

## ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОВЕДЕНИЯ

УДК 621:534.834;886.6

### Обоснование и возможности метода определения динамических реакций в виброзащитных системах с объектом защиты в виде твердого тела

С.В. Белокобыльский<sup>1, a</sup>, С.В. Елисеев<sup>2, b</sup>

<sup>1</sup>Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

<sup>2</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

<sup>a</sup> rektor@brstu.ru, <sup>b</sup> eliseev\_s@inbox.ru

Статья поступила 15.01.2013, принята 20.04.2013

*Предложен метод определения динамических реакций в механических колебательных системах с твердым телом. В основу подхода положены представления о возможности построения структурной схемы эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления. Показано, что путем преобразований структурной схемы может быть выделена цепь обратной связи относительно рассматриваемого объекта, которая и представляет собой динамическую реакцию. Проведен сравнительный анализ на основе нескольких подходов в получении результатов. Показаны особенности метода при определении динамических реакций в точках твердого тела, контактирующих с упругими элементами системы. На основе предлагаемых исследований сделано предположение, что в механических колебательных системах, помимо обычных масс-инерционных, упругих и демпфирующих элементов, физически существуют (и могут быть реализованы в конкретных конструктивных формах) типовые элементарные звенья с передаточными функциями звена дифференцирования второго порядка (при этом передаточные функции могут иметь разные знаки).*

**Ключевые слова:** метод определения динамических реакций, механические колебательные системы, реакции твердого тела на упругих опорах, структурные интерпретации механических колебательных систем.

### Validation and capabilities of dynamical reactions method in vibration isolation systems having a solid body as protection object

S.V. Belokobyl'sky<sup>1, a</sup>, S.V. Eliseev<sup>2, b</sup>

<sup>1</sup>Bratsk State University, 40 Makarenko st., Bratsk, Russia

<sup>2</sup>Irkutsk State University of Railway Engineering, 15 Chernyshevskogo st., Irkutsk, Russia.

<sup>a</sup> rektor@brstu.ru, <sup>b</sup> eliseev\_s@inbox.ru

Received 15.01.2013, accepted 20.04.2013

*The dynamic reactions method in mechanical vibration systems having a solid body has been proposed. The approach is based on the idea of the possibility to construct a structural scheme dynamically equivalent to the automatic control system. It has been shown that by means of the structural scheme transformation, a feedback circuit of the object under consideration, which represents a dynamic response, can be singled out. A comparative analysis on the basis of several approaches to get results has been carried out. The features of the method for determining the dynamic reactions at the points of a rigid body contacting with elastic elements of the system have been demonstrated. Based on the proposed research, there has been made an assumption that apart from common baricentric, elastic and damping elements, there physically exist (and can be implemented in specific design forms) typical elementary units possessing the stage transfer function of a second-order differentiation, with the transfer functions having different signs.*

**Keywords:** dynamical reactions method, mechanical vibration systems, reactions of solid body on elastic supports, structural interpretations of mechanical vibration systems.

**Введение.** В задачах транспортной динамики большое распространение получили математические модели колебательных систем, учитывающие инерционные свойства твердого тела как элемента системы, обладающего двумя степенями свободы [1, 8]. В таких системах описание движения связано с использованием нескольких систем координат, каждая из которых от-

ражает специфику динамических взаимодействий элементов. Структурные интерпретации виброзащитных систем с объектами защиты в виде твердых тел рассмотрены, в частности, в работах [2 – 4]. Структурные подходы в исследовании динамики систем с твердыми телами позволяют отметить существенное значение, привносимое рычажными связями в формировании

динамического состояния объекта защиты с учетом особого характера связей между парциальными системами. Такие связи называются инерционными и в передаточных функциях межпарциальных связей содержат типовые элементы (или звенья) дифференцирования 2-го порядка [5]. При всей изученности динамических процессов упомянутых систем практически не освещался вопрос об определении динамических реакций, возникающих в местах присоединения к объекту защиты элементов виброзащитной системы, в том числе элементов из расширенного набора звеньев, а также в точках контакта элементов с опорными поверхностями.

В предлагаемой статье рассматриваются методологические основы построения математических моделей виброзащитных систем с твердыми телами, используемых для определения динамических реакций.

**I. Общие положения. Постановка задачи исследования.** Рассматриваемая система (рис. 1а, б) состоит из твердого тела массой  $M$ , имеющего момент инерции относительно центра тяжести  $I$  и опирающегося на упругие элементы с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$ . Система совершает малые колебания относительно положения статического равновесия, силы сопротивления считаются малыми. Внешние возмущения представлены гармоническими силами  $Q_1$  и  $Q_2$ , которые приложены по местам крепления упругих элементов, определяемых координатами  $y_1, y_2$ , а также кинематическими возмущениями от основания  $z_1$  и  $z_2$ . Положение центра тяжести определяется расстояниями  $l_1$  и  $l_2$ . Точки контактов упругих элементов обозначены, соответственно, для  $k_1$  через  $A_1$  и  $B_1$ , а для  $k_2$  – через  $A_2$  и  $B_2$ . Координаты центра тяжести и поворота твердого тела обозначены  $y$  и  $\varphi$ .

Полагая, что кинетическая и потенциальная энергии системы могут быть записаны в виде

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_2)^2, \quad (2)$$

запишем дифференциальные уравнения движения в системах координат  $y_1, y_2$  (при  $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0, Q_1 = 0, Q_2 = 0$ ), используя соотношения  $y = ay_1 + by_2, \varphi = c(y_2 - y_1)$ :

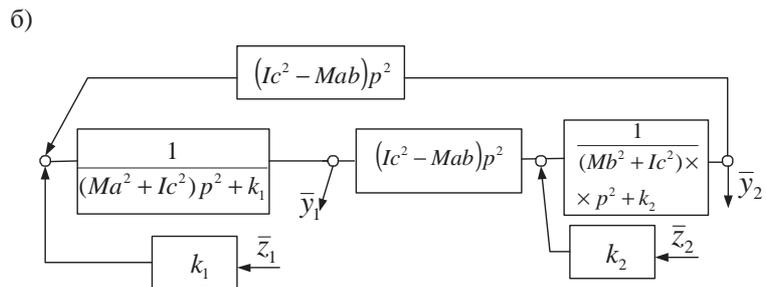
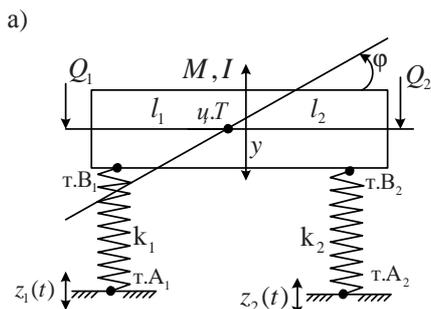


Рис. 1. Расчетная (а) и структурная (б) схемы виброзащитной системы с объектом защиты в виде твердого тела

$$\ddot{y}_1(Ma^2 + Ic^2) + k_1 y_1 + \ddot{y}_2(Mab - Ic^2) = k_1 z_1, \quad (3)$$

$$\ddot{y}_2(Mb^2 + Ic^2) + k_2 y_2 + \ddot{y}_1(Mab - Ic^2) = k_2 z_2, \quad (4)$$

где  $a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, c = \frac{1}{l_1 + l_2}$ .

Расчетная и структурная схемы системы представлены соответственно на рис. 1а, б. Передаточные функции системы при входном воздействии  $z_1(t)$  (гармоническая функция), при  $z_2 = 0, Q_1 = 0, Q_2 = 0$  по координатам  $y_1$  и  $y_2$  могут быть записаны

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{k_1 \bar{z}_1} = \frac{[(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2]}{A_0}, \quad (5)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{k_1 \bar{z}_1} = \frac{(Ic^2 - Mab)p^2}{A_0}; \quad (6)$$

где

$$A_0 = [(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1] \times [(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2] - [(Ic^2 - Mab)p^2]^2 - \quad (7)$$

характеристическое уравнение. Передаточная функция в общем случае содержит достаточную информацию для оценки параметров динамического состояния. Вопрос состоит в том, каким образом может быть использован аппарат структурных интерпретаций, основанных на преобразованиях Лапласа для определения динамических реакций в виброзащитной системе при ее взаимодействии с окружением. Отметим, что при получении передаточных функций (5), (6) использованы преобразования Лапласа ( $p = j\omega$  – комплексная переменная) [5, 9].

Задача исследования заключается в разработке метода определения динамических реакций, возникающих в точках взаимодействия с объектом защиты (точки  $B_1, B_2$ ) упругих элементов, а также между упругими элементами и опорными поверхностями (точки  $A_1$  и  $A_2$ ).

**II. Оценка динамических свойств.** Преобразуем передаточную функцию (5) к виду:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{k_1 \bar{z}_1} = \frac{1}{[(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1] - \frac{[(Ic^2 - Mab)p^2]^2}{(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2}}. \quad (8)$$

Используя (8), можно построить структурную схему, как показано на рис. 2а, которая затем преобразуется в схему на рис. 2б.

Структурная схема на рис. 2б содержит обратную отрицательную связь, что в физическом смысле можно рассматривать как некоторую пружину, называемую в [6] обобщенной.

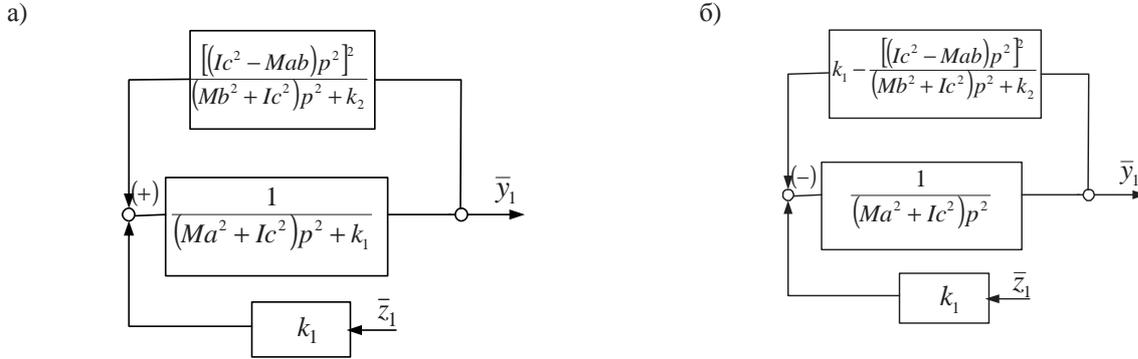


Рис. 2. Структурная схема, соответствующая расчетной схеме на рис. 1: а) обратная связь положительная; б) обратная связь отрицательная

Приведенная жесткость  $k_{np1}$  обобщенной пружины может быть найдена с учетом (8) в виде:

$$k_{np1}(p) = \frac{k_1 \left[ (Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2 \right] - \left[ (Ic^2 - Mab)p^2 \right]^2}{(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2}. \quad (9)$$

Из числителя (9) можно построить частотное уравнение:

$$-p^4(Ic^2 - Mab)^2 + k_1(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_1k_2 = 0 \quad (10)$$

или

$$-p^4 + p^2 \frac{k_1(Mb^2 + Ic^2)}{(Ic^2 - Mab)^2} + \frac{k_1k_2}{(Ic^2 - Mab)^2} = 0. \quad (10')$$

Введем  $p = j\omega$ , тогда (10') преобразуется к виду:

$$(\omega^2)^2 + \frac{k_1(Mb^2 + Ic^2)}{(Ic^2 - Mab)^2} \omega^2 - \frac{k_1k_2}{(Ic^2 - Mab)^2} = 0, \quad (11)$$

откуда

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k_1(Mb^2 + Ic^2)}{2(Ic^2 - Mab)^2} \pm \sqrt{\frac{k_1^2(Mb^2 + Ic^2)^2 + 4(Ic^2 - Mab)^2 k_1k_2}{4(Ic^2 - Mab)^2}}. \quad (12)$$

Из решения (11) следует, что числитель (9) будет иметь как минимум одну частоту, на которой  $k_{np1} = 0$ . Это значит, что звено с передаточной функцией

$\frac{1}{(Ma^2 + Ic^2)p^2}$  (рис. 2а) может образовать цепь из последовательно соединенных элементов  $k_1$  и  $\frac{1}{(Ma^2 + Ic^2)p^2}$ , что формирует передаточную функцию вида:

$$W_1^*(p) = \frac{\bar{y}_1}{k_1 \bar{z}_1} = \frac{1}{(Ma^2 + Ic^2)p^2}, \quad (12')$$

отражающую на частоте, определяемой по формуле (12), движение частного вида по координате  $\bar{y}_1$ . Если смещение точки  $B_1$  принять в виде  $\bar{y}_1 = W_1(p)\bar{z}_1$ , то динамическая реакция в точке  $A_1$  определится по формуле

$$\bar{R}_{A_1}(p) = \frac{\left[ (Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2 \right] k_1 \cdot k_1 \bar{z}_1}{A_0}. \quad (13)$$

Упругий элемент  $k_1$  (пружина) в данном случае может рассматриваться как виброзащитное устройство (ВЗУ), не содержащее инерционных элементов (по определению). Отметим, что в данной схеме кинематическое воздействие  $\bar{z}_1$  с учетом коэффициента жесткости пружины  $k_1$  образует внешнее воздействие, эквивалентное силовому возмущению, равному  $k_1 \bar{z}_1$ . То есть, при определенных условиях кинематическое возмущение из точки  $A_1$  может быть перемещено в точку  $B_1$  с учетом параметра жесткости  $k_1$ . Такая постановка вопроса получила, в частности, достаточно детальное отражение в работе [5]. В свою очередь, зная  $\bar{R}_{A_1}$  и  $\bar{z}_1$ , можно ввести в рассмотрение передаточную функцию при входном сигнале в виде «силового фактора»  $k_1 \bar{z}_1$  и выходном сигнале в виде реакции  $\bar{R}_{A_1}$ , тогда

$$\bar{W}_{R_{A_1}}(p) = \frac{\bar{R}_{A_1}}{k_1 \bar{z}_1} = \frac{\left[ (Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2 \right] k_1}{A_0}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что динамическая реакция в точке  $A_1$  дважды будет достигать максимума, поскольку из характеристического уравнения  $A_0 = 0$  (7) можно найти две частоты резонанса. Кроме того, при частоте динамического гашения колебаний по координате  $\bar{y}_1$

$$\omega_{дин}^2 = \frac{k_2}{(Mb^2 + Ic^2)} \quad (15)$$

возможен режим, при котором динамическая реакция будет равна нулю. При этом статическая компонента общей реакции имеет положительно значение. Такой режим называется режимом динамического гашения. То есть, равенство динамической реакции нулю совпадает с режимом динамического гашения, при котором координата движения  $\bar{y}_1$  становится неподвижной.

Если рассмотреть структурную схему на рис. 2б, то будет очевидно, что режим динамического гашения соответствует увеличению значения обратной отрицательной связи до  $\infty$ . Так как обратная связь (рис. 2б) соответствует в физическом плане обобщенной пружине, то ее приведенная жесткость (ее можно называть и динамической жесткостью [1, 5]) определится выражением (9).

При  $k_{нр1} \rightarrow \infty$  формируется режим, который соответствует частоте из (15), тогда  $y_1 \rightarrow 0$ . Это вполне согласуется с правилами преобразования соединений звеньев с использованием обратной связи.

**III. Динамическая реакция в контакте с объектом защиты.** Поскольку найдено значение  $k_{нр1}$  через выражение (9), то можно определить реакцию в точке  $B_1$ :

$$\begin{aligned} \bar{R}_{B_1} &= k_{нр1} \bar{y}_1 = k_{нр1} \frac{[(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2]}{A_0} \bar{z}_1 k_1 = \\ &= \frac{\left\{ k_1 [(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2] - (Ic^2 - Mab)^2 p^4 \right\} \bar{z}_1 k_1}{A_0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя (16), можно определить передаточную функцию при входной силе  $k_1 \bar{z}_1$  и выходном сигнале в виде динамической реакции  $R_{B_1}$ :

$$W_{B_1}(p) = \frac{\bar{R}_{B_1}}{k_1 \bar{z}_1} = \frac{k_1 [(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2] - (Ic^2 - Mab)^2 p^4}{A_0}. \quad (17)$$

При переходе к координате  $y_2$  воспользуемся передаточной функцией (6) и найдем, что

$$W_2'(p) = \frac{\bar{y}_2}{k_1 \bar{z}_1} = \frac{p^2 (Ic^2 - Mab)}{[(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2] - \frac{(Ic^2 - Mab)^2 p^4}{(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1}}. \quad (18)$$

Структурная схема системы по передаточной функции (18) приведена на рис. 3а, б. Схемы отличаются структурами, точнее, отображением пружины  $k_2$  в тех или иных цепях ( $k_2$  может быть помещена в прямой или обратной цепи связи).

Используя структурную схему на рис. 3б, определим приведенную жесткость  $k_{нр2}$  упругого элемента (или обобщенной пружины):

$$k_{нр2}(p) = \frac{k_2 [(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1] - [(Ic^2 - Mab)^2] p^4}{(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1}. \quad (19)$$

Приведенная жесткость достигает больших значений на частоте

$$\omega_{дин2}^2 = \frac{k_1}{Ma^2 + Ic^2}, \quad (20)$$

что обеспечивает режим динамического гашения и  $\bar{y}_2 \rightarrow 0$ . Вместе с тем, числитель (19) может рассматриваться как частотное уравнение

$$-p^4 (Ic^2 - Mab)^2 + k_2 (Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1 k_2 = 0, \quad (21)$$

корни которого при подстановке  $p = j\omega$  принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{k_2 (Ma^2 + Ic^2) \pm}{2(Ic^2 - Mab)^2} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{k_2^2 (Ma^2 + Ic^2)^2 + 4k_1 k_2 (Ic^2 - Mab)^2}}{2(Ic^2 - Mab)^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Один из корней уравнения (21), определяемый из (22), приводит  $k_{нр2}$  к нулевому значению. При этом система в целом становится по отношению к внешнему воздействию цепью, состоящей из последовательно соединенных звеньев, а передаточная функция такой цепи имеет вид:

$$\begin{aligned} W_2(p)_{носл} &= \frac{\bar{y}_2}{k_1 \bar{z}_1} = \\ &= \frac{p^2 (Ic^2 - Mab)}{[(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1] \cdot (Mb^2 + Ic^2)p^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

что отражает частные случаи динамических взаимодействий в системе на рис. 3б. Что касается входного силового воздействия в системе, структурная схема которого приведена на рис. 3б, то можно дать определение эквивалентной силы

$$\bar{Q}_{эkv} = k_1 \bar{z}_1 \frac{p^2 (Ic^2 - Mab)^2}{(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1}. \quad (24)$$

Отметим, что силовое возмущение  $\bar{Q}_{эkv}$ , будучи приложенным к координате  $\bar{y}_2$  (то есть к элементу с массой  $(Mb^2 + Ic^2)$ ), позволяет получать частотные характеристики, как и сила  $k_1 \bar{z}_1$ , приложенная к элементу с массой  $(Ma^2 + Ic^2)$  (по координате  $\bar{y}_1$ ).

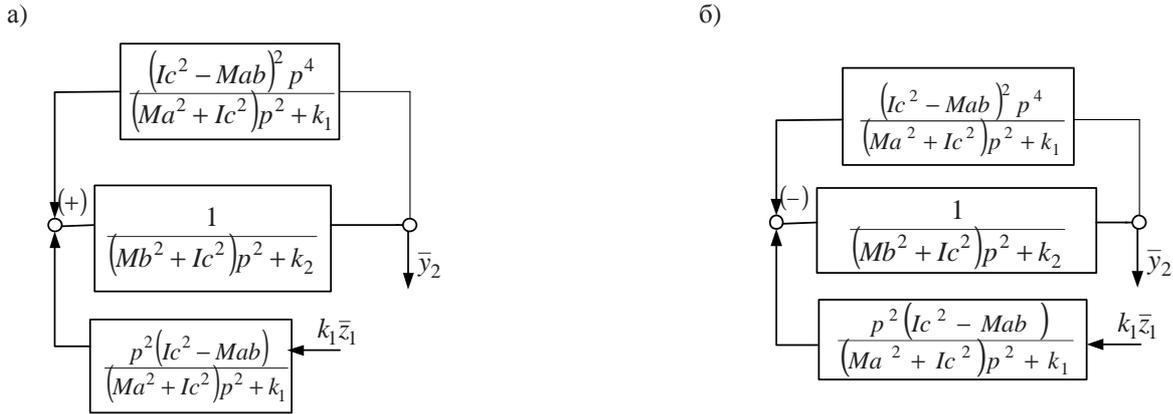


Рис. 3. Структурные схемы, соответствующие расчетной схеме на рис. 1: а) обратная положительная связь; б) обратная отрицательная связь

Динамическая реакция в точке  $A_2$  (контакт упругого элемента  $k_2$  с опорной поверхностью) определяется

$$\begin{aligned} \bar{R}_{A_2}(p) &= k_2 \bar{y}_2 = k_2 W_2(pk_1) \bar{z}_1 = \\ &= \frac{k_2 (Ic^2 - Mab) p^2 k_1 \bar{z}_1}{A_0}. \end{aligned} \quad (25)$$

При этом передаточная функция при входном воздействии  $k_1 \bar{z}_1$  и выходном  $\bar{R}_{A_2}$  принимает вид:

$$W_{R_{A_2}}(p) = \frac{\bar{R}_{A_2}}{k_1 \bar{z}_1} = \frac{(Ic^2 - Mab) p^2 k_2}{A_0}. \quad (26)$$

В свою очередь, динамическая реакция  $\bar{R}_{B_2}$ , приложенная к объекту защиты в точке  $B_2$ , определяется

$$\begin{aligned} \bar{R}_{B_2} &= k_{np2} \bar{y}_2 = \\ &= \left\{ k_2 [(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1] - (Ic^2 - Mab)^2 p^4 \right\} \times \\ &= \frac{\times (Ic^2 - Mab) p^2 k_1 \bar{z}_1}{[(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1] A_0}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{B_2} &= \frac{k_2 (Ic^2 - Mab) p^2}{A_0} k_1 \bar{z}_1 - \\ &= \frac{(Ic^2 - Mab)^2 p^4 k_1 \bar{z}_1 (Ic^2 - Mab) p^2}{[(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1] A_0}. \end{aligned} \quad (28)$$

Найдем передаточную функцию при «входе  $k_1 \bar{z}_1$  и выходе  $\bar{R}_{B_2}$ »:

$$\begin{aligned} W_{R_{B_2}}(p) &= \frac{\bar{R}_{B_2}}{Q_{2экв}} = \\ &= \frac{k_2 [(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1] - (Ic^2 - Mab)^2 p^4}{A_0}. \end{aligned} \quad (29)$$

После ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} W_{R_{B_2}}(p) &= \frac{\bar{R}_{B_2}}{k_1 \bar{z}_1} = \\ &= \frac{\left\{ k_2 [(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1] - (Ic^2 - Mab)^2 p^4 \right\} \cdot}{A_0 [(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1]} \times \\ &= \frac{\times (Ic^2 - Mab) p^2}{A_0 [(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1]}. \end{aligned} \quad (29')$$

Интересным обстоятельством в выражении (29') является то, что при парциальной собственной частоте  $\omega_{парц}^2 = \frac{k_1}{Ma^2 + Ic^2}$  динамическая реакция  $\bar{R}_{B_2}$  принимает бесконечно большое значение, а поскольку  $\bar{R}_{B_2}$  является одновременно и обратной связью, то такой режим соответствует динамическому гашению колебаний по координате  $y_2$ .

При определении передаточной функции использовалась схема на рис. 3б и соотношения между силовыми факторами, определяемые выражением (24).

**IV. Сравнение динамических реакций по точкам опоры.** Динамические реакции в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно определяются выражениями (13) и (25):

$$\bar{R}_{A_1} = \frac{1}{A_0} [(Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2] \cdot k_1 \bar{z}_1,$$

$$\bar{R}_{A_2} = \frac{k_2}{A_0} (Ic^2 - Mab) p^2 k_1 \bar{z}_1,$$

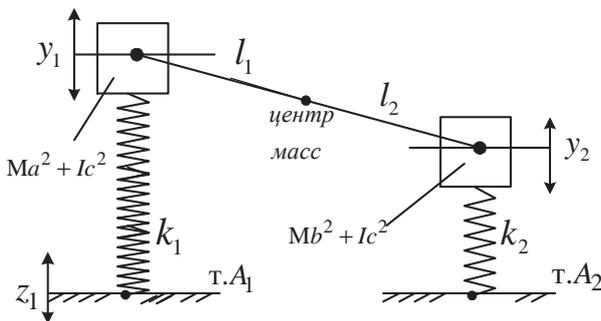
из которых следует, что при внешнем кинематическом воздействии  $\bar{z}_1$  реакции на опорной поверхности не равны между собой и разнесены на расстоянии  $(l_1 + l_2)$ . Это позволяет отметить такое обстоятельство, как формирование по отношению к опорной поверхности вполне определенного момента сил, который может заставить опорную поверхность совершать возвратно-качательные движения.

В свою очередь, в точках объекта защиты  $B_1$  и  $B_2$  также действуют динамические реакции  $\bar{R}_{B_1}$  и  $\bar{R}_{B_2}$ , определяемые соответственно выражениями (16) и (28):

$$\begin{aligned} \bar{R}_{B_1} &= \frac{k_1^2 \bar{z}_1}{A_0} = \frac{k_1}{A_0} \left\{ \left[ (Mb^2 + Ic^2)p^2 + k_2 \right] k_1 - \right. \\ &\quad \left. - (Ic^2 - Mab)^2 p^4 \right\} \\ \bar{R}_{B_2} &= \frac{k_2 k_1 (Ic^2 - Mab)p^2}{A_0} \bar{z}_1 - \\ &\quad - \frac{(Ic^2 - Mab)^2 p^4 \bar{z}_1 (Ic^2 - Mab)p^2}{\left[ (Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1 \right] A_0} = \\ &= \frac{k_1 \bar{z}_1}{A_0} \left[ (Ic^2 - Mab)p^2 \right] \times \left[ k_2 - \frac{(Ic^2 - Mab)^2 p^4}{(Ma^2 + Ic^2)p^2 + k_1} \right]. \end{aligned}$$

Сравнение  $\bar{R}_{B_1}$  и  $\bar{R}_{B_2}$  показывает, что динамические реакции, возникающие при действии силы  $k_1 \bar{z}_1$ , вызывают колебательное движение твердого тела, которое является суммой двух движений: поступательного движения, связанного с движением центра масс, и вращательного движения твердого тела вокруг центра масс. При этом на твердое тело будет действовать упругий момент сил, что может быть отдельно рассмотрено в системе координат  $y$  и  $\varphi$ . Вместе с тем знание динамических реакций  $\bar{R}_{B_1}$  и  $\bar{R}_{B_2}$  дает возможность определить силовые возмущения, возникающие на объекте защиты в виде твердого тела.

**V. Получение динамических реакций методом прямого преобразования расчетных схем.** Расчетную схему на рис. 1а, представляющую собой твердое тело с двумя степенями свободы, можно, в соответствии с уравнениями (3), (4) изобразить как систему с двумя степенями свободы обычного вида. При этом полагается, что объект защиты состоит из двух материальных точек с массами  $(Ma^2 + Ic^2)$  и  $(Mb^2 + Ic^2)$ , связанными между собой невесомым жестким стержнем длиной  $(l_1 + l_2)$ . Расчетная схема с учетом обсуждаемых особенностей и учетом (3), (4) имеет вид, как показано на рис. 4.



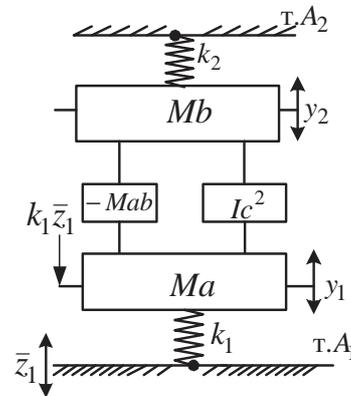
**Рис. 4.** Расчетная схема исходной системы, приведенной на рис. 1а в виде двух материальных точек, соединенных невесомым стержнем

С учетом того, что механическая система может рассматриваться состоящей из нескольких типовых элементов, свойства каждого из которых могут описываться передаточными функциями усилительного звена,

а также дифференцирующих звеньев первого и второго порядков, как это предлагается в [6, 7], можно преобразовать расчетную схему к виду, как показано на рис. 5.

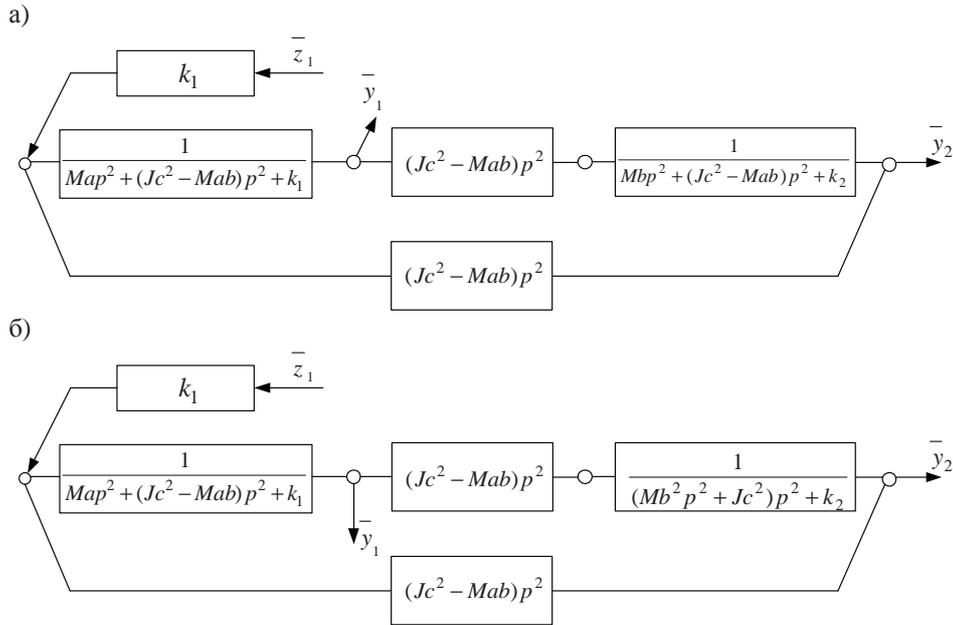
Для схемы на рис. 5 массоинерционные элементы  $Mab$  и  $Ic^2$  обладают кинетической энергией в относительном движении  $(y_2 - y_1)$  и могут рассматриваться как некоторые виртуальные типовые звенья с передаточными функциями дифференцирующего звена второго порядка. В данной схеме эти звенья физически не реализуются как отдельные элементы, но выполняют свои определенные функции.

Последнее можно рассматривать как потенциальную возможность создания соответствующих математических и физических эквивалентных моделей колебательных систем с твердым телом. На рис. 5 показано, что расчетная схема на рис. 1а может быть трансформирована в цепную систему с двумя степенями свободы (координаты  $y_1$  и  $y_2$ ) массоинерционными элементами  $Ma$  и  $Mb$ , где  $a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}$ ,  $b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$ . При этом звенья  $(-Mab)$  и  $(Ic^2)$  являются такими же звеньями, выполняющими функции соединения элементов системы, как и пружины  $k_1$  и  $k_2$ . Если составить выражения для кинетической и потенциальной энергий, то обычным путем, как и для расчетной схемы на рис. 1а, можно составить уравнения движения и структурные схемы (рис. 6а, б).



**Рис. 5.** Расчетная схема, соответствующая схеме на рис. 4 с введенными условиями обозначения типовых звеньев структурной теории

При этом структурная схема на рис. 6а соответствует расчетной схеме на рис. 5, где массоинерционные элементы обозначены через  $Map^2$  и  $Mbp^2$ . Что касается структурной схемы на рис. 6б, то она отличается от схемы на рис. 6а тем, что вместо массоинерционного звена  $Map^2$  используются звенья  $(Ma^2 + Mab)p^2$  и  $(Mb^2 + Mab)p^2$ .



**Рис. 6.** Структурные схемы, соответствующие эквивалентной расчетной схеме на рис. 5: а) массоинерционный элемент имеет вид  $Map^2$ ; б) массоинерционный элемент имеет вид  $(Map^2 + Mab)p^2$

В обеих структурных схемах характеристическое уравнение имеет один и тот же вид, соответствующий (7):

$$A_0 = (Map^2 + Jc^2 p^2 - Mabp^2 + k_1) \times \\ \times (Mbp^2 + Jc^2 p^2 - Mabp^2 + k_2) - [(Jc^2 - Mab)p^2]^2 = \\ = [(Jc^2 - Mab)p^2]^2 = [(Ma^2 p^2 + Jc^2)p^2 + k_1] \times \\ \times [(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2] - [(Jc^2 - Mab)p^2]^2$$

Интерпретации характеристического уравнения нашли применение в построении структурных схем на рис. 3а, б, где преобразование структурных схем используется для выделения цепей обратных связей, определяющих динамические реакции.

Используя технологию определения приведенных жесткостей обобщенных пружин (как комплексных сопротивлений в теории цепей), можно записать последовательность преобразований, полагая, что схема построения имеет вид, как показано на рис. 7а, б. При этом кинематическое воздействие  $z_1$  приведено

к эквивалентному силовому фактору (рис. 7б), имеющему вид:

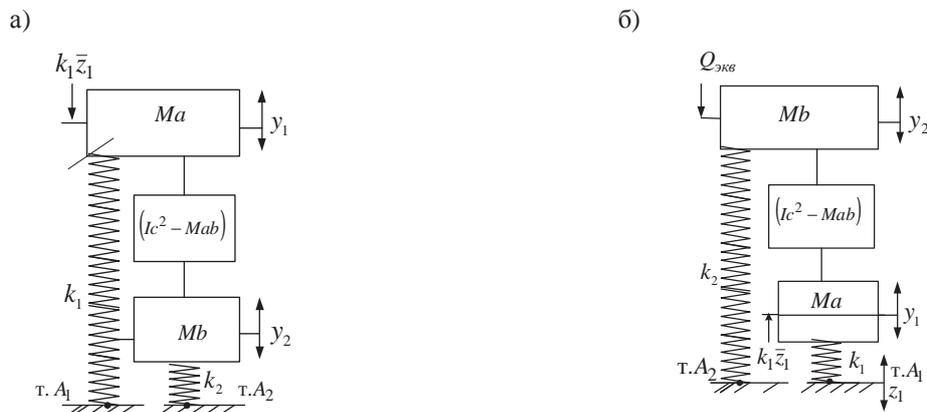
$$\bar{Q}_{экс} = k_1 z_1 \frac{p^2 (Jc^2 - Mab)}{(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1}.$$

Определение  $\bar{R}_{A_1}$  и  $\bar{R}_{A_2}$  не вызывает особых затруднений и производится на основе использования формул, которые могут быть представлены выражениями (30), (31):

$$\bar{R}_{A_1} = \bar{y}_1 k_1 = k_1^2 \bar{z}_1 \frac{Mbp^2 + k_2}{A_0}; \quad (30)$$

$$\bar{R}_{A_2} = \bar{y}_2 k_2 = k_2 k_1 \bar{z}_1 \frac{(Jc^2 - Mab)p^2}{A_0}. \quad (31)$$

Что касается динамической реакции в точке  $B_1$ , то она может быть обозначена  $\bar{R}_{Ma}$ , поскольку связана с эквивалентным представлением расчетной схемы на рис. 7а.



**Рис. 7.** Принципиальные схемы: а) для определения  $R_{A_1}, R_{Ma}$ ; б) для определения  $R_{A_2}, R_{Mb}$ .

$$\bar{R}_{Ma} = \left\{ \begin{array}{l} k_1 + \frac{(Mbp^2 + k_2 + Jc^2 p^2 - Jc^2 p^2 + Mabp^2 -)}{Mbp^2 + (Jc^2 - Mab)p^2 + k_2} \\ -Mabp^2 \cdot (Jc^2 - Mab)p^2 \end{array} \right\} \bar{y}_1 =$$

$$= \left\{ k_1 + (Jc^2 - Mab)p^2 - \frac{[(Jc^2 - Mab)p^2]^2}{[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2]} \right\} \bar{y}_1, \quad (32)$$

что совпадает с определением  $k_{пр1}$  по структурной схеме на рис. 2б при условии, что

$$\frac{1}{(Ma^2 + Jc^2)p^2} = \frac{1}{(Ma^2 + Mab - Mab + Jc^2)p^2} =$$

$$= \frac{1}{Map^2 + (Jc^2 - Mab)p^2}. \quad (32')$$

Если из (32') часть знаменателя  $(Jc^2 - Mab)p^2$  перенести в цепь обратной связи на рис. 2б, то выражение (32) может быть получено из структурной схемы на рис. 2б. Таким образом, упрощенный подход, основанный на использовании расчетной схемы на рис. 7а, дает такой же результат.

В свою очередь, при определении динамической реакции  $\bar{R}_{Mb}$  может быть использована расчетная схема на рис. 7б:

$$\bar{R}_{Mb} = \left\{ k_2 + \frac{(Map^2 + k_1) \cdot (Jc^2 - Mab)p^2}{Map^2 + k_1 + Jc^2 - Mab} \right\} \bar{y}_2,$$

что приводится аналогично к виду

$$\bar{R}_{Mb} = \left\{ \begin{array}{l} k_1 + (Jc^2 - Mab)p^2 - \\ (Jc^2 - Mab)p^2 \\ - \frac{[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1]}{[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1]} \end{array} \right\} \bar{y}_1. \quad (33)$$

Таким образом, динамические реакции в системах с твердым телом могут быть найдены на основании общей методики построения приведенных жесткостей с последующим использованием координат перемещения. Структурные интерпретации расчетных схем механических колебательных систем, как было показано выше, могут быть использованы для определения динамических реакций, которые «привязаны» к определенным точкам (точка А или точка В). Однако структурные схемы могут быть развернуты по отношению к различным массоинерционным элементам. В частности, можно отметить, что выбор массоинерционного элемента предопределяется значением динамической реакции. В этом отношении структурные схемы эквивалентных систем (рис. 6а, б и рис. 7б) показательны в том смысле, что динамические реакции могут быть найдены на виртуальных элементах, а это может оказаться неудобным для конкретных расчетов, хотя эквивалентные расчетные схемы вполне адекватны по математическим моделям. Потому при определении динамических реакций в координатах  $y_1$  и  $y_2$ , связанных с точками кре-

пления упругих элементов (это относится и к набору типовых элементов), предпочтение должно быть отдано вариантам отображения свойств массоинерционных элементов, учитывающих сложный характер движения твердого тела.

**Заключение.** На основе проведенных исследований можно сделать ряд выводов.

1. Динамические реакции в механической колебательной системе, содержащей твердое тело, могут определяться в системе координат  $y_1$  и  $y_2$ , связанных с представлениями о возможностях описания движения твердого тела как системы, состоящей из двух материальных точек, обладающих массами  $(Ma^2 + Ic^2)$  и  $(Mb^2 + Ic^2)$ , соединенных невесомым жестким стержнем длиной  $l_1 + l_2$ .

2. Метод определения динамических реакций от действия гармонических внешних воздействий основан на определении параметров обратной связи (отрицательной или положительной), сформированной таким образом, чтобы в прямой цепи структурной схемы было выделено звено соответственно с передаточными функциями

$$\frac{1}{(Mb^2 + Ic^2)p^2} \text{ и } \frac{1}{(Ma^2 + Ic^2)p^2}.$$

3. Динамические реакции в точках контакта с опорными поверхностями, а также динамические реакции, прикладываемые к материальным точкам с виртуальными массами  $(Ma^2 + Ic^2)$  и  $(Mb^2 + Ic^2)$ , различаются.

4. Определение реакций  $\bar{R}_{B1}$  и  $\bar{R}_{B2}$  (описание в тексте), то есть динамических реакций, приложенных к твердому телу в точках крепления упругих элементов  $k_1$  и  $k_2$  к объекту защиты, позволяет оценить возможность движения твердого тела и возникающие при этом силовые факторы, которые могут быть приведены к центру масс.

5. Аналогично определение реакций  $\bar{R}_{A1}$  и  $\bar{R}_{A2}$  в точках крепления упругих элементов  $k_1$  и  $k_2$  с опорной поверхностью позволяют определить динамические усилия, передаваемые на основание, которые также могут быть приведены к некоторой силе и моменту сил относительно выбранной точки.

6. Предлагаемый метод позволяет механическую колебательную систему с твердым телом представить эквивалентной в динамическом отношении системой из двух точечных масс  $Ma$  и  $Mb$ , совершающих движение в структуре цепного типа. Особенностью такой системы является то обстоятельство, что упомянутые приведенные звенья соединяются между собой двумя типовыми элементами  $Ic^2$  и  $-Mb$ . Эти элементы обладают кинетической энергией в относительном движении  $(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$ . Разные знаки перед  $Ic^2$  и  $-Mb$  говорят о том, что создаваемые ими силы направлены в противоположные стороны. В этом случае роль упомянутых элементов, по существу, соответствует действию некоторых специфических пружин.

7. Используя схемы эквивалентного приведения системы с твердым телом к системам цепного типа с материальными точками, можно также получить выражения для определения динамических реакций.

Предлагаемые исследования позволяют предположить, что в механических колебательных системах, помимо обычных массоинерционных, упругих и демпфирующих элементов, физически существуют (и могут быть реализованы в конкретных конструктивных формах) типовые элементарные звенья с передаточными функциями звена дифференцирования второго порядка (при этом передаточные функции могут иметь разные знаки).

### Литература

1. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. Т. 6. Защита машин и оборудования от вибрации / под ред. К.В. Фролова. М.: Машиностроение. 1986. 457 с.
2. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Лонцих П.А. Изменение динамических свойств механических колебательных систем при выделении сочленений звеньев [Электронный ресурс] // Наука и образование: электрон. науч. изд. 2012. № 04. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/377653.html> (дата обращения: 15.12.2012 г.).
3. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем: моногр. СПб.: Политехника, 2013. 362 с.
4. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем: моногр. Иркутск: ИрГУПС. 2012. 274 с.
5. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск. Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2008. 523 с.
6. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука. 2011. 394 с.
7. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Математическое моделирование в механических колебательных систе-

мах. Мехатронные подходы // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2011. № 3. С. 70-78.

8. Белокобыльский С.В. Динамика систем с сухим трением и ее приложение к задачам горной механики: моногр. М., 2002. 209 с.
9. Ситов И.С., Белокобыльский С.В. Способы и средства изменения динамического состояния технического комплекса для вибрационного заглаживания. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 13. С. 46-51.

### References

1. Vibration in engineering: in 6 vol. Vol. 6. Protection of machines and equipment from vibration / pod red. K.V. Frolova. M.: Mashinostroeniye. 1986. 457 s.
2. Eliseev S.V., Belokobyl'sky S.V., Lontsikh P.A. Change in the dynamic properties of mechanical oscillatory systems under link connections separation // Nauka i obrazovaniye: electron. nauch. izd. 2012. № 4. URL: <http://technomad.edu.ru/index.html> (access date: 15.12.2012).
3. Eliseev S.V., Belokobyl'sky S.V., Kashuba V.B. Applied problems of structural theory of vibration protection systems: monograf. St. Petersburg. Politehnika. 2013. 362 s.
4. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. Systems analysis and mathematical modeling in mechatronics vibration systems. Irkutsk: IrGUPS. 2012. 274 s.
5. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis of the generic problems of vibration protection and vibration insulation of technical objects. Irkutsk: Izd-vo Irkut. gos. un-ta. 2008. 523 s.
6. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical vibratory systems. Novosibirsk: Nauka. 2011. 394 s.
7. Belokobyl'sky S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Mathematical modeling of the mechanical vibratory systems. Mechatronic approaches // Problemy mashinostroyeniya i avtomatizatsii. 2011. № 3. S. 9-14.
8. Belokobyl'sky S.V. Dry friction dynamics and its application to the mining mechanical engineering problems: monogr. M.: Mashinostroeniye, 2002. 209 s.
9. Sitov I.S., Belokobyl'sky S.V. Ways and means to change the dynamic state of the technological complex for vibration smoothing // Sovremennye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovaniye. 2007. № 13. S. 46-52.

УДК 621.534

## Приведенная жесткость цепи обратной связи. Определение динамических реакций в механической колебательной системе

С.В. Елисеев<sup>1, a</sup>, В.Б. Кашуба<sup>2, b</sup>, И.С. Ситов<sup>2, c</sup>

<sup>1</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

<sup>2</sup>Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

<sup>a</sup>eliseev\_s@inbox.ru, <sup>b</sup>plemja@rambler.ru, <sup>c</sup>sitov@yandex.ru

Статья поступила 15.01.2013, принята 20.04.2013

*В предлагаемой статье рассматриваются возможности использования структурных схем для определения реакций связей между элементами системы и опорными поверхностями механических систем при вибрационных внешних силах. Предложен метод получения динамических реакций на основе использования структурных представлений механических колебательных систем. При этом динамическая реакция интерпретируется как обратная связь, сформированная в отношении звена, имеющего передаточную функцию интегрирующего звена второго порядка. Такие структурные схемы могут быть развернуты не только относительно объекта защиты, но и для других массоинерционных элементов, что предполагает возможности расширения теоремы на системы со многими степенями свободы. Показано, что использование динамических реакций для описания динамических свойств виброзащитных систем, позволяет создать не только методологическую основу для расчета элементов колебательной системы, но и расширить представления о возможностях проявления ранее не рассматривавшихся физических эффектов. Возможности подтверждения полученных результатов несколькими способами отражают универсальность и гибкость предлагаемого метода.*