают слишком грубое описание или вовсе невозможны. К настоящему времени наиболее разработана теория нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений без отклонения аргумента (см., например, монографию [4], обзоры [5], [6] и имеющуюся там библиографию). Сравнительно недавно стала развиваться теория нелинейных задач и для ФДУ благодаря работам [7] – [10].

Основной вопрос в теории нелинейных краевых и начальных задач – это вопрос о разрешимости таких задач. Одним из эффективных методов доказательства существования решения нелинейной задачи является, как отмечается в обзоре [11], монотонный итеративный метод. В основе этого метода лежит редукция исходной задачи к уравнению $x = Ax$ с монотонным оператором A, определенным на некотором частично упорядоченном множестве. Напомним [1], что оператор A называется изотонным, если из $x_1 \le x_2$ следует, что $Ax_1 \le Ax_2$, и антитонным, если $Ax_1 \ge Ax_2$. Вспомогательным аппаратом при таком подходе является метод дифференциальных неравенств (метод нижних и верхних решений). Распространение на ФДУ упомянутого метода изучения нелинейных задач потребовало специальных исследований условий сохранения знака функции Грина вспомогательных линейных краевых задач (функции Коши соответствующего линейного уравнения в случае начальной задачи).

В предлагаемой статье доказываются утверждения о разрешимости квазилинейной краевой задачи для дифференциального уравнения первого порядка с запаздывающим аргументом. Эти утверждения применяются для изучения динамических процессов, протекающих в экономике, биологии и в педагогике.

Будем пользоваться следующими обозначениями. $C = C[a,b]$ – банахово пространство непрерывных функций $x:[a,b] \to R$; $D = D[a,b]$ – банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a,b] \to R$; $L_p = L_p[a,b]$ – банахово пространство суммируемых на $[a,b]$ со степенью $p,\ 1 \le p < \infty$ функций $z:[a,b] \to R$; $L_\infty = L_\infty[a,b]$ – банахово пространство измеримых ограниченных в существенном функций $z:[a,b] \to R$.

Будем предполагать, что во всех пространствах естественным образом введены метрика и полуупорядоченность.

Рассмотрим уравнение:

$$(\Lambda x)(t) \equiv \dot{x}(t) + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)\, x_{h_k}(t) = f\left(t, x_{h_1}(t), \dots, x_{h_m}(t)\right), \quad (1)$$

$$t \in [a,b],$$

где

$$x_{h_k}(t) = \begin{cases} x[h_k(t)], & \text{если } h_k(t) \in [a,b], \\ 0, & \text{если } h_k(t) \notin [a,b]. \end{cases}$$

В уравнении (1) $b_k \in L_p,\ k = 1,2,\dots,m$; h_k – измеримые функции, $h_k(t) \le t$ при почти всех $t \in [a,b],\ k = 1,2,\dots,m$; функция f удовлетворяет условиям Каратеодори.

Под решением уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную функцию x, удовлетворяющую этому уравнению при почти всех $t \in [a,b]$.

Обозначим $[v,z] = \{x \in L_\infty : v \le x \le z\}$.

Будем говорить [1], что функция f удовлетворяет условию $L^1\left(\prod_{k=1}^{m}[v_{h_k}, z_{h_k}]\right)$ $\left(L^2\left(\prod_{k=1}^{m}[v_{h_k}, z_{h_k}]\right)\right)$, если существуют такие функции $r_k^1(t)$ $\left(r_k^2(t)\right)$, $r_k^1, r_k^2 \in L_p$, $k = 1,2,\dots,m$, что оператор Немыцкого (локально определенный оператор [1]) $M^1:[v, z] \to L_p$ $\left(M^2:[v, z] \to L_p\right)$, определяемый равенством

$$M^1(t, u_1(t), \dots, u_m(t)) = f(t, u_1(t), \dots, u_m(t)) + \sum_{k=1}^{m} r_k^1(t) u_k(t)$$

$$\left(M^2(t,\ u_1(t),\dots,u_m(t)) = f(t,u_1(t),\dots,u_m(t)) + \sum_{k=1}^{m} r_k^2(t)u_k(t) \right)$$

является изотонным (антитонным).

Без ограничения общности считаем в дальнейшем $r_k^1(t) \ge 0$, $r_k^2(t) \le 0$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Дополнительное условие для уравнения (1) зададим в виде равенства:

$$\ell x = \alpha,\ \ \alpha \in R, \qquad (2)$$

где $\ell : D \to R$ – линейный ограниченный функционал.

Приведем утверждения о разрешимости краевой задачи (1), (2).

Теорема 1. Пусть существуют функции $v, z \in L_\infty$ такие, что $v \le z$ и выполняются неравенства:

$$(\Lambda v)(t) \le f(t,\ v_{h_1}, \dots, v_{h_m}(t)), \qquad (3)$$

$$(\Lambda z)(t) \ge f(t, z_{h_1}, \dots, z_{h_m}(t)), \qquad (4)$$

$$\ell v \le \ell x \le \ell z. \qquad (5)$$

Пусть, далее, функция f удовлетворяет условию $L^1\left(\prod_{k=1}^{m}[v_{h_k},\ z_{h_k}]\right)$ с такими коэффициентами $r_k^1(t)$, $k = 1,\dots,m$, что краевая задача

$$(\Lambda x)(t) + \sum_{k=1}^{m} r_k^1(t)x_{h_k}(t) = \eta^1(t),\ \ \ell x = 0$$

однозначно разрешима, и ее функция Грина $G^1(t,s)$ положительна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$. Тогда существует решение x краевой задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам

$$v \le x \le z\ .$$

Если, кроме того, функция f удовлетворяет условию $L^2\left(\prod_{k=1}^{m}[v_{h_k},\ z_{h_k}]\right)$ с такими коэффициентами $r_k^2(t)$, $k = 1,\dots,m$, что краевая задача

$$(\Lambda x)(t) + \sum_{k=1}^{m} r_k^2(t)x_{h_k}(t) = \eta^2(t),\ \ \ell x = 0 \qquad (6)$$

однозначно разрешима, и ее функция Грина $G^2(t,s)$ положительна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$, то это решение x единственно.

Доказательство. Перепишем задачу (1), (2) в виде

$$(\Lambda_1 x)(t) \equiv (\Lambda x)(t) + \sum_{k=1}^{m} r_k^1(t)x_{h_k}(t) =$$

$$= M^1(t, x_{h_1}(t), \dots\dots, x_{h_m}(t)),\ \ \ell x = \alpha,\ \alpha \in R. \qquad (7)$$

Задача (7) эквивалентна уравнению

$$x(t) = \int_a^b G^1(t,s)M^1(s, x_{h_1}(s), \dots, x_{h_m}(s))ds + \gamma^1(t), \qquad (8)$$

где $\gamma^1(t)$ – решение полуоднородной задачи

$$(\Lambda_1 x)(t) = 0,\ \ \ell x = \alpha\ .$$

Определим оператор A равенством

$$(Ax)(t) = \int_a^b G^1(t,s)M^1(s, x_{h_1}(s), \dots, x_{h_m}(s))ds + \gamma^1(t)\ .$$

Тогда уравнение (8) примет вид $x = Ax$, где оператор $A : C \to C$ – вполне непрерывен и изотонен.

Покажем, что из неравенства (3) и неравенства $\ell v \le \ell x$ следует $v \le Av$. Действительно, перепишем неравенство (3) в виде

$$(\Lambda_1 v)(t) \le M^1(t, v_{h_1}(t), \dots, v_{h_m}(t))\ .$$

Отсюда

$$v(t) \le \int_a^b G^1(t,s)M^1(s, v_{h_1}(s), \dots, v_{h_m}(s))ds + v^1(t), \qquad (9)$$

где $v^1(t)$ – решение полуоднородной задачи

$$(\Lambda_1 x)(t) = 0,\ \ \ell x = \ell v.$$

Обозначим $\Theta^1(t) = \gamma^1(t) - v^1(t)$. Тогда $\Theta^1(t)$ – нетривиальное решение уравнения $\Lambda_1 x = 0$. Так как функция Грина задачи

$$(\Lambda_1 x)(t) = \eta^1(t),\ \ \ell x = 0$$

сохраняет знак в квадрате $[a,b]\times[a,b]$, то нетривиальное решение уравнения $\Lambda_1 x = 0$ не обращается в нуль на $[a,b]$. Но тогда в силу неравенства $\ell v \le \ell x$ имеем $\gamma^1(t) \ge v^1(t)$. Следовательно, неравенство (9) принимает вид

$$v(t) \le \int_a^b G^1(t,s)M^1(s, v_{h_1}(s), \dots, v_{h_m}(s))ds + \gamma^1(t)$$

или $v \le Av$. Неравенство $z \ge Az$ показывается аналогично. Таким образом, оператор A переводит множество $[v,z]$ в себя. Следовательно, на основании принципа Шаудера существует неподвижная точка оператора A, которая является решением задачи (1), (2), причем $x \in [v,z]$.

Доказательство единственности решения задачи (1), (2) основано на редукции исходной задачи к уравнению с антитонным оператором.

Другие достаточные условия существования решения краевой задачи (1), (2) приведены в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть существуют функции $v, z \in L_\infty$

такие, что $v \le z$ и выполняются неравенства

$$(\Lambda v)(t) \le f\left(t,\ z_{h_1}(t), \ldots, z_{h_m}(t)\right),$$

$$(\Lambda z)(t) \ge f\left(t,\ v_{h_1}(t), \ldots, v_{h_m}(t)\right),$$

$$\ell v \le \ell x \le \ell z .$$

Пусть, далее, функция f удовлетворяет условию $L^2\left(\prod_{k=1}^{m}\left[v_{h_k},\ z_{h_k}\right]\right)$ с такими коэффициентами $r_k^2(t),\ k = 1,\ldots,m$, что краевая задача (6) однозначно разрешима, и ее функция Грина $G^2(t,s)$ положительна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$. Тогда существует решение x задачи (1), (2), удовлетворяющее неравенствам

$$v \le x \le z .$$

Доказательство теоремы 2 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1 и основано на редукции задачи (1), (2) к уравнению с антитонным оператором.

Замечание 1. При доказательстве теорем 1 и 2 существенным является вопрос о знакоопределенности функции Грина соответствующей линейной краевой задачи (функции Коши $C(t,s)$ линейного уравнения в случае краевого условия $\ell x = x(a)$). Установлению эффективных признаков знакопостоянства функции Грина и функции Коши посвящены работы [12], [13].

Замечание 2. В случае если функция $f(t,u),\ u = (u_1,\ldots,u_m)$ обладает свойством монотонности по u, из теорем 1 и 2 вытекает ряд следствий. Справедливо, например,

следствие 1. Пусть существуют функции $v, z \in L_\infty$ такие, что $v \le z$ и выполняются неравенства (3)-(5). Пусть функция $f(t,u)$ не убывает по $u,\ u = (u_1,\ldots,u_m)$, краевая задача $\Lambda x = \eta^1,\ \ell x = 0$ однозначно разрешима, и ее функция Грина положительна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$. Тогда существует решение x краевой задачи (1), (2).

Если, кроме того, функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию $L^2\left(\prod_{k=1}^{m}\left[v_{h_k},\ z_{h_k}\right]\right)$ с такими коэффициентами $r_k^2(t),\ k = 1,\ldots,m$, что краевая задача (6) однозначно разрешима, и ее функция Грина положительна в квадрате $[a,b]\times[a,b]$. Тогда это решение x единственно в конусном отрезке $[v,z]$.

Рассмотренная динамическая модель, с одной стороны, представляет собой конкретную реализацию абстрактных ФДУ. С другой стороны, она охватывает достаточно широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных процессов с учетом эффекта последействия (запаздывания). Рассмотрим несколько таких моделей из экономики, биологии, педагогики, используя результаты, полученные при исследовании задачи (1), (2).

Модель конкурентной борьбы. При оценке рыночной ситуации в условиях кризиса с периодом (запаздыванием) $\tau > 0$ часто используется модель Лотки-Вольтерры (см., например, [14]).

Пусть $x_m(t)$ – общее число фирм, действующих в данном сегменте рынка в данный момент времени, а $x(t)$ – число фирм, находящихся в предбанкротном состоянии, так что $(x_m(t) - x(t))$ – число фирм, которые могут быть охвачены кризисом в текущий момент времени.

Учитывая запаздывание из-за развития кризиса, уравнение, описывающее динамику разорения фирм, можно записать в виде:

$$\dot{x}(t) + \mu(t)x(t) - cx(t-\tau) = 0,\ t \in [a,b]\ , \qquad (10)$$

где μ – вероятность разорения фирм, находящихся в предкризисном состоянии в единицу времени; c – темп выхода фирм, находящихся в предбанкротном состоянии, из кризиса.

Рассмотрим нелинейное обобщение уравнения (10)

$$(\Lambda x)(t) \equiv \dot{x}(t) + \mu(t)x(t) = f\left(t,\ x(t-\tau)\right) \qquad (11)$$

с условием

$$\ell x = x(a) = \alpha,\ \alpha \in R . \qquad (12)$$

Полагая $v(t) = 0,\ z(t) = \gamma,\ \gamma - \text{const} > 0$, получим утверждение о разрешимости задачи (11), (12).

Теорема 3. Пусть функция $f(t,u)$ не убывает по u и $f(t,0) = 0,\ \mu(t) \le \frac{1}{\gamma} f(t,\gamma)$. Тогда существует решение x краевой задачи (11), (12), удовлетворяющее неравенствам $0 \le x \le \gamma$.

Если, кроме того, функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию $L^2[0,\ \gamma]$, то это решение x единственно.

Модель динамики основных производственных фондов на предприятии. Всюду ниже рассматриваем уравнение (1) на полуоси $[0,\ \infty)$, дополнительно предполагая при этом, что уравнение (1) разрешимо на каждом конечном отрезке $[0,\ b] \subset [0,\ \infty)$.

Приведем еще один пример использования уравнения (1) в качестве математической модели экономической динамики.

Важным компонентом сферы материального производства (производственной сферы) является создание и реконструкция основных производственных фондов (ОПФ) – здания, сооружения, дороги, заводы, оборудование и т. д. – то есть все, что способно в течение многих лет использоваться в процессе экономической деятельности. Вследствие амортизации ОПФ со временем приходится обновлять. При этом важно учитывать неизбежную задержку τ во времени от момента выделения средств на эти цели к моменту введения новых ОПФ.

Эта задержка возникает по ряду причин. К примеру, из-за высокой стоимости фондов не всегда удается сразу выделить на эти цели нужную сумму, поэтому предприятие вынуждено накапливать эту сумму. И даже при наличии необходимой суммы требуется время на монтаж оборудования, его наладку и пуск в эксплуатацию.

В литературе (см., например, [9]) наиболее часто встречается вариант моделирования запаздывания в процессе освоения капитальных вложений, предполагающий наличие промежутка времени τ, по прошествии которого капиталовложения превращаются в основные фонды. В этом варианте моделирования обновления фондов математическая модель прироста ОПФ в непрерывном времени описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{K}(t) = I(t-\tau) - \mu K(t), \tag{13}$$

где $K(t)$ – объем ОПФ в текущий момент времени; I – инвестиции в развитие; τ – промежуток времени, по истечении которого происходит прирост ОПФ; μ – коэффициент амортизации.

Пусть в уравнении (13) поступление инвестиций носит нелинейный характер, например, $I(t-\tau) = \sin K(t-\tau)$. Тогда уравнение (13) перепишется в следующем виде:

$$\dot{K}(t) + \mu K(t) = \sin K(t-\tau). \tag{14}$$

Полученное уравнение (14) является частным случаем уравнения (1), поэтому его исследование проведем, используя теорему 1.

Рассмотрим задачу Коши:

$$(\Lambda K)(t) \equiv \dot{K}(t) + \mu K(t) = \sin K(t-\tau), \quad t \in [0, \infty), \tag{15}$$

$$K(0) = \alpha. \tag{16}$$

В качестве функций v и z выбираем $v \equiv 0$, $z \equiv 1$, тогда функция $\sin K(u)$ удовлетворяет условию $L^1[0, 1]$ с коэффициентом $r^1(t) = 1$.

Справедливость неравенства $(\Lambda v)(t) \leq \sin v(t-\tau)$ очевидна. Неравенство $(\Lambda z)(t) \geq \sin z(t-\tau)$ выполняется при $\mu \geq \sin 1$.

Таким образом, справедлива

теорема 4. Пусть функция Коши $C(t, s)$ уравнения

$$\dot{K}(t) + \mu K(t) + K(t-\tau) = \eta^1(t), \tag{17}$$

положительна в области $\Delta = \{(t, s): 0 \leq s \leq t < \infty\}$, и выполняются неравенства $0 \leq \alpha \leq 1$, $\mu \geq \sin 1$.

Тогда существует решение K задачи (15), (16), удовлетворяющее неравенствам $0 \leq K \leq 1$.

Для доказательства теоремы 4 достаточно проверить выполнение условий теоремы 1.

Таким образом, можно утверждать, что динамика ОПФ представляет собой интегральную кривую, заключенную между $v \equiv 0$ и $z \equiv 1$.

Замечание 3. Условия знакопостоянства функции Коши уравнения (17) приведены, например, в работе [13].

Модель динамики процесса обучения. В работе [15] приведена математическая модель с запаздыванием («с памятью») динамики процесса обучения

$$\dot{x}(t) + Kx(t - T_3) = b(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{18}$$

где $x(t)$ – количественная характеристика усвоенной в процессе обучения информации; $b(t)$ – количественная характеристика входной информации; K – индивидуальный коэффициент восприятия информации; T_3 – индивидуальное время запаздывания в восприятии информации.

В работе [15] отмечается, что коэффициент K носит характер логарифмической зависимости от объема накапливаемых знаний x. Тогда уравнение (18) принимает вид:

$$(\Lambda x)(t) \equiv \dot{x}(t) + \frac{1}{\tau}\ln\left[a + x^2(t-\tau)c\right]x(t-\tau) = b(t), \tag{19}$$

где a, c – const, причем $a > 0$, $c > 0$; $t \in [0, \infty)$.

Начальное условие запишем в виде:

$$x(0) = \alpha, \ \alpha \in R. \tag{20}$$

Исследование задачи (19), (20) можно проводить, используя приведенные выше результаты. Отметим, в частности, что если выполнено неравенство $a + x^2(t-\tau)c > 1$, то к задаче (19), (20) применимо следствие 1.

Модель динамики популяции (модель Хатчинсона-Райта). Рассмотрим уравнение Хатчинсона-Райта [16]:

$$\dot{x}(t) = \mu\left[1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right]x(t), \ \mu > 0, \ \tau > 0, \ t \in [0, \infty). \tag{21}$$

Здесь $x(t)$ – численность популяции в текущий момент времени t; K – максимально возможная стационарная численность популяции. Переходя к безразмерным единицам, перепишем уравнение (21) в виде:

$$\dot{x}(t) - \mu x(t) = -\frac{\mu}{K}x(t)x(t-\tau) \tag{22}$$

и сформулируем утверждение о разрешимости уравнения (22) с начальным условием:

$$x(0) = \alpha. \tag{23}$$

Теорема 5. Пусть выполнены неравенства $\mu < 1$, $K \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon \leq \alpha \leq 1$. Тогда задача (22), (23) имеет решение x, удовлетворяющее неравенствам $\varepsilon \leq x \leq 1$.

Для доказательства теоремы 4 достаточно проверить условия теоремы 2.

Рассмотренными примерами моделей динамических процессов не исчерпываются разнообразные приложения ФДУ (1). Давно известно, что дифференциальные уравнения, используемые в качестве моделей, обладают большой универсальностью. С другой стороны, многочисленность процессов, описываемых ФДУ, не может не повлиять на развитие теории таких уравнений.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений: монография. М.: Наука, 1991. 361 с.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Симонов П.М. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения // Вест. Удмур. ун-та, 2009. Вып. 1. С. 3-23.
3. Кордуняну К., Лакшмикантам В. Уравнения с неограниченным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1985. Т. 7. С. 5-44.
4. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений: моногр. Рига: Зинатне, 1978. 184 с.
5. Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Л. Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Итоги науки и техники: сб. ст. Сер. Математический анализ. М., 1987. Т. 30. С. 105-201.
6. Lakshmikantham V. The present state of the method of upper and lower solutions // Trends in theory and practice of nonlinear differential equations: proceedings of the International Conference. New Jork, 1983. P. 285-299
7. Азбелев Н.В. Краевые задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения: сб. ст. Киев, 1977. С. 5-11.
8. Максимов В.П. О некоторых нелинейных краевых задачах // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 3. С. 396-414.
9. Максимов В.П. Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений // Избр. тр. 2003. С. 306.
10. Брыкалов С.А. Некоторые признаки существования решений нелинейных краевых задач // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 6. С. 1297-1301.
11. Митропольский Ю.А., Лила С., Мартынюк А.А. О некоторых направлениях исследований В. Лакшмикантама по теории дифференциальных уравнений и их приложениям // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 4. С. 555-572.
12. Домошницкий А.И. О знакопостоянстве функции Грина периодической задачи для уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом // Функционально-дифференц. уравнения: сб. ст. Пермь, 1986. С. 17-20.
13. Березанский Л.М., Ларионов А.С. Положительность матрицы Коши линейного функционального уравнения // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 1. С. 1843 – 1854.
14. Копылов А.В., Просвиров А.Э. Динамическая модель конкуренции двух фирм на одном рынке // Успехи современного естествознания. 2003. № 8. С. 29-32.
15. Солодова Е.А. Перспективы развития высшего образования России на основе математического моделирования // Стандарты и мониторинг в образовании. 2000. № 5. С. 9-17.
16. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла: моногр. М.: Мир, 1985. 280 с.

References

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. Introduction to the theory of functional differential equations: monograph. M.: Nauka, 1991. 361 s.
2. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. The functional differential equations and their applications // Vestn. Udmur. un-ta, 2009. Vyp. 1. S. 3-23.
3. Corduneanu C., Lakshmikantam V. The equations with infinite time delays // Avtomatika i telemekhanica, 1985, V.7. S. 5-44.
4. Vasil’yev N.I., Klokov Yu.A. The fundamentals of the theory of boundary value problems of ordinary differential equations: monogr. Riga: Zinatne, 1978. 184 s.
5. Kighuradze I.T., Schechter B.L. Singular boundary value problems for ordinary differential equations of the second order // Itogi nauki i tekhniki: sb. st. Ser. Matem. analiz / VINITI. M., 1987, V. 30. S. 105-201.
6. Lakshmikantham V. The present state of the method of upper and lower solutions // Trends in theory and practice of nonlinear differential equations / Proceedings of the International Conference, New Jork. 1983. 285-299 pp.
7. Azbelev N.V. Boundary value problems for nonlinear functional differential equations // Differentsial’nye uravneniya. Kiev: Naukova Dumka, 1977. S. 5-11.
8. Maksimov V.P. On some nonlinear boundary value problems // Differentsial’nye uravneniya. 1983. V. 19, № 3. S. 396-414.
9. Maksimov V.P. The issues of the general theory of functional differential equations. Izbr. tr. Perm, 2003. 306 s.
10. Brykalov S.A. Some features of the existence of the solutions of nonlinear boundary value problems // Dokl. AN SSSR. 1985. V. 284, № 6. S. 1297-1301.
11. Mitropol’sky Y.A., Lila S, Martynyuk A.A. On some trends of V. Lakshmikantham’s investigations on the theory of differential equations and their applications // Differentsial’nye uravneniya. 1986. V. 22, № 4. S. 555-572.
12. Domoshnitsky A.I. On the sign constancy of Green's function for a periodic problem for the first order equations with deviating argument // Functsional’no-differentsial’nye uravneniya: sb. st. Perm, 1986. S. 17-20.
13. Berezansky L.M., Larionov A.S. The positivity of the Cauchy’s matrix for the linear functional equation // Differentsial’nye uravneniya. 1988. V. 24, № 1. S. 1843 - 1854.
14. Kopylov A.V., Prosvirov A.E. The dynamic competition model of the two firms in the same market // Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya. 2003, № 8 S. 29-32.
15. Solodova E.A. The perspective for the development of higher education in Russia on the basis of mathematical modeling // Standarty i monitoring v obrazovanii. 2000, № 5. S. 9-17.
16. Hessard B., Kazarinov N., Ven I. The theory and applications of the birth cycle bifurcation: monogr. M.: Mir, 1985. 280 s.