

Предлагаемые исследования позволяют предположить, что в механических колебательных системах, помимо обычных массоинерционных, упругих и демпфирующих элементов, физически существуют (и могут быть реализованы в конкретных конструктивных формах) типовые элементарные звенья с передаточными функциями звена дифференцирования второго порядка (при этом передаточные функции могут иметь разные знаки).

### Литература

1. Вибрации в технике: справочник: в 6 т. Т. 6. Защита машин и оборудования от вибрации / под ред. К.В. Фролова. М.: Машиностроение. 1986. 457 с.
2. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Лонцих П.А. Изменение динамических свойств механических колебательных систем при выделении сочленений звеньев [Электронный ресурс] // Наука и образование: электрон. науч. изд. 2012. № 04. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/377653.html> (дата обращения: 15.12.2012 г.).
3. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем: моногр. СПб.: Политехника, 2013. 362 с.
4. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем: моногр. Иркутск: ИрГУПС. 2012. 274 с.
5. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск. Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2008. 523 с.
6. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука. 2011. 394 с.
7. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Математическое моделирование в механических колебательных систе-

мах. Мехатронные подходы // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2011. № 3. С. 70-78.

8. Белокобыльский С.В. Динамика систем с сухим трением и ее приложение к задачам горной механики: моногр. М., 2002. 209 с.
9. Ситов И.С., Белокобыльский С.В. Способы и средства изменения динамического состояния технического комплекса для вибрационного заглаживания. // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 13. С. 46-51.

### References

1. Vibration in engineering: in 6 vol. Vol. 6. Protection of machines and equipment from vibration / pod red. K.V. Frolova. M.: Mashinostroeniye. 1986. 457 s.
2. Eliseev S.V., Belokobyl'sky S.V., Lontsikh P.A. Change in the dynamic properties of mechanical oscillatory systems under link connections separation // Nauka i obrazovaniye: electron. nauch. izd. 2012. № 4. URL: <http://technomad.edu.ru/index.html> (access date: 15.12.2012).
3. Eliseev S.V., Belokobyl'sky S.V., Kashuba V.B. Applied problems of structural theory of vibration protection systems: monograf. St. Petersburg. Politehnika. 2013. 362 s.
4. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko Yu.V. Systems analysis and mathematical modeling in mechatronics vibration systems. Irkutsk: IrGUPS. 2012. 274 s.
5. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis of the generic problems of vibration protection and vibration insulation of technical objects. Irkutsk: Izd-vo Irkut. gos. un-ta. 2008. 523 s.
6. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical vibratory systems. Novosibirsk: Nauka. 2011. 394 s.
7. Belokobyl'sky S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Mathematical modeling of the mechanical vibratory systems. Mechatronic approaches // Problemy mashinostroyeniya i avtomatizatsii. 2011. № 3. S. 9-14.
8. Belokobyl'sky S.V. Dry friction dynamics and its application to the mining mechanical engineering problems: monogr. M.: Mashinostroeniye, 2002. 209 s.
9. Sitov I.S., Belokobyl'sky S.V. Ways and means to change the dynamic state of the technological complex for vibration smoothing // Sovremennye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovaniye. 2007. № 13. S. 46-52.

УДК 621.534

## Приведенная жесткость цепи обратной связи. Определение динамических реакций в механической колебательной системе

С.В. Елисеев<sup>1, a</sup>, В.Б. Кашуба<sup>2, b</sup>, И.С. Ситов<sup>2, c</sup>

<sup>1</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

<sup>2</sup>Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

<sup>a</sup>eliseev\_s@inbox.ru, <sup>b</sup>plemja@rambler.ru, <sup>c</sup>sitov@yandex.ru

Статья поступила 15.01.2013, принята 20.04.2013

*В предлагаемой статье рассматриваются возможности использования структурных схем для определения реакций связей между элементами системы и опорными поверхностями механических систем при вибрационных внешних силах. Предложен метод получения динамических реакций на основе использования структурных представлений механических колебательных систем. При этом динамическая реакция интерпретируется как обратная связь, сформированная в отношении звена, имеющего передаточную функцию интегрирующего звена второго порядка. Такие структурные схемы могут быть развернуты не только относительно объекта защиты, но и для других массоинерционных элементов, что предполагает возможности расширения теоремы на системы со многими степенями свободы. Показано, что использование динамических реакций для описания динамических свойств виброзащитных систем, позволяет создать не только методологическую основу для расчета элементов колебательной системы, но и расширить представления о возможностях проявления ранее не рассматривавшихся физических эффектов. Возможности подтверждения полученных результатов несколькими способами отражают универсальность и гибкость предлагаемого метода.*

**Ключевые слова:** динамические реакции, передаточные реакции системы, вибрационная защита объектов, метод определения динамических реакций.

## Unit stiffness of feedback circuit. determination of dynamical reactions in mechanical vibration systems

S.V. Eliseev<sup>1, a</sup>, V.B. Kashuba<sup>2, b</sup>, I.S. Sitov<sup>2, c</sup>

<sup>1</sup>Irkutsk State University of Railway Engineering, 15 Chernyshevskogo st., Irkutsk, Russia.

<sup>2</sup>Bratsk State University, 40 Makarenko st., Bratsk, Russia

<sup>a</sup>eliseev\_s@inbox.ru, <sup>b</sup>plemja@rambler.ru, <sup>c</sup>sitov@yandex.ru

Received 15.01.2013, accepted 20.04.2013

The article considers the capabilities to use structural schemes to determine the constraint force reactions between the system elements and supporting surfaces of mechanical systems under the vibration external forces action. The method of obtaining dynamic responses based on the use of structural representations of mechanical vibration systems has been proposed. In addition, the dynamic response is interpreted as a feedback formed in respect of the link, which has the transfer function of a second-order integrator. Such structural diagrams can be deployed not only in respect of the object of protection, but also for other baricentric elements that implies some possibilities to extend the theorem on the systems with multiple degree of freedom. It has been shown that the use of the dynamic responses to describe the vibration systems dynamical properties allows creating not only a methodological basis for the calculation of vibration system elements but also expanding the idea of the development of physical effects that were not previously considered. The validation resources of the results obtained in more ways than one reflect the versatility and flexibility of the proposed method.

**Keywords:** dynamical reactions, systems transfer reactions, objects vibration protection, dynamical reactions method.

**Введение.** Определение динамических реакций в механических колебательных системах, используемых в качестве расчетных схем машин и оборудования, работающего в условиях вибрационного нагружения, относится к числу достаточно известных задач [1, 2]. Применяемые методы основаны на известных в механике принципах с последующим переходом к преобразованиям Лапласа [3]. В последние годы интерес к задачам виброзащиты и виброизоляции технических объектов от вибраций связан с необходимостью удовлетворения возросших требований к динамическому качеству машин, повышению надежности и безопасности

их эксплуатации [4]. Развитие структурных методов в оценке динамического состояния технических систем [5] привносит определенные преимущества в решение тех задач, в которых технические объекты отображаются математическими моделями в виде структурных схем, эквивалентных в динамическом отношении системе автоматического управления [6, 7, 8].

**I. Общие положения. Постановка задачи исследования.** Рассмотрим расчетную схему виброзащитной системы технического объекта в виде механической колебательной структуры с двумя степенями свободы (рис. 1а).

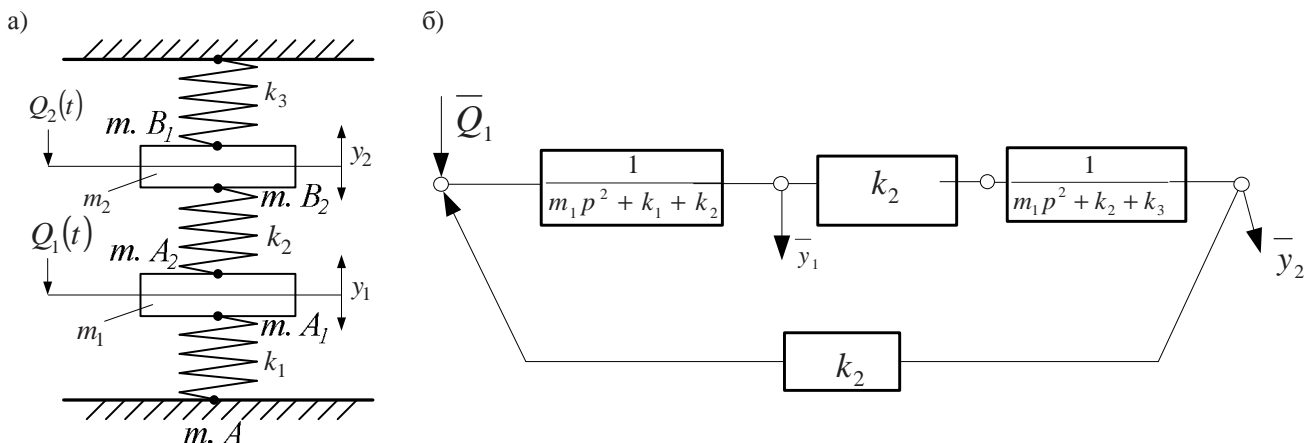


Рис.1. Расчетная (а) и структурная (б) схемы виброзащитной системы

Система совершает малые вертикальные колебания  $y_1, y_2$  в координатах относительно неподвижного базиса. Объект защиты  $m_2$  входит в механическую колебательную систему, образованную упругими элементами с жесткостями  $k_1, k_2, k_3$  и промежуточной массой  $m_1$ . Внешне воздействие представлено перио-

дической силой  $Q_2$  (гармоническое воздействие), приложенной к объекту защиты  $m_2$  (рис. 1а). В данном случае силы сопротивления не учитываются. Математическая модель системы может быть [2] представлена в общем виде как система из двух дифференциальных уравнений:

$$m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = Q_1(t) + k_1 z_1(t), \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + k_3)y_2 - k_2 y_1 = Q_2(t). \quad (2)$$

Используя преобразования Лапласа [5], можно построить структурную схему эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления, как показано на рис. 1б, где  $p = j\omega$  является комплексной переменной, а

$$A_0 = (m_1 p^2 + k_1 + k_2) \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 \quad (3)$$

- представляет собой характеристическое частотное уравнение. Отметим, что на рис. 1а т.т.  $A, A_1, A_2, B_1, B_2$  выделены для последующего определения в них динамических реакций. На основании структурной схемы (рис. 1б) могут быть определены передаточные функции системы при входном воздействии  $\bar{Q}_2(z_1(t)=0, Q_1(t)=0)$ :

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_2} = \frac{k_2}{A_0}, \quad (4)$$

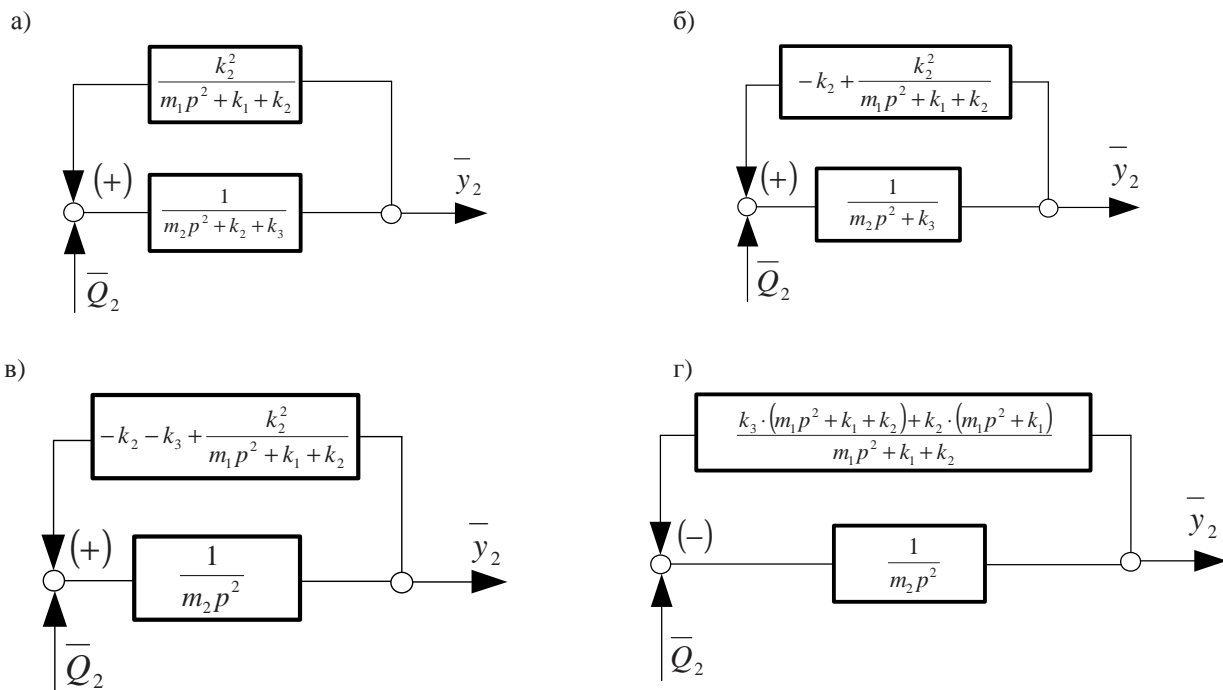
$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_2} = \frac{m_1 p^2 + k_1 + k_2}{A_0}, \quad (5)$$

где  $Q_2 = Q_0 \cdot \sin \alpha t$ ,  $A_0$  - определяется из (3),  $p = j\omega$  ( $j = \sqrt{-1}$ ).

Задача исследования заключается в разработке метода определения динамических реакций в точках соединения элементарных звеньев механической колебательной системы (т.т.  $A \div A_2, B \div B_2$ ) под действием внешнего гармонического возмущения  $Q_2$ .

**II. Построение математических моделей.** Структурная схема системы (Рис. 1б) может быть изменена путем последовательных преобразований (рис. 2а, б, в, г) и разрешена относительно базового звена, соответствующего объекту защиты ( $m_2$ ), имеющего, в свою очередь, передаточную функцию интегрирующего звена второго рода:

$$W_{m_2}(p) = \frac{1}{m_2 p^2} \quad (6)$$



**Рис. 2.** Варианты преобразования исходной структурной схемы, приведенной на рис. 1б: а – выделение парциальной системы  $m_2, k_2, k_3$ ; б – выделение парциальной системы  $m_2, k_3$  – положительная обратная связь; в – выделение базового звена или объекта защиты – положительная обратная связь; г – выделение объекта защиты – отрицательная обратная связь

Из приведенных на рис. 2а, б, в, г структур следует, что преобразование исходной структурной схемы (рис. 1б) позволяет выделить прямую цепь, в состав которой входит передаточная функция (6) объекта защиты: на первом этапе (Рис. 2а) в структуре сформируется парциальная система из элементов  $m_2, k_2, k_3$ , далее – рис. 2б – парциальная система упрощается до элементов  $m_2, k_3$ ; затем в прямой цепи выделяется объект защиты с передаточной функцией (6) – рис. 2в или рис. 2г; при этом передаточная функция цепи обратной связи мо-

жет менять знак (+) на знак (-) при соответствующем изменении структуры обратной связи.

**III. Теорема о динамическом статусе обратной связи по отношению к объекту защиты.** Воспользуемся системой уравнений (1), (2), которая может быть на основе преобразований Лапласа приведена к виду:

$$m_1 p^2 \bar{y}_1 + (k_1 + k_2) \bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = 0, \quad (7)$$

$$m_2 p^2 \bar{y}_2 + (k_2 + k_3) \bar{y}_2 - k_2 \bar{y}_1 = \bar{Q}_2, \quad (8)$$

Полагая из (7), что

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 \cdot \frac{k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2}, \quad (9)$$

получим

$$m_2 p^2 \bar{y}_2 + (k_2 + k_3) \bar{y}_2 - k_2 \cdot \bar{y}_2 \cdot \frac{k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} = \bar{Q}_2. \quad (10)$$

Преобразуем (10) к виду

$$m_2 p^2 \bar{y}_2 + \frac{(k_2 + k_3) \cdot (m_1 p^2 + k_1) + k_2 \cdot k_3}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} \cdot \bar{y}_2 = \bar{Q}_2. \quad (11)$$

Выражение (11) представляет собой реакцию связей в уравнении кинестатики, которое можно составить на основании принципа Даламбера для элемента массой  $m_2$ :

$$\bar{F}_{ин} + \bar{R}_{m_2} = \bar{Q}_2, \quad (12)$$

где  $\bar{F}_{ин} = m_2 p^2 \bar{y}_2$  - изображение по Лапласу силы инерции элемента массой  $m_2$ ;

$$\bar{R}_{m_2} = \frac{(k_2 + k_3) \cdot (m_1 p^2 + k_1) + k_2 \cdot k_3}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} \cdot \bar{y}_2 \quad (13)$$

изображение по Лапласу реакций связи со стороны системы, состоящей из элементов  $k_1, k_2, k_3$  и  $m_1$ ;  $\bar{Q}_2$  - изображение по Лапласу внешней силы  $Q_2$ .

**Формулировка теоремы.** Если механическая колебательная система представлена механической цепью и состоит из упругих и массоинерционных элементов, что в рамках структурной теории виброзащитных систем отображается структурной схемой, разрешенной относительно выделенного объекта защиты с передаточной функцией интегрирующего звена второго порядка (Рис. 2а), то отрицательная обратная связь, в физическом смысле, отражает динамическую жесткость, определяемую при приложении внешней силы  $\bar{Q}_2$  к объекту защиты массой  $m_2$ .

**Доказательство.** Используем уравнения (7) и (8), построенные на основании принципа Даламбера, и выделим реакцию связи, которая может быть представлена на выражением:

$$\bar{R}_{m_2} = \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_1)}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} \cdot \bar{y}_2, \quad (14)$$

полученным путем преобразований из (13).

В свою очередь,  $\bar{R}_{m_2}$  может быть найдено из структурной схемы на рис. 2г, что дает:

$$\bar{R}_{m_2} = \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_1)}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} \cdot \bar{y}_2. \quad (15)$$

Очевидно, что (14) и (15) совпадают; это доказывает теорему. Предлагаемое доказательство может быть расширено на системы с несколькими степенями свободы. Таким образом, динамические реакции в механических колебательных системах в рамках структур-

ных представлений могут определяться путем соответствующих структурных преобразований. Физическая сущность отрицательной обратной связи на структурной схеме по рис. 2г заключается в том, что упругоинерционный компакт представляет собой, в некотором смысле, обобщенную пружину [9], обладающую динамической жесткостью. При  $p = 0$  динамическая жесткость трансформируется в приведенную жесткость упругого компакта [10], что соответствует упругим свойствам исходной системы при действии статической силы  $Q_0$ , равной амплитуде периодического внешнего воздействия  $Q_2(t)$ . В частности, из (15) следует, что приведенная жесткость обобщенной пружины (при  $p = 0$ ):

$$k'_{np} = \frac{k_3 \cdot (k_1 + k_2) + k_1 k_2}{k_1 + k_2} = k_3 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \quad (16)$$

Из (16) можно заключить, что в статическом режиме жесткость опирания объекта защиты формируется двумя упругими элементами, образующими компакт [10]: пружина жесткостью  $k_3$ , а также пружина с жесткостью  $k'_{12} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$ , образуемой последовательным соединением упругих элементов  $k_1$  и  $k_2$ . Общая жесткость соответствует параллельному соединению:

$$k'_{np} = k_3 + k'_{12}. \quad (17)$$

В свою очередь, динамическая жесткость будет определяться выражением:

$$k_{np}(p) = k_3 + \frac{k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1)}{m_2 p^2 + k_1 + k_2}, \quad (18)$$

а

$$k_{12}(p) = \frac{k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_1)}{m_2 p^2 + k_1 + k_2}. \quad (19)$$

В частности, компонента динамической жесткости  $k_{12}(p)$ , что следует из (18), может принимать нулевое значение при:

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad (20)$$

что соответствует режиму, при котором на объект защиты действует только упругая реакция со стороны элемента  $k_3$ . При частоте:

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad (21)$$

возникает режим, соответствующий остановке движения  $m_2$  по координате  $\bar{y}_2$ . Такой режим соответствует динамическому гашению колебаний при силовом гармоническом возмущении  $Q_2$ .

**IV. Математическая модель для определения динамических реакций, связанных с движением по координате  $\bar{y}_1$ .** Структурная схема на рис. 1а может быть преобразована в несколько этапов (как показано

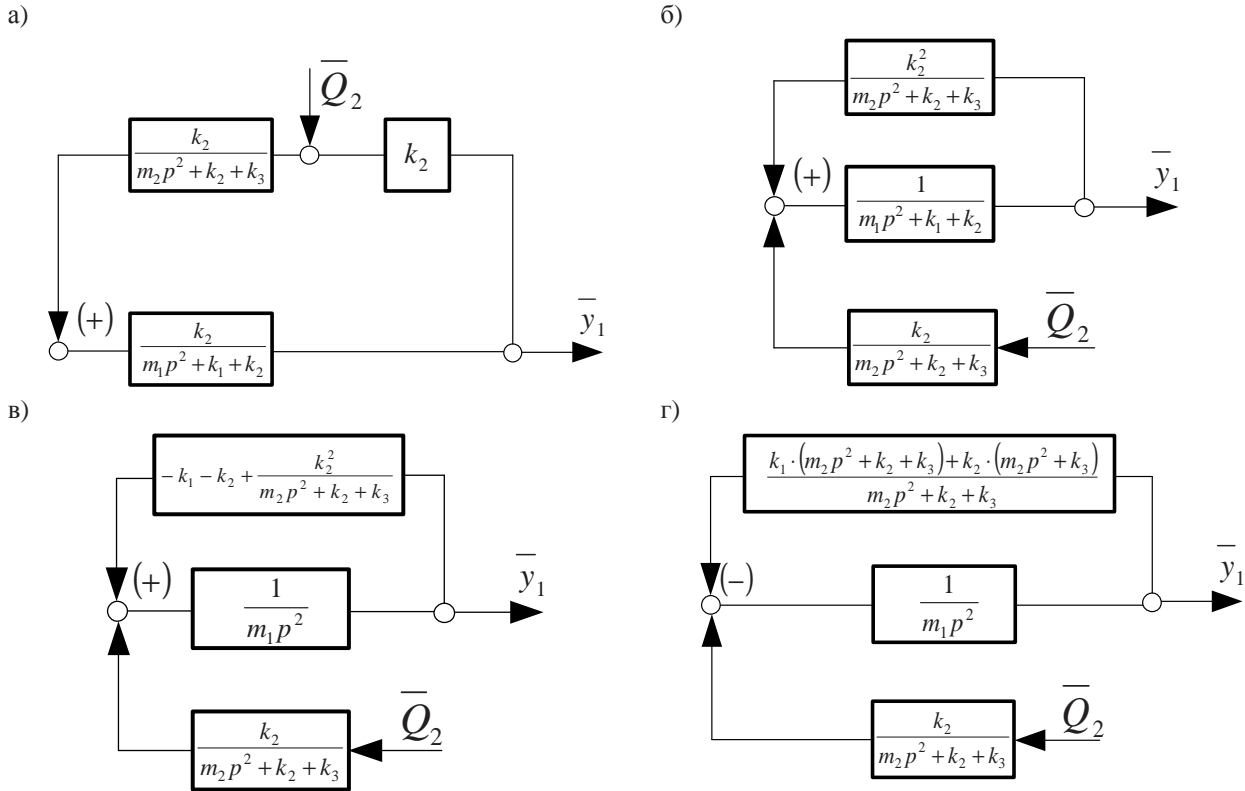
на рис. 3 а-г). В этом случае также как и ранее реализуется переход к схеме, на которой будет выделено массоинерционное звено  $m_1$  с передаточной функцией:

$$W_{m_1}(p) = \frac{1}{m_1 p^2}. \quad (22)$$

Схема распределения динамических сил, как это следует из структурных схем на рис. 3 (а-г), отличается от структурных схем на рис. 2 (а-г).

Для определения реакции, отнесенной к элементу  $m_1$ , используем (7), откуда следует, что:

$$\bar{y}_2 = \frac{Q_2 + k_2 \cdot \bar{y}_1}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} \quad (23)$$



**Рис.3.** Структурные схемы при последовательном преобразовании парциальных систем: а) – парциальная система  $m_1, k_1, k_2$  – положительная обратная связь, внешняя сила  $\bar{Q}_2$  не приведена к входу парциальной системы  $m_1, k_1, k_2$ ; б) – внешняя сила  $\bar{Q}_2$  приведена к входу парциальной системы  $m_1, k_1, k_2$ ; в) – звено  $m_1$  имеет положительную обратную связь; г) – звено  $m_1$  имеет отрицательную обратную связь

После подстановки в (7) получим:

$$m_1 p^2 \cdot \bar{y}_1 + (k_1 + k_2) \cdot y_1 - k_2 \cdot \frac{\bar{Q}_2 + k_2 \cdot y_1}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} = 0.$$

или

$$m_1 p^2 \cdot \bar{y}_1 + \frac{(k_1 + k_2) \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} \cdot y_1 = \frac{k_2 \cdot \bar{Q}_2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \quad (24)$$

Из (24) можно найти, что динамическая реакция на  $m_1$  определяется выражением:

$$\bar{R}_{m_1} = \frac{k_1 \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3) + k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} \cdot \bar{y}_1. \quad (25)$$

При этом сила инерции на  $m_1$  имеет вид:

$$F'_{ин} = m_1 p^2 \cdot \bar{y}_1, \quad (26)$$

а внешняя принимает форму выражения:

$$\bar{Q}_{1экв} = \bar{Q}_2 \cdot \frac{k_2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \quad (27)$$

То есть при определении реакции на массоинерционном элементе  $m_1$  внешняя сила  $Q_2$  передает свое динамическое воздействие, но этот эффект может рассматриваться с учетом того обстоятельства, что на элемент с массой  $m_1$  действует не  $Q_2$ , а сила  $\bar{Q}_{1экв}$ , определенная из (27). Что касается динамической реакции на  $m_1$ , то она связана с параметрами обратной отрицательной связи в соответствии со структурной схемой на рис. 3г, как это было в приведенной выше теореме.

Приведенная жесткость обобщенной пружины для элемента с массой  $m_1$  имеет вид:

$$k_{пр_{m_1}}(p) = \frac{k_1 \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3) + k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \quad (28)$$

В этом случае:



где

$$k_{\text{пр}m_1} = k_1 + k_{23},$$

$$k_{23} = \frac{k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \quad (29)$$

При  $p = 0$  (29) может быть упрощено:

$$k_{23} = \frac{k_2 \cdot k_3}{k_2 + k_3}, \quad (30)$$

что соответствует жесткости последовательно соединенных упругих элементов с жесткостями  $k_2$  и  $k_3$ . Характерными режимами для элемента  $m_1$  являются: режим динамического гашения при частоте:

$$\omega^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}, \quad (31)$$

а также режим, при котором механическая система (или компакт) из  $m_2, k_2, k_3$  не влияют на движение по  $y_1$  при частоте:

$$\omega^2 = \frac{k_3}{m_2}. \quad (32)$$

**V. Оценка динамических реакций в механической системе на рис. 1а.** Используя полученные выражения для жесткостей элементов, в том числе приведенных, а также значения для перемещений  $m_1$  и  $m_2$ , найдем, что:

$$\bar{R}_A = k_1 \cdot \bar{y}_1 = \frac{k_1 \cdot k_2}{A_0} \cdot \bar{Q}_2 \quad (33)$$

$$\bar{R}_{A_1} = \bar{R}_A = \frac{k_1 \cdot k_2}{A_0} \cdot \bar{Q}_2 \quad (34)$$

$$\bar{R}_{m_1} = \bar{R}_{A_1} + \bar{R}_{A_2} = \left( k_1 + \frac{k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} \right) \cdot \frac{k_2}{A_0} \cdot \bar{Q}_2 \quad (35)$$

$$R_{A_2} = \frac{k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} \cdot \frac{k_2}{A_0} \cdot \bar{Q}_2 \quad (36)$$

$$\bar{R}_B = k_3 \cdot \bar{y}_2 = \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0} \cdot \bar{Q}_2 \quad (37)$$

$$\bar{R}_{B_1} = \bar{R}_B = \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0} \cdot \bar{Q}_2 \quad (38)$$

$$\bar{R}_{m_2} = \left\{ \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1)}{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)} \right\} \cdot \frac{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0} \cdot \bar{Q}_2 =$$

$$= \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1)}{A_0} \cdot \bar{Q}_2. \quad (39)$$

$$\bar{R}_{B_2} = \frac{k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1)}{A_0} \cdot \bar{Q}_2. \quad (40)$$

Выражения 33 ÷ 40 могут быть переведены в передаточные функции системы, в которых входное воз-

действие является внешней гармонической силой  $\bar{Q}_2$ , а выходной сигнал представляет собой соответствующую динамическую реакцию. Так, например, передаточная функция пары  $\bar{Q}_2$  и  $R_A$  имеет вид:

$$W_{R_A}^{(p)} = \frac{\bar{R}_A}{\bar{Q}_2} = \frac{k_1 \cdot k_2}{A_0}; \quad (41)$$

в свою очередь, по точке  $B$  имеем:

$$W_{R_B}(p) = \frac{\bar{R}_B}{\bar{Q}_2} = \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0}. \quad (42)$$

Сравнения (41) и (42) показывают, что реакции на опорных поверхностях системы будут разными, а амплитудно-частотные характеристики будут иметь одинаковые экстремумы при нулях характеристического уравнения  $A_0$ . При этом реакция в точке  $B$  будет иметь минимум на частоте  $\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}$ , тогда как в т.  $A$  реакция таких значений не приобретает.

Для элемента  $m_2$  можно записать, что передаточная функция  $\bar{R}_{m_2}$  при входном воздействии  $\bar{Q}_2$  примет вид:

$$W_{R_{m_2}} = \frac{\bar{R}_{m_2}}{\bar{Q}_2} = \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1)}{A_0} = \frac{m_1 p^2 \cdot (k_2 + k_3) + k_2 \cdot k_1 + k_1 \cdot k_3 + k_3 \cdot k_2}{A_0}. \quad (43)$$

Из (43) следует, что на частоте

$$\omega^2 = \frac{k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3}{(k_2 + k_3) \cdot m_1} \quad (44)$$

динамическая реакция принимает нулевое значение. Однако, это не означает, что на элемент  $m_2$  не будут действовать силы, поскольку остается еще и статическая компонента общей реакции. При этом колебательные движения системы совершаются относительно положения статического равновесия.

Что касается передаточной функции, динамическая реакция на  $m_1$  при входном сигнале  $\bar{Q}_2$ , то она принимает вид:

$$W_{R_{m_1}}(p) = \frac{\bar{R}_{m_1}}{\bar{Q}_2} = \frac{[k_1 \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3) + k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)] \cdot k_2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} \cdot \frac{k_2}{A_0}. \quad (45)$$

Особенность динамических взаимодействий на элементе  $m_1$  такова, что на частоте:

$$\omega^2 = \frac{k_2 \cdot (k_2 + k_3) + k_2 \cdot k_3}{m_2 \cdot (k_1 + k_2)} \quad (46)$$

наблюдается режим «обнуления» динамической реакции, а на частоте

$$\omega^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2} \quad (47)$$

динамическая реакция принимает бесконечно большое значение, что в данном случае совпадает с режимом динамического гашения колебаний. В физическом смысле это означает, что на такой частоте динамическая реакция соответствует бесконечно большой жесткости обобщенной пружины; при этом масса  $m_2$  становится неподвижной. Кроме упомянутого режима, в соответствии с нулями характеристического уравнения  $A_0$  будет наблюдаться также два резонанса. Таким образом, если иметь в виду амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), соответствующую передаточную функцию (45), то АЧХ по динамическим реакциям будут отличаться от известных, что вполне объяснимо с физических позиций, поскольку динамическая реакция является другим по смыслу физическим параметром, чем координаты  $y_1$  и  $y_2$ .

**VI. Проверка методики определения динамических реакций.** Для проверки правильности определения реакции на элементе  $m_2$  воспользуемся схемой на рис. 2г. Так как входная точка на звене с передаточной

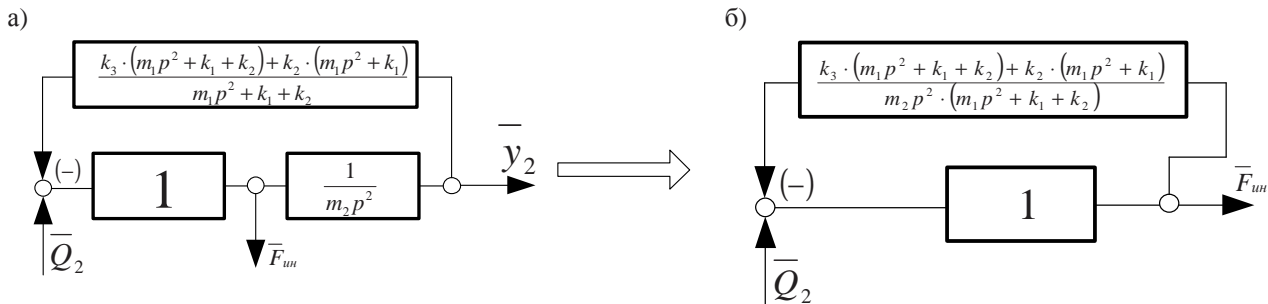
функцией  $W_{m_2}^{(p)} = \frac{1}{m_2 p^2}$  по существу (узел суммирования или сумматор) является точкой приложения трех сил (сила инерции, динамическая реакция, внешняя сила), то

$$\bar{F}_{ин} = \bar{Q}_2 - \bar{R}_{m_2} = \bar{Q}_2 - Q_2 \cdot \frac{[k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1)]}{A_0},$$

откуда

$$W_{F_{ин}}(p) = \frac{\bar{F}_{ин}}{Q_2} = \frac{A_0 - [k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1)]}{A_0} = \frac{m_2 p^2 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0}. \quad (48)$$

Для получения передаточной функции (48) из структурной схемы на рис. 2г необходимо преобразовать последнюю к виду, как показано на рис. 4 а, б. Схема на рис. 4а преобразуется к схеме на рис. 4б.



**Рис. 4.** Структурная схема системы, приведенной на рис. 2г для определения силы инерции элемента  $m_2$ : а) введение вспомогательного звена с единичной передаточной функцией; б) структура с единичным звеном в прямой цепи

Если воспользоваться структурной схемой на рис. 4б, то передаточная функция совпадает с выражением (48), что подтверждает доказательную базу приведенной выше теоремы. Аналогичные результаты можно получить из уравнения (8), подставляя в него  $\bar{y}_2 = W_2(p) \cdot \bar{Q}_2$ .

**Заключение**

1. Проведенные исследования позволяют предложить новый метод получения динамических реакций на основе использования структурных представлений механических колебательных систем.

2. Доказана теорема, в соответствии с которой динамическая реакция интерпретируется как обратная связь, сформированная в отношении звена, имеющего передаточную функцию интегрирующего звена второго порядка. Такие структурные схемы могут быть развернуты не только относительно объекта защиты, но и для других массоинерционных элементов, что предполагает возможности расширения теоремы на системы со многими степенями свободы.

3. Анализ результатов показывает, что использование динамических реакций для описания динамических свойств виброзащитных систем, позволяет создать не только методологическую основу для расчета элементов колебательной системы, но и расширить представ-

ления о возможностях проявления ранее не рассматривавшихся физических эффектов. Возможности подтверждения полученных результатов несколькими способами отражают универсальность и гибкость предлагаемого метода.

*Литература*

1. Фролов К.В. Теория механизмов и машин. М.: Высшая школа. 1987. 496 с.
2. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: Иркут. гос. ун-т. 2008. 523 с.
3. Лурье А.М. Аналитическая механика. М.: Изд-во физ.-мат. лит. 1961. 828 с.
4. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Засядко А.А. Формирование концепции вибродиагностических методов неразрушающего контроля. Современные представления // Системный анализ. Моделирование. 2008. № 1. С. 153. 172.
5. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука. 394 с.
6. Елисеев С.В., Московских А.О., Большаков Р.С., Савченко А.А. Возможности интеграции методов теории цепей и теории автоматического управления в задачах динамики машин [Электронный ресурс] // Наука и образование: электрон.-науч. техн. изд. 2012. № 6. URL. wiotex.ru/ssin/way/zhurnal-nauka-i-obrazovanie (дата обращения: 13.12.2012).
6. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Кашуба В.Б. Математическое моделирование в механических колебательных системах. Меха-

тронные подходы // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2011. № 3. С. 70-78.

7. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Кашуба В.Б. Прикладные задачи структурной теории виброзащитных систем. СПб.: Политехника. 2013. 362 с.

8. Елисеев С.В., Белокобыльский С.В., Упырь Р.Ю. Обобщенная пружина в задачах машин и оборудования // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво). Полтава, 2009. Т.1. Вып. 3(25). С. 79–89.

9. Елисеев С.В., Ковыршин С.В., Большаков Р.С. Особенности построения компактов упругих элементов в механических колебательных системах. Взаимодействия с элементами систем и формы соединения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 4(36). С. 61-70.

### References

1. Frolov K.V. Theory of mechanisms and machines. M.: Vysshaya shkola. 1987. 496 s.

2. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis of the generic problems of vibration protection and vibration insulation of technical objects. Irkutsk: Izd-vo Irkut. gos. un-ta. 2008. 523 s.

3. Lur'ye A.I. Analytical mechanics. M.: Izd-vo fiz.-mat. lit. 1961. 828 s.

4. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Zasyadko A.A. Formation of the concept of vibration diagnostics methods of non-destructive control. Modern ideas. // Sistemny analiz. Modelirovaniye. 2008. №1. S. 153 -172.

5. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronic approaches in the dynamics of mechanical vibratory systems. Novosibirsk: Nauka. 394 s.

6. Eliseev S.V., Moskovskikh A.S., Bol'shakov R.S., Savchenko A. Integration possibilities of the methods of the circuit theory and the theory of automatic control in the problems of machine dynamics // Nauka i obrazovaniye: electron. nauch. izd. 2012. № 6. S.19.

7. Eliseev S.V., Belokobyl'sky S.V., Kashuba V.B. Mathematical modeling of the mechanical vibratory systems. Mechatronic approaches // Problemy mashinostroyeniya i avtomatizatsii. 2011. № 3. S.70-78.

8. Eliseev S.V., Belokobyl'sky S.V., Kashuba V.B. Applied problems of structural theory of vibration protection systems: monograf. St. Petersburg. Politekhnik. 2013. 362 s.

9. Eliseev S.V., Belokobyl'sky S.V., Upyr' R.Yu. Generalized spring in the tasks of machinery and equipment // Book of scientific works: Poltava national technical University named after Yuri Kondratyuk. V.1. Poltava, 2009. № 3(25). S. 79-89.

10. Eliseev S.V., Kovyrshin S.V., Bol'shakov R.S. Construction features of the compact sets of elastic elements in mechanical oscillatory systems. Interactions with systems elements and connection shapes // Sovremennyye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. № 4 (36). 2012. S. 61 - 70.

УДК 62 – 336

## Определение перемещений в оболочечно-пластинчатом седле клапана

А.М. Долотов<sup>а</sup>, Ю.И. Белоголов<sup>б</sup>

Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия

<sup>а</sup>amdolotov@mail.ru, <sup>б</sup>pr-mech@mail.ru

Статья поступила 20.01.2013, принята 29.04.2013

*Рассмотрена методика определения жесткостных характеристик оболочечно-пластинчатого седла клапана. В качестве наиболее технологически простой принята схема с оболочечным элементом, расположенным на упругой пластине. С учетом условий совместности деформаций в месте сопряжения пластины и оболочки определены постоянные интегрирования, жесткость седла, значения смещения торца оболочки в радиальном направлении и прогиба пластины – в осевом. Приведены результаты расчета седла с заданными параметрами в программе MathCAD 14. Приведены эпюры смещения торца оболочки по длине и прогиба пластины по радиусу. Представлена принципиальная схема экспериментальной установки. Экспериментальные образцы (седла) выполнены из материала БрОЦС-5-5-5 (БрО5Ц5С5). Результаты измерений представлены как при нагружении седла клапана, так и при его разгрузке. Выполнена обработка экспериментальных данных методом наименьших квадратов и построены линейные зависимости радиальных смещений и осевых перемещений от прикладываемой нагрузки. На основании экспериментальных данных определен коэффициент трения и уточнен угол трения в месте контакта золотника с седлом. Весьма ценным является то обстоятельство, что для определения коэффициента трения не требуется определения жесткостных характеристик оболочечного элемента, а параметры, входящие в квадратное уравнение, могут быть определены с высокой степенью точности. Определена погрешность экспериментальных данных. Полученные аналитические зависимости могут быть использованы в качестве тестовых для конечно-элементных моделей.*

**Ключевые слова:** оболочечно-пластинчатое седло, жесткость, функции Крылова, условия совместности деформаций.

## Determination of displacements in shell-plate valve seat

A.M. Dolotov<sup>a</sup>, Yu.I. Belogolov<sup>b</sup>

Irkutsk State University of Railway Engineering, 15 Chernyshevskogo st., Irkutsk, Russia

<sup>a</sup>amdolotov@mail.ru, <sup>b</sup>pr-mech@mail.ru

Received 20.01.2013, accepted 29.04.2013

*The technique to determine the shell-plate valve seat stiffness has been examined. As the most technologically simple one, the analytical model with shell elements placed on the elastic plate has been adopted. Taking into consideration the conditions of strains compatibility at the plate-shell conjugation, the constant of integration, the seat stiffness, the values of the shell edge displacement in the*