

УДК 534.01; 622.24.053

## Фрикционные автоколебания одномассовой системы с учетом возможности мгновенной смены знака скорости на противоположный

С.В. Белокобыльский<sup>a</sup>, В.А. Коронатов<sup>b</sup>

Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия

<sup>a</sup>rektor@brstu.ru, <sup>b</sup>kortavik@mail.ru

Статья поступила 15.01. 2013, принята 12.02.2013

*Рассматриваются фрикционные крутильные автоколебания одномассовой упругой модели. Верхнее сечение упругого элемента закручивается с постоянной угловой скоростью, а на нижний диск действует момент сил сухого трения. Предполагается, что силы сухого трения изменяются скачкообразно, согласно закону Кулона. Исследуется релаксационный (разрывной) режим автоколебаний, когда проскальзывание диска относительно опорной плоскости чередуется с состоянием длительного покоя. Допускается, что при проскальзывании диска его угловая скорость может мгновенно изменять свой знак на противоположный. Получены аналитические решения для зон застоя и скольжения диска для установившегося режима автоколебаний: законы движения, время застоя и время проскальзывания, период автоколебаний. Установлены условия для мгновенной смены знака угловой скорости диска на противоположный.*

**Ключевые слова:** автоколебания, фрикционные, крутильные, релаксационный режим, силы сухого трения, закон Кулона, одномассовая модель.

## Self-excited frictional oscillations of one-mass system with regard to momentary change of velocity sign to opposite one

S.V. Belokobyl'sky<sup>a</sup>, V.A. Koronotov<sup>b</sup>

Bratsk State University, 40, Makarenko str., Bratsk, Russia

<sup>a</sup>rektor@brstu.ru, <sup>b</sup>kortavik@mail.ru

Received 15.01.2013, accepted 12.02.2013

*The frictional torsional oscillations of a one-mass elastic model are considered. The upper section of the elastic element is twisted with a constant angular velocity, but the moment of dry friction forces acts on the lower disk. The dry friction forces are considered to be changed unevenly according to the Coulomb's law. The relaxation (discontinuous) mode of self-excited oscillations when the disc slip relative to the reference plane alternates with a steady quiescent state is examined. It is assumed that when the disk slips, its angular velocity can instantly change the sign to the opposite one. The analytical solutions for stability zones and the disk slip zones have been obtained for the steady-state self-excited oscillations: the laws of motion, the quiescent state time and the slippage time, the self-excited oscillations period. The conditions for momentary change of the disk's angular velocity sign to the opposite one have been determined.*

**Key words:** self-excited oscillations, friction, twisting, relaxation mode, dry friction forces, Coulomb's law, one-mass model.

Рассматриваются фрикционные крутильные автоколебания одномассовой упругой системы (рис.1). Верхнее сечение пружины жесткости  $c$  закручивается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , а на нижний диск с моментом инерции  $I$  действует момент сил сухого трения. Будем полагать, что момент сил сухого трения изменяется по скачкообразному закону (рис. 2):

$$M_c = \begin{cases} M_0 \operatorname{sign} \frac{d\varphi}{dt}, & \text{при } \frac{d\varphi}{dt} \neq 0; \\ -M_1 \leq M \leq M_1, & \text{при } \frac{d\varphi}{dt} \equiv 0 \\ (0 \langle M_0 \langle M_1). \end{cases}$$

Здесь  $t$  - время,  $\varphi$  - угол поворота диска. Исследуется релаксационный режим автоколебаний, когда проскальзывание диска относительно опорной плоскости чередуется состоянием длительного покоя. Допускается, что при проскальзывании диска его угловая скорость может мгновенно изменять знак на противоположный.

Исследуется релаксационный T-периодический режим автоколебаний (рис.3), при котором внутри интервала  $-t^* < t < 0$  диск неподвижен:  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ , а при  $0 < t < t_*$  - проскальзывает относительно неподвижной опорной плоскости:  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ . При этом период колебаний бу-

рильной колонны определяется по формуле  $T = t_* + t^*$ . За нулевой момент времени ( $t = 0$ ) принимается начало скольжения диска. Будем полагать, что при проскальзывании диска возможна мгновенная смена направления вращения диска, т.е. мгновенная смена знака угловой скорости  $\frac{d\varphi}{dt}$  на противоположный. В прежних работах авторов (см., например, [1-5]) при описании фрикционных релаксационных автоколебаний возможность мгновенной смены направления вращения диска не учитывалась. Похожая задача рассматривалась в диссертации Валуева А.П. [6].

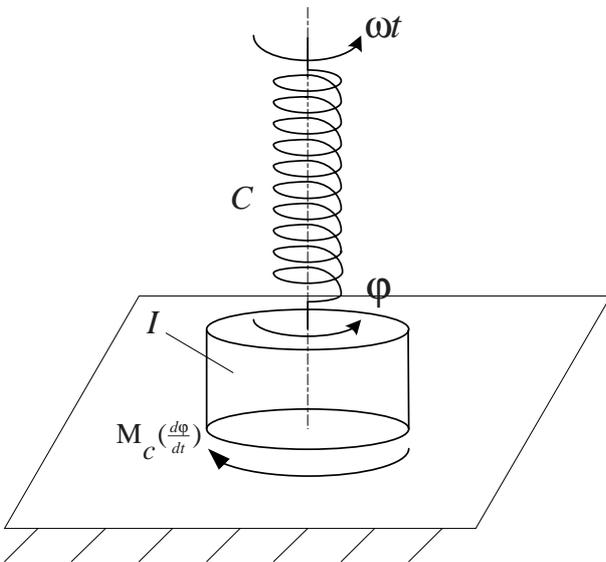


Рис. 1. Одномассовая упругая система

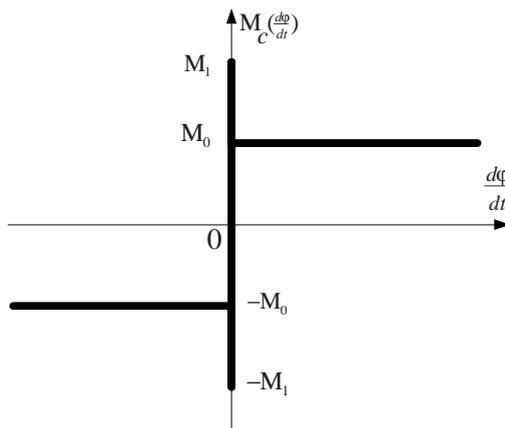


Рис. 2. Скачкообразная характеристика сил сухого трения

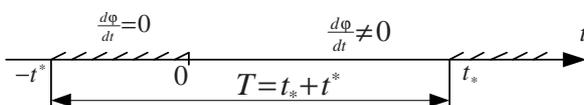


Рис.3. Период автоколебаний

В такой постановке задача о фрикционных автоколебаниях диска запишется так:

$$\begin{cases} I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -c(\varphi - \omega t) - M_0 \text{sign} \frac{d\varphi}{dt}, & 0 < t < t_*; \\ \frac{d\varphi}{dt} = 0, & -t^* < t < 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$t = 0: \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \varphi = -\frac{M_1}{c};$$

$$t = t_*, -t^*: \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \varphi < \frac{M_1}{c}.$$

Следует иметь в виду, что если внутри интервала проскальзывания при  $\frac{d\varphi}{dt} > 0$  в момент остановки  $t = t_*$  происходит мгновенная смена направления вращения, то в последующем при  $t > t_*: \frac{d\varphi}{dt} < 0$  и при  $t > t_* + 0: \frac{d^2\varphi}{dt^2} < 0$ . И наоборот, если при  $\frac{d\varphi}{dt} < 0$  в момент остановки  $t = t_*$  происходит мгновенная смена направления вращения, то в последующем при  $t > t_*: \frac{d\varphi}{dt} > 0$  и при  $t > t_* + 0: \frac{d^2\varphi}{dt^2} > 0$ . В противном случае за интервалом проскальзывания начинается интервал длительного покоя. Такое возможно только при значительном скачке момента сил сухого трения в начале проскальзывания диска.

Вводя безразмерные переменные и константы

$$\tau = \sqrt{\frac{c}{I}} t, \quad \xi = \frac{c}{M_0} (\varphi - \omega t), \quad \Omega = \frac{\omega}{M_0} \sqrt{cI}, \quad \varepsilon = \frac{M_1}{M_0} > 1,$$

где  $\varepsilon$ , будем полагать, достаточно велико, для возникновения возможности мгновенного изменения направления вращения диска при проскальзывании.

Запишем сформулированную задачу (1) в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \xi = -\text{sign}(\dot{\xi} + \Omega), & 0 \leq \tau \leq \tau_*; \\ \dot{\xi} = -\Omega, & -\tau^* \leq \tau \leq 0; \\ \tau = 0: \dot{\xi} = -\Omega, \quad \xi = -\varepsilon; \\ \tau = -\tau_*, \tau^*: \dot{\xi} = -\Omega, \quad \xi < \varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь точка означает дифференцирование по  $\tau$ .

От схемы, показанной на рис.1, переходим к эквивалентной обращенной схеме (рис.2). Интервал  $0 \leq \tau \leq \tau_*$  будем называть зоной скольжения диска ( $\dot{\xi} \neq -\Omega$ ), а интервал  $-\tau^* \leq \tau \leq 0$  - зоной застоя ( $\dot{\xi} = -\Omega$ ). При наличии на периоде автоколебаний нескольких моментов мгновенных изменений направления вращения диска, разобьем временной интервал

зоны скольжения на временные интервалы локального времени. Каждый такой локальный интервал будет начинаться и заканчиваться соседними моментами, когда направление вращения диска мгновенно изменяется на противоположное (последний такой интервал будет заканчиваться остановкой диска, при переходе в зону застоя). За начальный момент времени каждого локального временного интервала будем брать нулевой момент, что позволит избежать громоздких вычислений при нахождении решений первого дифференциального уравнения системы (2). Длительность таких интервалов локального времени будем обозначать через  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_k$  (рис. 5). Тогда длительность интервала скольжения будет равна:  $\tau_* = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \dots + \tau_k$ .

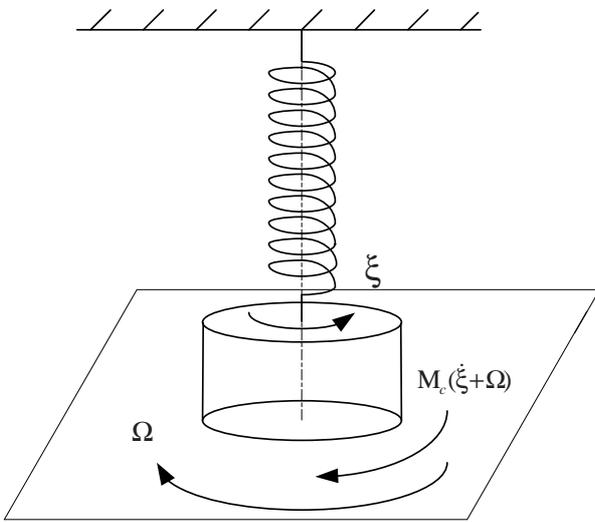


Рис. 4. Обращенная схема одномассовой упругой системы

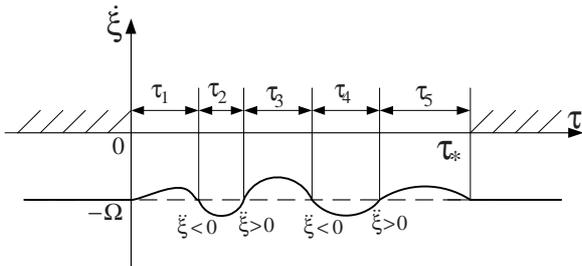


Рис.5. Локальные временные интервалы

На 1-м локальном интервале  $0 \leq \tau \leq \tau_1$   $\dot{\xi} > -\Omega$ , поэтому дифференциальное уравнение скольжения диска, согласно (2), примет вид  $\ddot{\xi} + \xi = -1$ , причем при  $\tau = 0$ :  $\dot{\xi} = -\Omega$ ,  $\xi = -\varepsilon$ . Решая это уравнение, получим  $\xi = -(\varepsilon - 1)\cos \tau - \Omega \sin \tau - 1$ , амплитуда колебаний на этом интервале равна:  $A_1 = \sqrt{(\varepsilon - 1)^2 + \Omega^2}$ . При  $\tau = \tau_1$  должно выполняться  $\dot{\xi} = -\Omega$ , поэтому для определения  $\tau_1$  получим уравнение  $(\varepsilon - 1)\sin \tau_1 - \Omega \cos \tau_1 = -\Omega$ . Выделяя наименьший положительный корень, находим

$$\tau_1 = 2 \left( \pi - \arctg \frac{\varepsilon - 1}{\Omega} \right), \quad \text{причем } \xi_1 = \xi|_{\tau=\tau_1} = \varepsilon - 2. \quad \text{Для}$$

мгновенного изменения направления вращения диска необходимо, чтобы выполнялось

$$\dot{\xi}|_{\tau=\tau_1+0} = (-\xi_1 + 1) = -\varepsilon + 3 < 0, \quad \text{т.е.}$$

$$\varepsilon > 3; \quad (3)$$

в противном случае диск при  $\tau = \tau_1$  входит в зону длительного покоя. Будем полагать, что выполняется условие (3).

На 2-м локальном интервале  $0 \leq \tau \leq \tau_2$   $\dot{\xi} < -\Omega$ , поэтому дифференциальное уравнение скольжения диска принимает вид  $\ddot{\xi} + \xi = +1$ , причем при  $\tau = 0$ :  $\dot{\xi} = -\Omega$ ,  $\xi = \xi_1 = \varepsilon - 2$ .

Решая его получим  $\xi = (\varepsilon - 3)\cos \tau - \Omega \sin \tau + 1$ ; амплитуда колебаний на этом интервале равна:  $A_2 = \sqrt{(\varepsilon - 3)^2 + \Omega^2}$ . При  $\tau = \tau_2$  должно выполняться  $\dot{\xi} = -\Omega$ , поэтому для определения  $\tau_2$  получим уравнение

$$-(\varepsilon - 3)\sin \tau_2 - \Omega \cos \tau_2 = -\Omega,$$

откуда находим наименьший положительный корень  $\tau_2 = 2 \arctg \frac{\varepsilon - 3}{\Omega}$ . Кроме того  $\xi_2 = \xi|_{\tau=\tau_2} = -\varepsilon + 4$ . Как и ранее, для мгновенного изменения направления вращения диска потребуем (рис.5):

$$\dot{\xi}|_{\tau=\tau_2+0} = -\xi_2 - 1 = \varepsilon - 5 > 0, \quad \text{т.е.}$$

$$\varepsilon > 5. \quad (4)$$

Будем полагать, что условие (4) выполняется.

На 3-м локальном интервале  $0 \leq \tau \leq \tau_3$ , когда  $\dot{\xi} > -\Omega$ , дифференциальное уравнение скольжения диска принимает вид  $\ddot{\xi} + \xi = -1$ , с начальными условиями: при  $\tau = 0$   $\dot{\xi} = -\Omega$ ,  $\xi = \xi_2 = -\varepsilon + 4$ . Решая уравнение, получим  $\xi = -(\varepsilon - 5)\cos \tau - \Omega \sin \tau - 1$ , амплитуда колебаний равна:  $A_3 = \sqrt{(\varepsilon - 5)^2 + \Omega^2}$ . Далее по аналогии с предыдущими выкладками нетрудно получить  $\tau_3 = 2 \left( \pi - \arctg \frac{\varepsilon - 5}{\Omega} \right)$ ,  $\xi_3 = \xi|_{\tau=\tau_3} = \varepsilon - 6$ . Условие для мгновенного изменения направления вращения диска примет вид  $\dot{\xi}|_{\tau=\tau_3+0} = -\xi_3 + 1 = -\varepsilon + 7 < 0$ , т.е.  $\varepsilon > 7$ .

И так далее, полагая, что  $\varepsilon$  достаточно велико.

На  $k$ -м локальном интервале  $0 \leq \tau \leq \tau_k$ , когда  $(-1)^{k+1} \dot{\xi} > -\Omega (-1)^{k+1}$ , дифференциальное уравнение скольжения диска принимает вид

$$\ddot{\xi} + \xi = (-1)^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

при  $\tau = 0$ :  $\dot{\xi} = -\Omega$ ,  $\xi = \xi_{k-1} = \xi|_{\tau=\tau_{k-1}}$ .

Решением дифференциального уравнения (5) будет

$$\xi = \left[ \xi_{k-1} + (-1)^{k+1} \right] \cos \tau - \Omega \sin \tau + (-1)^k, \quad (6)$$

амплитуда колебаний  $k$ -го интервала равна:

$$A_k = \sqrt{\left[ \xi_{k-1} + (-1)^{k+1} \right]^2 + \Omega^2}. \quad (7)$$

Для  $k$ -го интервала определим

$$\tau_k = 2 \begin{cases} \left[ \pi + \arctg \frac{\xi_{k-1} - (-1)^k}{\Omega} \right], & \text{при } k = 1, 3, 5, \dots; \\ \arctg \frac{\xi_{k-1} - (-1)^k}{\Omega}, & \text{при } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (8)$$

$$\xi_k = -\xi_{k-1} + 2(-1)^k. \quad (9)$$

Условие для мгновенного изменения направления вращения диска:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}|_{\tau=\tau_k+0} &= -\xi_k + (-1)^{k+1} = \xi_{k-1} + 3(-1)^{k+1} < 0, & \text{при } k = 1, 3, 5, \dots; \\ \dot{\xi}|_{\tau=\tau_k+0} &= -\xi_k + (-1)^{k+1} = \xi_{k-1} + 3(-1)^{k+1} > 0, & \text{при } k = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Полученные рекуррентные формулы (6-10) позволяют получить окончательные формулы для  $k$ -го интервала:

$$\xi = (-1)^{k-1} [2k - (\varepsilon + 1)] \cos \tau - \Omega \sin \tau + (-1)^k; \quad (11)$$

$$A_k = \sqrt{[2k - (\varepsilon + 1)]^2 + \Omega^2}; \quad (12)$$

$$\xi_k = (-1)^k (2k - \varepsilon); \quad (13)$$

$$\tau_k = 2 \left\{ \pi \left[ \frac{1 - (-1)^k}{2} \right] + (-1)^{k+1} \arctg \frac{2k - (\varepsilon + 1)}{\Omega} \right\}. \quad (14)$$

Условие для мгновенного изменения направления вращения диска:

$$\varepsilon > (2k + 1), \quad (15)$$

из которого, если обозначить через  $k_*$  число мгновенных изменений направления вращения диска на периоде автоколебаний, следует

$$k_* = \left[ \frac{\varepsilon - 1}{2} - 10^{-5} \right], \quad (16)$$

где [...] означает наибольшую целую часть числа, не превышающую само число. Следует иметь в виду, что

последний локальный временной интервал, на котором диск останавливается и входит в зону застоя, будет  $(k_* + 1)$ -й. Заметим, для того чтобы приведенная формула (16) работала и при  $\varepsilon = 3; 5; 7; \dots$  из выражения  $\frac{\varepsilon - 1}{2}$

вычитается малое число  $10^{-5}$  (вместо него можно было выбрать любое другое малое число, меньшее задаваемой точности проводимых расчетов).

Момент окончания длительности проскальзывания диска следует определять по формуле:

$$\tau_* = \sum_{k=1}^{k_*+1} \tau_k = 2 \sum_{k=1}^{k_*+1} \left\{ \pi \left[ \frac{1 - (-1)^k}{2} \right] + (-1)^{k+1} \arctg \frac{2k - (\varepsilon + 1)}{\Omega} \right\}; \quad (17)$$

На последующем этапе застоя  $-\tau^* \leq \tau \leq 0$ :  $\dot{\xi} = -\Omega$ , с начальным условием: при  $\tau = 0$   $\xi = -\varepsilon$ . Отсюда следует

$$\xi = -\Omega \tau - \varepsilon. \quad (18)$$

Используя условие непрерывности  $\xi|_{\tau=-\tau^*} = \xi|_{\tau=\tau_*}$  и принимая во внимание, что  $\xi|_{\tau=\tau_*} = \xi_k|_{k=k_*+1}$ , получим

$$\Omega \tau^* - \varepsilon = (-1)^{k_*+1} [2(k_* + 1) - \varepsilon],$$

откуда время застоя диска определяется равенством:

$$\tau^* = \frac{\varepsilon + (-1)^{k_*} [\varepsilon - 2(k_* + 1)]}{\Omega}, \quad (19)$$

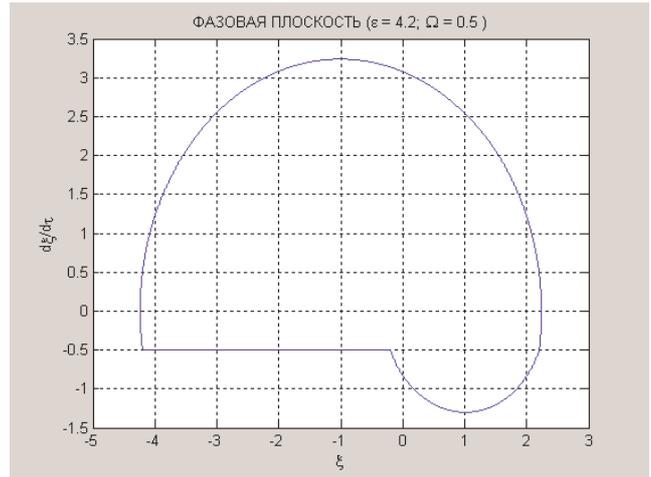
а период автоколебаний - формулой:

$$\Lambda = \tau_* + \tau^* = 2 \sum_{k=1}^{k_*+1} \left\{ \pi \left[ \frac{1 - (-1)^k}{2} \right] + (-1)^{k+1} \arctg \frac{2k - (\varepsilon + 1)}{\Omega} \right\} + \frac{\varepsilon + (-1)^{k_*} [\varepsilon - 2(k_* + 1)]}{\Omega}. \quad (20)$$

Строгое доказательство приведенных формул (11-20) можно сделать методом математической индукции. На основании формул (11-20) в среде MatLab была написана универсальная программа для расчета описанной модели при любом количестве мгновенных изменений направления вращения (мгновенных перескоков) диска на периоде автоколебаний. Ниже на рис. 6-15 приведены графики изменения угловой скорости вращения диска от текущего времени и фазовой плоскости в безразмерных величинах при различных параметрах системы.



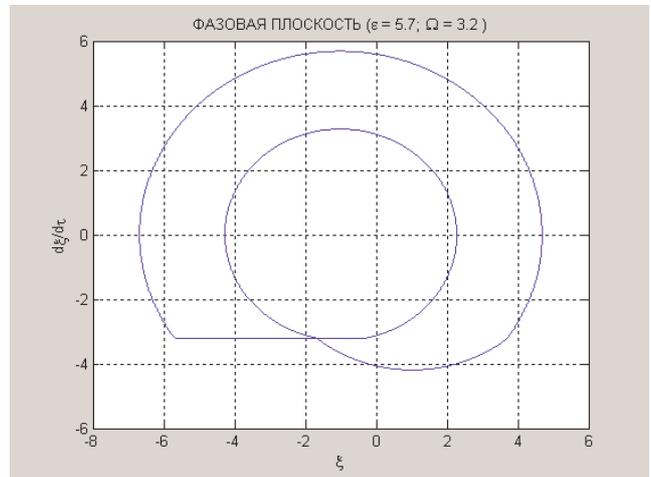
**Рис.6.** График изменения скорости для случая с одним перескоком



**Рис.7.** Фазовая плоскость для случая с одним перескоком



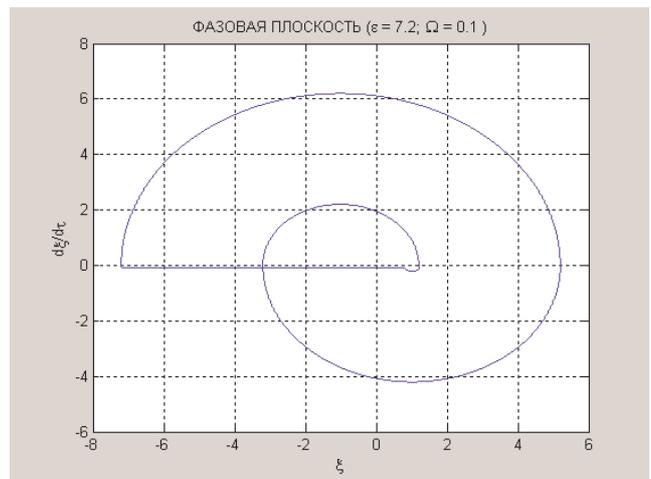
**Рис.8.** График изменения скорости для случая с двумя перескоками



**Рис.9.** Фазовая плоскость для случая с двумя перескоками



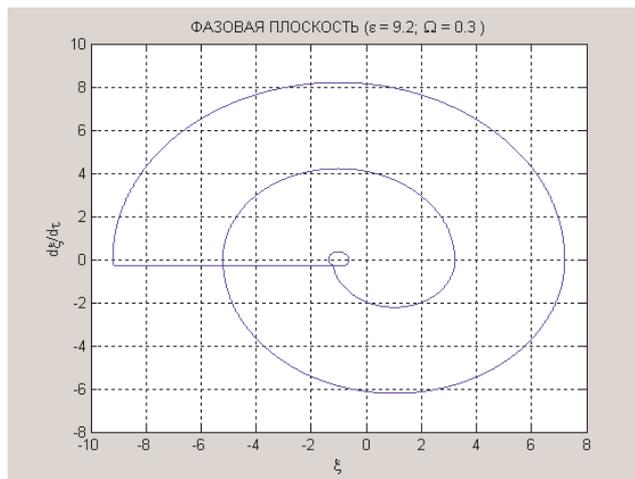
**Рис.10.** График изменения скорости для случая с тремя перескоками



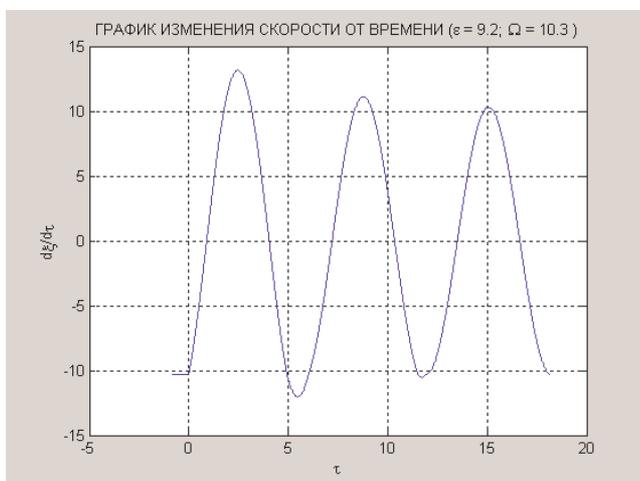
**Рис.11.** Фазовая плоскость для случая с тремя перескоками



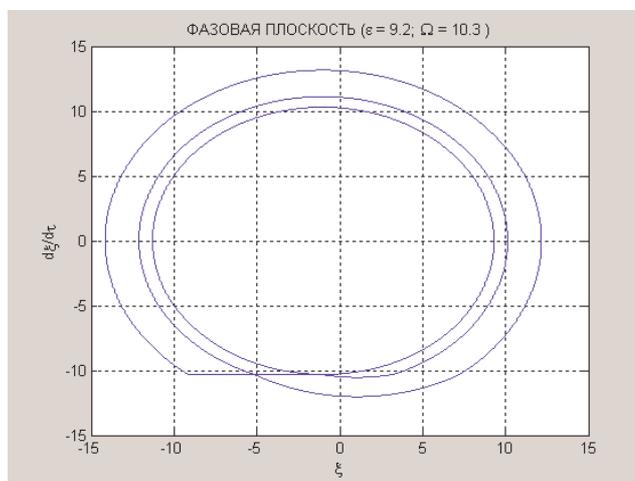
**Рис.12.** График изменения скорости для случая с четырьмя перескоками



**Рис.13.** Фазовая плоскость для случая с четырьмя перескоками



**Рис.14.** График изменения скорости для случая с четырьмя перескоками



**Рис.15.** Фазовая плоскость для случая с четырьмя перескоками

Графики наглядно демонстрируют динамику возникающих фрикционных автоколебаний на периоде.

Приведенную модель можно рекомендовать как модельную при переходе к изучению более сложных систем с возможностью мгновенных изменений направления движения.

### Литература

1. Белокобыльский С.В., Нагаев Р.Ф. Метод частичной гармонической линеаризации в задаче о фрикционных автоколебаниях механических систем с несколькими степенями свободы // Акад. наук СССР. Машиноведение. 1985. № 5. С. 27-31.
2. Белокобыльский С.В. Устойчивость стационарных движений и автоколебания механических систем с сухим трением: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Братск, 2006. 32 с.
3. Коронатов В.А. Фрикционные колебания буровой колонны: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород, 1993. 18 с.
4. Белокобыльский С.В., Коронатов В.А. Фрикционные автоколебания при глубоком бурении // Математическое моделирование, численные и комплексы программ: межвуз. темат. сб. СПб., 2000. Вып. 6. С. 123-129.
5. Белокобыльский С.В. Динамика систем с сухим трением и ее приложение к задачам горной механики. М.: Машиностроение, 2002. 209 с.

6. Валуев А.П. Фрикционные автоколебания релаксационного и квазигармонического типа: автореф. ... дис. канд. физ.-мат. наук. СПб., 1998. 17 с.

### References

1. Belokobyl'sky S.V., Nagaev R.F. Method of partial accordion-d linearization of the problem of friction of self-excited vibrations of mechanical systems with few degrees of freedom // Academy of Sciences of the USSR science of machines. 1985. № 5. S. 27-31.
2. Belokobyl'sky S.V. Stationary motions stability and self-excited vibrations of dry friction mechanical systems: avtoref. dis. ... d-ra tekhn. nauk. Bratsk, 2006. 32 s.
3. Koronатов V.A. Frictional vibrations of a drilling string: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. N. Novgorod, 1993. 18 s.
4. Belokobyl'sky S.V., Koronатов V. A. Friction self-oscillations in deep drilling // Mathematical modeling, numerical and complexes of programs: the interuniversity collection. SPb.: Save, 2000. Vol. 6. S. 123-129.
5. Belokobyl'sky S.V. Dynamics of systems with dry friction and its application to problems of mining mechanics. M: Mashinostroyeniye, 2002. 209 s.
6. Valuev A.P. Self-excited frictional vibrations of relaxation and quasi-harmonic types: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. SPb., 1998. 17 s.