

УДК 630\*812.72

## О выборе типа ядра интегрального уравнения релаксации напряжений в древесных материалах

В.В. Швецова<sup>1</sup>, А.Р. Бирман<sup>1</sup>, Е.В. Ефимова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет, Институтский пер. 5, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: tlzp@inbox.ru

Статья поступила 25.10.2012, принята 28.11.2012

*При установлении параметров технологических процессов механической и гидротермической обработки древесины, при расчете элементов деревянных конструкций и в других случаях необходимо аналитическое определение напряженного и деформированного состояния древесины. При длительном воздействии механических нагрузок, колебаний влажности и температуры проявляются так называемые реологические свойства древесины, т. е. ее способность деформироваться под нагрузкой во времени. В статье на основании полученных ранее экспериментальных данных получены реологические коэффициенты для случая релаксации напряжений при сжатии вдоль волокон древесины сосны. Коэффициенты определены для двух типов ядер интегрального уравнения релаксации напряжений: экспоненциального ядра (применяется для описания ограниченного процесса релаксации) и ядра Абеля (неограниченная релаксация). Показано, что использование ядра Абеля дает хорошую сходимость с экспериментальными данными, полученными при краткосрочном (до 10 минут) наблюдении. Также установлено различие реологических коэффициентов при начальном напряжении до предела пластического течения и вблизи него.*

**Ключевые слова:** Релаксация напряжений, древесные материалы, интегральное уравнение, ядро Абеля, экспоненциальное ядро

## On the selection of the kernel of stress relaxation integral equation for wood materials

V.V. Shvetsova<sup>1</sup>, A.R. Birman<sup>1</sup>, E.V. Efimova<sup>1</sup>

<sup>1</sup>St. Petersburg State Forestry Engineering University, 5 Institutsky lane, St. Petersburg, Russia. E-mail: tlzp@inbox.ru

The article received 25.10.2012, accepted 28.11.2012

*When setting the technological processes parameters of mechanical and hydrothermal wood treatment, to calculate wooden structures elements and in some other cases, it is necessary to determine analytically the wood stress and strain condition. Under the long-term effects of mechanical loads, humidity and temperature fluctuations, the so-called rheological properties of wood, i.e. its ability to become deformed under the load over time have become apparent. Based on the experimental data got earlier, the rheological coefficients for the case of stress relaxation under compression along the pine grain have been obtained in the article. The coefficients have been determined for the two types of kernels of the stress relaxation integral equation: the exponential kernel (used to describe a limited relaxation process) and the Abel's kernel (unlimited relaxation). It has been shown that the application of the Abel's kernel gives good agreement with the experimental data obtained in the short-term (up to 10 minutes) observation. It has also been found out the differences in the rheological coefficients under initial voltage up to the plastic yielding limit and near it.*

**Keywords:** stress relaxation, wood materials, integral equation, Abel's kernel, exponential kernel.

При обработке и использовании древесины в качестве конструкционного и поделочного материала проявляются свойства, характеризующие ее способность сопротивляться механическим усилиям. При установлении параметров технологических процессов механической и гидротермической обработки древесины, при расчете элементов деревянных конструкций и в других случаях необходимо аналитическое определение напряженного и деформированного состояния древесины.

При действии кратковременных нагрузок, не превышающих определенного значения, древесина ведет себя, как упругое тело. И для того, чтобы охарактеризовать деформативность древесины в этих условиях (жесткость), используют упругие постоянные: модули упругости, коэффициенты поперечной деформации (коэффициенты Пуассона) и модули сдвига [1]. При длительном

воздействии механических нагрузок, колебаний влажности и температуры проявляются так называемые реологические свойства древесины, т. е. ее способность деформироваться под нагрузкой во времени.

Реологические свойства древесины и особенности ее деформирования при различной последовательности силовых, влажностных и температурных воздействий учитываются при разработке режимов гидротермической (например, для получения шпона) и механической (гнутье, прессование) обработки, консервирования, модифицирования древесины [1].

Реологические коэффициенты можно получить в процессе двух основных видов испытаний: на ползучесть и релаксацию. В первом случае ведется наблюдение за величиной деформации образца, возникающей под действием нагрузки, мгновенно приложенной и не изменяемой в

течение испытаний. Во втором случае образцу сообщается начальная деформация, которая во время испытаний поддерживается постоянной. При этом значение напряжений снижается по сравнению с начальным.

В работе [2] приведены экспериментальные данные о релаксации напряжения при сжатии вдоль волокон естественной древесины сосны (рис. 1). В ходе опытов образцам задавалась некоторая деформация, являющаяся постоянной величиной; при этом регистрировалось сопротивление образцов деформированию (напряжение). Данные получены при испытании древесины с влажностью 10-11 %.

По оси ординат отложена абсолютная величина разности текущего  $\sigma(t)$  и начального  $\sigma_0$  напряжения, вызванного деформацией:

$$\Delta\sigma = |\sigma(t) - \sigma_0|. \quad (1)$$

Там же предложена зависимость, описывающая процесс релаксации в следующем виде:

$$\Delta\sigma = \sigma_0(1 - e^{-Kt}), \quad (2)$$

где  $K$  – некоторый постоянный коэффициент, зависящий от свойств древесины.

Известно [4] соотношение линейной теории вязкоупругости для описания релаксации напряжений в одномерном случае, имеющее следующий вид:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - E \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \quad (3)$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\varepsilon$  – относительная деформация,  $R(t-\tau)$  – ядро релаксации.

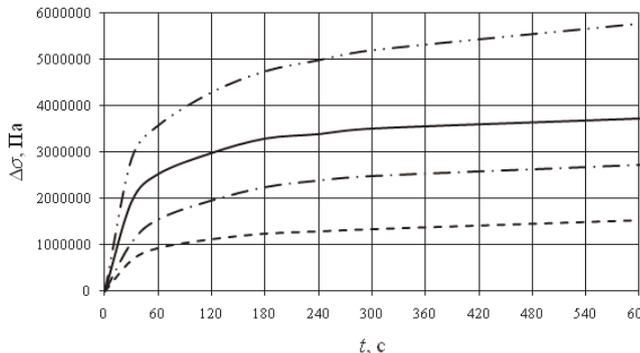


Рис. 1. Кривые релаксации при сжатии древесины сосны вдоль волокон:

Поскольку процесс релаксации происходит при постоянной относительной деформации, т. е.  $\varepsilon = \text{const}$ , уравнение (3) после преобразований запишется в виде:

$$\sigma(t) = \sigma_0 - \sigma_0 \int_0^t R(t-\tau)d\tau \quad (4)$$

Ядро релаксации выбирают по виду экспериментально полученной кривой релаксации. При этом у полимеров различают такие виды релаксации напряжений, как:

1. неограниченная (нет асимптоты);
2. ограниченная (горизонтальная асимптота);
3. установившаяся (наклонная асимптота).

Отметим, что соотношение (2) может быть получено из (4) при использовании экспоненциального ядра, описывающего ограниченную релаксацию, вида:

$$R(t-\tau) = \lambda e^{-\beta(t-\tau)}, \quad (5)$$

где  $\lambda, \beta$  – некоторые постоянные.

Для описания неограниченной релаксации используют, в частности, разностное ядро Абеля:

$$R(t-\tau) = \chi \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (6)$$

где  $\chi, \alpha$  – некоторые постоянные,  $\Gamma(\dots)$  – гамма-функция, определяемая как [5]:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} f^{z-1} e^{-f} df. \quad (7)$$

После поочередной подстановки (5), (6) в (4) и преобразований получим следующие уравнения для описания процесса релаксации:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left( 1 + \chi \frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \right), \quad (8)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \frac{\lambda}{\beta} (1 - e^{-\beta t}). \quad (9)$$

На основании данных (рис. 1) определим постоянные для (8), (9) методом наименьших квадратов. Значения постоянных, полученных после обработки данных опытов, сведем в таблицах 1, 2.

Таблица 1

Значения постоянных уравнения (8)

	$\sigma_0 = 0,61\sigma_{\text{пр}}$	$\sigma_0 = 0,79\sigma_{\text{пр}}$	$\sigma_0 = 0,95\sigma_{\text{пр}}$	$\sigma_0 = 1,13\sigma_{\text{пр}}$
$\sigma_0$	18,31	23,73	28,52	33,92
$\chi$	-0,01711	-0,02014	-0,03665	-0,03961
$\alpha$	0,7612	0,7322	0,8052	0,7806

Таблица 2

Значения постоянных уравнения (9)

	$\sigma_0 = 0,61\sigma_{\text{пр}}$	$\sigma_0 = 0,79\sigma_{\text{пр}}$	$\sigma_0 = 0,95\sigma_{\text{пр}}$	$\sigma_0 = 1,13\sigma_{\text{пр}}$
$\sigma_0$	18,26	23,61	28,43	33,71
$\lambda$	-0,02338	-0,03364	-0,07564	-0,09771
$\beta$	0,01774	0,01374	0,02240	0,01961

После подстановки коэффициентов из таблиц 1, 2 в соответствующие уравнения и преобразований получим следующие уравнения для релаксации напряжений:

–  $\sigma_0 = 0,61\sigma_{\text{пр}}$   
 экспоненциальное ядро:  $\sigma(t) = 16,94 - 1,318e^{-0,01774t} \quad (10)$

ядро Абеля:  $\sigma(t) = 18,31 - 0,3443t^{0,2388} \quad (11)$

$-\sigma_0 = 0,79\sigma_{\text{пр}}$

экспоненциальное ядро:  $\sigma(t) = 21,16 - 2,449e^{-0,01374t}$  (12)

ядро Абеля:  $\sigma(t) = 23,73 - 0,5294t^{0,2678}$  (13)

$-\sigma_0 = 0,95\sigma_{\text{пр}}$

экспоненциальное ядро:  $\sigma(t) = 25,05 - 3,337e^{-0,02240t}$  (14)

ядро Абеля:  $\sigma(t) = 28,52 - 1,137t^{0,1948}$  (15)

$-\sigma_0 = 1,13\sigma_{\text{пр}}$

экспоненциальное ядро:  $\sigma(t) = 28,73 - 1,928e^{-0,01961t}$  (16)

ядро Абеля:  $\sigma(t) = 33,92 - 1,471e^{0,2194}$  (17)

С помощью уравнений (10) – (17) построены графики на рис. 2 – 5.

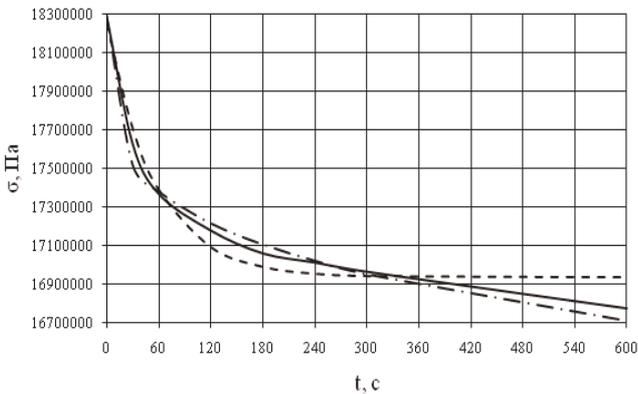


Рис. 2. Релаксация напряжений при  $\sigma_0 = 0,61\sigma_{\text{пр}}$ : --- - экспериментальные данные, - - - - данные расчета по уравнению (10) (экспоненциальное ядро), -.-.- - данные расчета по уравнению (11) (ядро Абеля).

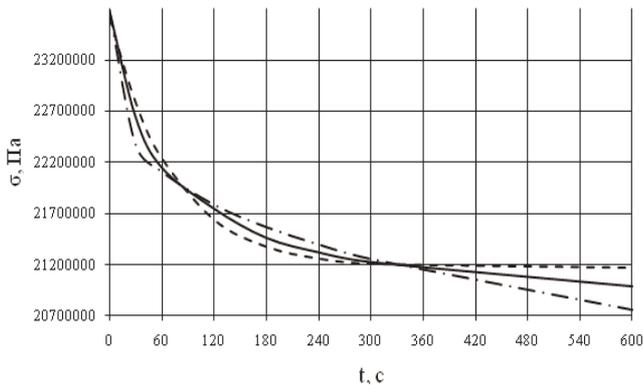


Рис. 3. Релаксация напряжений при  $\sigma_0 = 0,79\sigma_{\text{пр}}$ : --- - экспериментальные данные, - - - - данные расчета по уравнению (12) (экспоненциальное ядро), -.-.- - данные расчета по уравнению (13) (ядро Абеля).

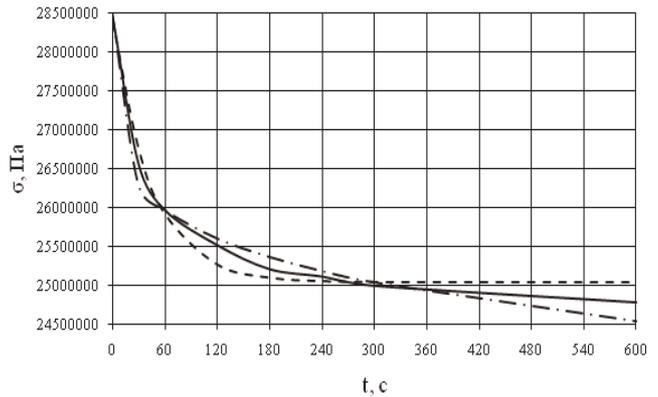


Рис. 4. Релаксация напряжений при  $\sigma_0 = 0,95\sigma_{\text{пр}}$ : --- - экспериментальные данные, - - - - данные расчета по уравнению (14) (экспоненциальное ядро), -.-.- - данные расчета по уравнению (15) (ядро Абеля).

Графики на рисунках показывают, что использование как экспоненциального ядра, так и ядра Абеля, дает близкие к экспериментальным значения действующего напряжения (при времени  $t$  от 0 до 600 с), однако можно отметить, что данные расчетов по (11), (13), (15), (17) (ядро Абеля) несколько ближе к экспериментальным. При этом при использовании для описания релаксации экспоненциального ядра во всех рассмотренных случаях релаксация напряжений прекращается спустя приблизительно 300 с.

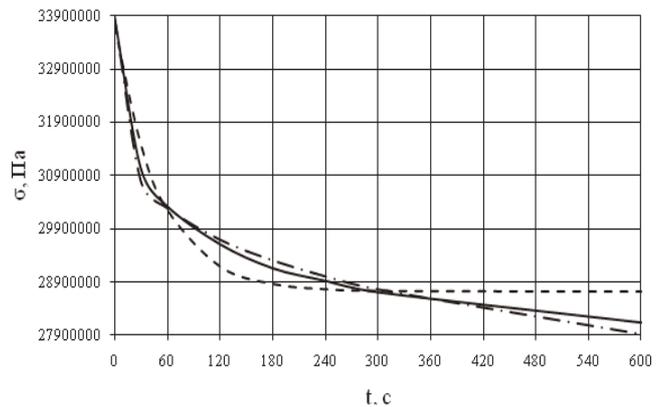


Рис. 5. Релаксация напряжений при  $\sigma_0 = 1,13\sigma_{\text{пр}}$ : --- - экспериментальные данные, - - - - данные расчета по уравнению (16) (экспоненциальное ядро), -.-.- - данные расчета по уравнению (17) (ядро Абеля).

Полученные значения коэффициентов  $\lambda, \beta, \chi, a$  при различных начальных напряжениях  $\sigma_0$  отличаются друг от друга (таблицы 1, 2), однако можно отметить, что при  $\sigma_0 = 0,61\sigma_{\text{пр}}$  и  $0,79\sigma_{\text{пр}}$ , а также при  $\sigma_0 = 0,95\sigma_{\text{пр}}$  и  $1,13\sigma_{\text{пр}}$  они достаточно близки для обоих типов ядер релаксации. Предположим, что указанные отличия объясняются лишь погрешностью эксперимента. В дальнейших расчетах будем определять их значение следующим образом: при напряжениях до предела текучести – как среднее арифметическое значение коэффициентов при  $\sigma_0 = 0,61\sigma_{\text{пр}}$  и  $0,79\sigma_{\text{пр}}$ , вблизи предела текучести – как среднее значение при  $\sigma_0 = 0,95\sigma_{\text{пр}}$  и  $1,13\sigma_{\text{пр}}$ .

Тогда с использованием (8), (9):

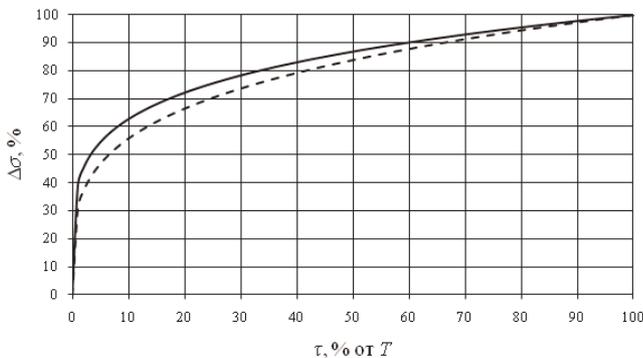
$$\begin{aligned} & - \sigma_0 = 0,7\sigma_{\text{пр}} \\ & \text{экспоненциальное} \quad \sigma(t) = 19,19 - 1,811e^{-0,01574t} \quad (18) \\ & \text{ядро:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ядро Абеля:} \quad \sigma(t) = 21,00 - 0,432e^{0,2522} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \sigma_0 = \sigma_{\text{пр}} \\ & \text{экспоненциальное} \quad \sigma(t) = 25,87 - 1,126e^{-0,02101t} \quad (20) \\ & \text{ядро:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ядро Абеля:} \quad \sigma(t) = 30,00 - 1,248e^{0,2071} \quad (21) \end{aligned}$$

Правые части уравнений (18), (20), очевидно, не обращаются в ноль при  $t > 0$ ; при  $t \rightarrow \infty$  имеем:  $\sigma(\infty) = 19,19$  (по (18)) и  $\sigma(\infty) = 25,76$  (по (20)). Таким образом, при расчетах с использованием экспоненциального ядра максимальная релаксация напряжений составит 9 и 14 % (до и вблизи предела текучести соответственно).



**Рис. 6.** Процесс релаксации напряжений при использовании ядра Абеля.

При использовании уравнений (19), (21) время полной релаксации напряжений  $T$  составит 53 и 54 суток соответственно. Обозначим  $\tau$  некоторую долю от  $T$ ,

УДК 533.6.071

## Математическое описание процессов в системе ультразвуковой очистки железнодорожных стрелок с применением вихревого эффекта

Д.А. Филатов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия  
E-mail: drugs1989@mail.ru

Статья получена 4.08.12, принята 21.11.12

*Предложен новый способ очистки железнодорожных стрелок, реализуемый пропусканием сжатого воздуха от пневмоматрицы через вихревую трубу и ультразвуковую сирену для наиболее эффективного разрушения и топления снега и льда. В качестве генератора горячего сжатого воздуха для успешного топления снега и льда выступает вихревая труба противоточного типа. В качестве генератора ультразвука для разрушения льда выступает ультразвуковая статическая сирена ти-*

тогда процесс релаксации, описываемый с помощью ядра Абеля, можно представить в виде графика на **рис. 6** ( $\Delta\sigma$  определяется по (1), при этом  $t = \tau T$ ).

Для окончательного ответа на вопрос о том, какой тип ядра является предпочтительным при тех или иных условиях, необходимо проведение исследований в более широком временном диапазоне. Предметом дальнейших исследований также должно явиться определение реологических постоянных древесных материалов при различном значении их влажности и температуры.

### Литература

1. Буглай, Б.М. Технология изделий из древесины/ Б.М. Буглай, Н.А. Гончаров. - М.: Лесная промышленность, 1985. - 408 с.
2. Хухрянский, П. Н. Прочность древесины: монография/ П.Н. Хухрянский - М.; Л.: Гослесбумиздат, 1955. - 152 с.
3. Уголев, Б.Н. Древесиноведение с основами лесного товароведения/ Б.Н. Уголев; Московский государственный университет леса. - 3-е изд., перераб. и доп. - М.: Изд-во МГУЛ, 2001. - 340 с.
4. Пестриков, В.М. Механика разрушения на базе компьютерных технологий. Практикум/В.М. Пестриков, Е.М. Морозов - СПб.: БХВ-Петербург, 2007. - 464 с.
5. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров/ Г. Корн, Т. Корн - СПб.: Лань, 2003. - 832 с.

### References

1. Buglay, VM The technology of wood / VM Buglay, NA Potters. - M.: Forest Industry, 1985. - 408 p.
2. Khukhrianskii, P. Durability of wood: monograph / PN Khukhrianskii - Moscow-Leningrad Goslesbumizdat, 1955. - 152.
3. Ugolev, BN Wood-the basics of forest merchandising / BN Angle, Moscow State Forest University. - 3rd ed., Rev. and add. - Moscow: Publishing House of Moscow State Forest University, 2001. - 340 p.
4. Pestrikov, VM Fracture mechanics based on computer technology. Workshop / VM. Pestrikov, EM Morozov - St.: BHV-Petersburg, 2007. - 464.
5. Korn, G., Mathematical Handbook for Scientists and Engineers / G. Korn, T. Korn - St.: Lan, 2003. - 832 p.