

## Теоретические основы процессов взаимодействия материальной частицы с вибрирующей поверхностью с неудерживающими связями

И.С. Ситов<sup>1</sup>, С.В. Елисеев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия. E-mail: plemja@rambler.ru

<sup>2</sup> Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского, 15, Иркутск, Россия  
Статья поступила 17.08.2012, принята 20.11.2012

*Рассматриваются задачи определения условий нарушения контакта в системах, содержащих неудерживающие связи. Получены аналитические соотношения для определения условий отрыва с последующим подлетом. Полученный дифференциальный критерий отрыва определяет необходимые и достаточные условия отрыва материальной частицы от поверхности колебания. Предложен расчет промежутков отрыва и контакта материальной частицы с поверхностью, зависимости уровня и высоты подлета частицы, условия существования режимов «в одно касание», оценка отношения высоты подлета точки к амплитуде колебания поверхности. Установлено, что отрыв с предварительным пролеживанием возможен только из точек отрыва третьего порядка, то есть, из точек с реакцией опоры, равной нулю. Получены формулы для определения высоты и длительности полета. Определены значения динамического показателя для точек отрыва третьего порядка. Доказано, что при фиксированной амплитуде колебаний, увеличивая частоту колебаний поверхности, материальную частицу можно подбросить на сколь угодно большую высоту, столкнувшись лишь с конструктивными ограничениями. Показано, что высота траектории подлета из точки отрыва третьего порядка выше всех траекторий подлета из точек второго порядка. Также определено, что средняя высота подлета всех частиц из области отрыва второго порядка при росте амплитуды и частоты в четыре раза меньше высоты подлета частицы из области третьего порядка. Введена функция зазора. Предложена теорема для определения необходимых и достаточных условий отрыва.*

**Ключевые слова:** неудерживающие связи, взаимодействие материальной частицы с вибрирующей поверхностью, режим подлета материальной частицы, зазоры при нарушении контакта.

## Theoretical bases of processes of interaction of a material particle with a vibrating surface with «not holding» ties

I.S. Sitov<sup>1</sup>, S.V. Eliseev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Bratsk State University, 40, Makarenko str., Bratsk, Russia. E-mail: plemja@rambler.ru

<sup>2</sup> Irkutsk State University of Railway Engineering, 15, Chernyshevskogo str., Irkutsk, Russia  
The article received 17.08.2012, accepted 20.11.2012

*Tasks of disturb of conditions of contacts in mechanical systems with «not hold back» ties are considered. The analytical relations for determining conditions of tear-off with subsequent separation. The resulting differential criterion of separation determines necessary and sufficient conditions for the separation of material particles from the surface vibrations. Proposed calculation of the gap of separation, and the contact of the material particle with the surface, depending on the level and the height of the approach of particles conditions for the existence of modes in the «one-touch», evaluation of the relationship height entry point to the amplitude of the oscillations of the surface it is Established that the separation of pre-delay is possible only from the point of separation of the third order, that is one of the points with reaction of support is equal to zero. The formulas for the determination of the height and duration of the flight. Determined the values of dynamic indicator for tear-off points of the third order. It is proved that the fixed vibration amplitude of the increasing frequency of oscillations of the surface, the material particle, you can drop on an arbitrarily large height, faced only with the structural constraints. It is shown that the height of its flight trajectory of the separation point of the third order above all trajectories of approach of the points of the second order. The same can be determined that the average height of flight of all particles from the tear-off of the second order with the growth of the amplitude and frequency of four times less than the height of approach of the particles of the third order. Put the function of the gap. Proposed theorem for the determination of necessary and sufficient conditions tear-off position.*

**Keywords:** not holding ties, interaction of a material particle with a vibrating surface, a mode of a material particle tossing, gaps at contact violation.

**Введение.** Динамика механических систем предполагает внимание к связям как ключевому фактору процесса взаимодействия между элементами одной или нескольких систем, что отражено в работах по теоретической [1] и аналитической механике [2], теории ме-

ханизмов и машин [3]. Теория вибрационного переноса [4] активно используется для изучения поведения систем при неудерживающих связях. Специальные исследования контактного взаимодействия, динамики контактного процесса с неудерживающими связями,

условий нарушения и существования контакта частично позволяют решить задачу обеспечения надежности работы различных машин [5 – 7, 9].

Несмотря на то, что многие вопросы взаимодействия материальной частицы и поверхности глубоко исследованы, в части вопросов не достигнута достаточная детализация, необходимая для моделирования процесса. В частности, недостаточно детально отражены вопросы максимальной высоты подлета в зависимости от параметров колебания поверхности, не раскрыты вопросы реализации режимов подбрасывания в одно касание с перелетом через один и более период колебания.

**I. Общие положения и постановка задачи исследования.** Рассмотрим поверхность  $H$  и материальную частицу массы  $m$ , которая лежит на данной поверхности. Предполагаем, что на частицу  $m$  действует сила тяжести  $Q$ . Для каждого значения амплитуды  $A$  и частоты  $\omega$  рассмотрим гармонический закон движения поверхности  $H(t) = A \sin(\omega t)$  в зависимости от времени  $t$ . Полагаем, что в некоторый начальный момент времени  $t_0$  точка  $m$  находится в контакте с поверхностью  $H$  и не удерживается на поверхности никакими силами, кроме силы тяжести. В момент контакта скорости частицы и поверхности совпадают. Очевидно, что при некоторых значениях амплитуды  $A$  и частоты  $\omega$  частица  $m$  может оторваться от поверхности и опять упасть на поверхность в определенный момент времени. Полагаем, что удар о поверхность является абсолютно неупругим. После падения частица либо сразу отрывается от поверхности, либо лежит на поверхности некоторое время. Далее происходят повторы подбрасывания и моментов контакта материальной частицы с поверхностью. Требуется сформулировать условия отрыва частицы от поверхности, определить основные характеристики отрыва, подлета и падения.

**II. Построение математической модели. Характеристики взаимодействия.** Цель настоящего исследования – изучение особенностей динамического взаимодействия между материальным объектом и вибрирующей поверхностью.

Для решения задач обозначим за  $X(t)$  траекторию движения частицы. Фиксируем определенные  $A$  и  $\omega$  – параметры движения поверхности колебания  $H(t) = A \sin(\omega t)$ . Будем считать, что в момент отрыва  $t_0$  частица находится в таком контакте с поверхностью, что значение точки траектории  $X(t_0)$  и ее производной  $\dot{X}(t_0)$  соответственно совпадают со значениями  $H(t_0)$

и  $\dot{H}(t_0)$ . В этом случае часть траектории движения материальной частицы, которая в момент  $t_0$  подброшена и некоторое время находится над поверхностью, удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) = -g, t \geq t_0 \\ \dot{X}(t_0) = \dot{H}(t_0) \\ X(t_0) = H(t_0). \end{cases} \quad (1)$$

В общем случае процесс движения частицы состоит из двух чередующихся этапов: этап движения частицы без контакта с поверхностью, который описывается системой дифференциальных уравнений (1), и этап движения частицы в контакте с поверхностью, который описывается гармонической функцией  $X(t) = A \sin(\omega t)$ .

Такая характерная траектория движения материальной частицы в процессе подбрасывания показана на рис. 1 точками, поверхность колебания представлена гармонической функцией с параметрами колебания  $A = 0,02$  м и угловой частотой  $\omega = 40$  рад/с.

К особенностям, которые ранее не были исследованы, следует отнести условия отрыва частицы от поверхности, расчет промежутков отрыва и контакта материальной частицы с поверхностью, формулы уровня и высоты подлета частицы, условия существования режимов «в одно касание», оценку отношения высоты подлета точки к амплитуде колебания поверхности.

На представленном рис. 2 в качестве примера изображены возможные траектории, которые имеют начальные условия, заданные в точках поверхности колебания  $H(t) = A \sin(\omega t)$  для последовательных моментов времени:  $t_0 = 0,005n$  с, где  $n = 1..10$ ,  $A = 0,02$  м,  $\omega = 40$  рад/с.

**Семейство возможных траекторий движения материальной частицы.** Для поиска точек отрыва будем в каждый момент времени  $t_0$  строить однозначно определенную возможную траекторию  $X_H$  и сравнивать ее с поверхностью движения  $H$  в окрестности точки  $t_0$ .

Пусть  $t_0$  – произвольный момент времени. Возможной траекторией  $X_H(t, t_0)$  движения точки будем считать такую траекторию движения материальной частицы, по которой бы полетела материальная частица при заданных начальных условиях (1), но при условии отсутствия поверхности с момента  $t_0$ .

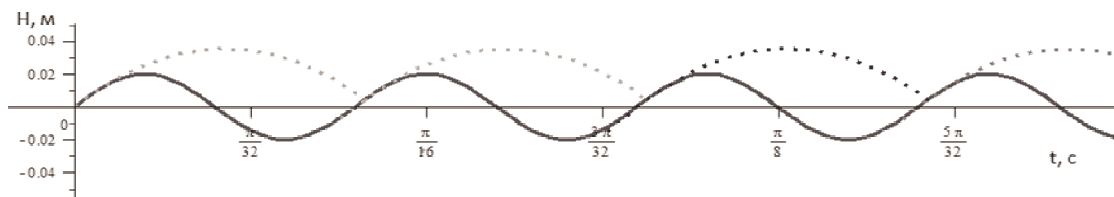


Рис. 1. Характерная траектория  $X$  подбрасывания материальной частицы.

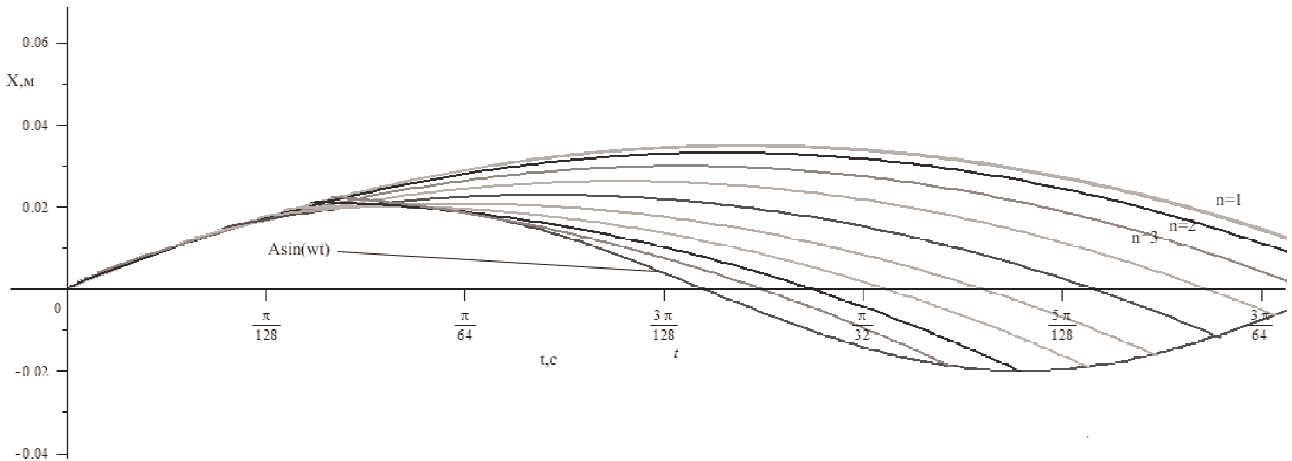


Рис. 2. Семейство возможных траекторий.

Для описания всего семейства возможных траекторий  $X_H(t, t_0)$  рассмотрим семейство систем (1), в которых начальный момент времени  $t_0$  выступает в качестве параметра, а начальные условия в момент времени  $t_0$  задаются гармоническим колебанием  $H(t) = A \sin(\omega t)$ .

Функцию  $H(t)$  от времени  $t$  будем называть поверхностью начальных условий. В этом частном случае система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X_H(t, t_0)}{\partial t^2} = -g, t \geq t_0 \\ \frac{\partial X_H(t, t_0)}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t_0) \\ X_H(t, t_0) = A \sin(\omega t_0) \end{cases} \quad (2)$$

Функция  $X_H(t, t_0)$  представляет собой семейство всех возможных траекторий, которые в момент времени  $t_0$  удовлетворяют системе (1):

$$X_H(t, t_0) = A \sin(\omega t_0) + A \omega(t - t_0) \cos(\omega t_0) - \frac{1}{2} g(t - t_0)^2. \quad (3)$$

Действительная траектория движения  $X(t)$  материальной частицы состоит из промежутков поверхности колебания, когда частица находится в контакте с поверхностью, и из кусков возможных траекторий (3), когда материальная частица отрывается от поверхности и некоторое время находится в свободном полете.

**Реакция опоры как функция времени и параметров поверхности колебания.** Рассмотрим промежуток времени, когда материальная частица находится в контакте с поверхностью, т. е. выполнено равенство:

$$H(t) = X(t).$$

Со стороны внешних сил на частицу  $m$  действует сила тяжести  $Q = -mg$ , со стороны поверхности на час-

тицу действует реакция опоры  $N$ . Согласно принципу Даламбера в каждой точке контакта частицы с поверхностью имеем равенство:

$$m\ddot{X} = N + Q.$$

Реакция опоры  $N$  как функция времени выражается через силу тяжести и имеет вид:

$$N(t) = m\ddot{X} - Q.$$

После подстановки:

$$X(t) = H(t)$$

функция реакции опоры принимает вид:

$$N(t) = m(-A\omega^2 \sin(\omega t) + g) = mg \left(1 - \frac{A\omega^2}{g} \sin(\omega t)\right).$$

В общем случае реакция опоры  $N$  представляет собой функцию нескольких переменных и может быть представлена в виде:

$$N(t) = mg(1 - k \sin(\omega t)),$$

где  $k = \frac{A\omega^2}{g}$  – коэффициент перегрузки, который означает, во сколько раз ускорение точки на поверхности превышает ускорение свободного падения  $g$ .

Для дальнейшего исследования будем использовать функцию

$$N_H(t) = m\ddot{H} - Q.$$

Данная функция совпадает с функцией реакции опоры, если точка движется в контакте с поверхностью.

На рис. 3 приведены графики данной функции для параметров  $A = 0,02$  м,  $\omega = 0,30$  рад/с. Кривая 1 соответствует нулевой частоте, функция принимает положительные значения. Кривая 2, которая соответствует частоте 22,36, только касается оси абсцисс в точке. Кривая 3, которая соответствует частоте 30, принимает и положительные, и отрицательные значения. В даль-

нейшем будет показано, что в областях, в которых функция  $N_H(t)$  принимает нулевые или отрицательные значения, возможен отрыв.

**Отрыв материальной частицы от поверхности.**

Ранее для исследования отрыва было введено в рассмотрение семейство возможных траекторий  $X_H(t, t_0)$ .

Для того, чтобы в фиксированной точке  $t_0$  происходил отрыв действительной траектории  $X(t)$ , необходимо, чтобы в бесконечно малой близости справа к исходной точке возможная траектория частицы  $X_H(t, t_0)$  находилась выше траектории движения поверхности  $H(t)$ . Дадим формальное определение момента отрыва.

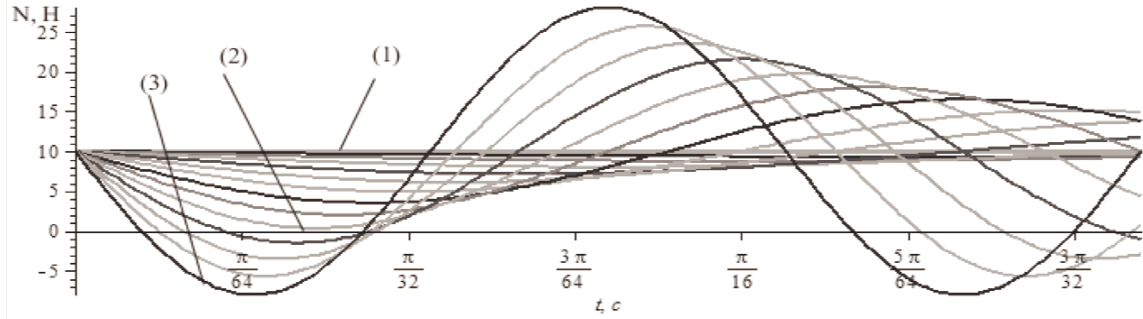


Рис. 3. Функция  $N_H(t)$ .

*Определение 1.* Если при фиксированных параметрах  $A, \omega$  для некоторого момента времени  $t_0$  существует значение  $\delta > 0$ , такое, что:

1.  $X(t_0) = A \sin(\omega t_0)$ ;
2.  $X(t) > A \sin(\omega t)$  для  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ,

то момент времени  $t_0$  назовем моментом времени отрыва.

Тот факт, что какой-либо момент времени является моментом отрыва, говорит о том, что в данный момент времени частица находилась на поверхности, но в следующем бесконечно малом промежутке времени частица находится выше точки поверхности.

При этом оторвавшаяся частица может некоторое время перед отрывом лежать на поверхности, а может и отсутствовать. Это означает, что предыстории отрывов различны. Дадим этим вариантам отрыва соответствующие определения.

*Определение 2.* Если при фиксированных параметрах  $A, \omega$  для некоторых значений  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  и момента времени  $t_0$  выполнены условия:

1.  $X(t_0) = A \sin(\omega t_0), t \in (t_0 - \varepsilon, t_0]$ ;
2.  $X(t) > A \sin(\omega t), t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ,

то момент времени  $t_0$  назовем моментом отрыва с предварительным пролеживанием.

*Определение 3.* Если при фиксированных параметрах  $A, \omega$  для некоторых значений  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  и момента времени  $t_0$  выполнены условия:

1.  $X(t_0) > A \sin(\omega t_0), t \in (t_0 - \varepsilon, t_0)$ ;
2.  $X(t_0) = A \sin(\omega t_0)$ ;
3.  $X(t) > A \sin(\omega t), t \in (t_0, t_0 + \delta)$ ,

то момент времени назовем моментом времени отрыва без пролеживания.

**Критерий отрыва материальной частицы от поверхности.** Величину  $R(t) = X(t) - H(t)$  назовем зазором между траекторией движения материальной частицы и поверхностью колебания. Если частица оторвалась от

поверхности, то зазор некоторой окрестности представляет собой положительное значение, и если частица находится в контакте с поверхностью, то зазор равен нулю. Для получения критерия отрыва введем в рассмотрение функцию возможного зазора. Каждой паре точек  $(t, t_0)$  поставим в соответствие разницу между значением возможной траектории с начальным моментом полета в точке  $t_0$  и точкой поверхности колебания  $H(t)$ :

$$R_H(t, t_0) = X_H(t, t_0) - H(t) = A \sin(\omega t_0) - A \sin(\omega t) + A\omega(t - t_0) \cos(\omega t_0) - \frac{1}{2} g(t - t_0)^2.$$

Если функция  $R_H(t, t_0)$  положительна в окрестности  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ , то момент времени  $t_0$  – момент отрыва. Для нахождения всех точек отрыва необходимо найти все точки  $t = t_0$ , которые лежат на границе области в пространстве  $R^2$ , в которой функция  $R_H(t, t_0)$  принимает положительные значения. Для определения знака функции вблизи точки  $(t_0, t_0)$  разложим функцию  $R_H(t, t_0)$  в ряд Тейлора как функцию одной переменной  $t$  в точке  $t_0$  с остаточным членом в форме Пеано с точностью до бесконечно малых 4-го порядка:

$$R_H(t, t_0) = \frac{1}{2} (A\omega^2 \sin(\omega t_0) - g)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} A\omega^3 \cos(\omega t_0)(t - t_0)^3 - \frac{1}{24} A\omega^4 \sin(\omega t_0)(t - t_0)^4 + o[(t - t_0)^4]$$

Используя соотношения

$$N_H(t) = m\ddot{H} - Q, \quad H(t) = A \sin(\omega t),$$

получаем следующее представление:

$$R_H(t, t_0) = -\frac{1}{2m} N_H(t_0)(t-t_0)^2 - \frac{1}{6m} \dot{N}_H(t_0)(t-t_0)^3 - \frac{1}{24m} \ddot{N}_H(t_0)(t-t_0)^4 + o[(t-t_0)^4]. \quad (4)$$

Точка  $t_0$  является моментом отрыва, если существует  $\delta > 0$  такое, что  $R_H(t, t_0) > 0$  для  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ . Знакоопределенность функции  $R_H(t, t_0)$  как функции от  $t$  в бесконечно малой окрестности точки  $t_0 (t > t_0)$  определяется знаком младшего ненулевого коэффициента при множителе  $(t-t_0)^n$  в разложении (4). Это легко установить. К примеру, если  $N_H(t_0) \neq 0$ , то, разделив разложение (4) на  $(t-t_0)^2$ , получим:

$$\frac{R_H(t, t_0)}{(t-t_0)^2} = -\frac{1}{2m} N_H(t_0) + o(1),$$

где  $o(1)$  означает функцию, которая стремится к нулю [8].

То есть при достаточной близости  $t$  к  $t_0$  справа знак функции будет равен знаку соответствующего коэффициента в разложении Тейлора. В данном случае знак функции  $R_H(t, t_0)$  будет равен знаку выражения  $-\frac{1}{2m} N_H(t_0)$ . Если в некоторый момент времени  $t_0$  частица находится на поверхности  $H(t)$  и значение

$$N_H(t_0) = m(-A\omega^2 \sin(\omega t_0) + g) < 0,$$

то данный момент времени  $t_0$  является моментом отрыва, так как существует  $\delta$ , что:

$$R_H(t, t_0) > 0, t \in (t_0, t_0 + \delta).$$

Если же в момент времени  $t_0$  значение функции равно нулю:

$$N_H(t_0) = m(-A\omega^2 \sin(\omega t_0) + g) = 0,$$

то отрыв произойдет при условии:

$$A\omega^2 \cos(\omega t_0) = -\frac{\dot{N}_H(t_0)}{m} > 0.$$

После упрощения выражения получаем:

$$\cos(\omega t_0) > 0,$$

то есть,

$$\omega t_0 \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi].$$

При этих условиях ненулевой коэффициент при младшей степени в разложении (4):

$$R_H(t, t_0) = -\frac{1}{6m} \dot{N}_H(t_0)(t-t_0)^3 + o[(t-t_0)^3]$$

положителен и равен:

$$-\frac{1}{6m} \dot{N}_H(t_0) = \frac{1}{6} A\omega^2 \cos(\omega t_0).$$

В результате исследование точки на отрыв сводится к определению знаков производных функции  $N_H$  в точке контакта:

$$\{N_H(t_0), \dot{N}_H(t_0)\}.$$

На основе полученных утверждений сформулируем варианты достаточных условий отрыва в точке  $t_0$ . Пусть для некоторых частоты  $\omega$  и амплитуды  $A$  в момент времени  $t_0$  выполнены следующие условия:

а.  $X(t_0) = A \sin(\omega t_0);$

б.  $A \sin(\omega t_0) = \frac{g}{A\omega^2};$

в.  $\omega t_0 \in [0, \frac{\pi}{2}),$

тогда в момент времени  $t_0$  происходит отрыв.

Сформулируем достаточные условия отсутствия отрыва в точке.

Пусть в момент времени  $t_0$  частица находится на поверхности, и выполнено одно из условий:

1)  $N_H(t_0) > 0,$

2)  $N_H(t_0) = 0, \dot{N}_H(t_0) > 0,$

то отрыва не происходит.

На основе приведенных условий можно отметить следующие особенности поведения материальной частицы.

1. Для режима, при котором  $\frac{A\omega^2}{g} = 1$  отрыва в точке

с фазой  $\frac{\pi}{2}$  не происходит.

2. В точке с положительной реакцией опоры отрыва не происходит.

3. Если в точке контакта функция  $N_H(t_0)$  отрицательна, то в точке происходит отрыв.

Проведенный выше анализ отрыва частицы позволяет сформулировать условия отрыва в зависимости от значения функции  $N_H(t_0)$ , то есть сформулировать необходимые и достаточные условия реализации отрыва для конкретной точки в общем виде, распространив случай гармонического колебания поверхности на случай колебания любой бесконечно дифференцируемой поверхности  $H(t)$ . С учетом вышеприведенных определений верна следующая теорема.

*Теорема.* Точка  $t_0$  – момент времени отрыва тогда и только тогда, когда в последовательности значений производных:

$$\left\{ d_i = \frac{\partial^i N_H(t)}{\partial t_i} \Big|_{t=t_0}, i = 0.. \infty \right\},$$

первое ненулевое значение  $d_i$  отрицательно.



*Доказательство.* Данное утверждение следует из представления функции  $R_H(t, t_0)$  в виде следующего ряда:

$$R_H(t, t_0) = X_H(t, t_0) - H(t) = -\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+2)!} \frac{\partial^i N_H(t)}{\partial t_i} (t-t_0)^{(i+2)}. \quad (5)$$

Для доказательства рассмотрим разложение функции  $R_H(t, t_0)$  в ряд Тейлора по переменной  $t$  в точке  $t = t_0$ :

$$R_H(t, t_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i R_H(t_0, t_0)}{\partial t^i} (t-t_0)^i.$$

Возможная траектория полета, которая определена поверхностью колебания  $H(t)$ , удовлетворяет системе:

$$\begin{cases} m \frac{\partial^2 X_H(t, t_0)}{\partial t^2} = Q, t \geq t_0 \\ \left. \frac{\partial X_H(t, t_0)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \dot{H}(t_0) \\ X_H(t, t_0)|_{t=t_0} = H(t_0) \end{cases}.$$

Откуда следует, что

$$R_H(t_0, t_0) = X_H(t_0, t_0) - H(t_0) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial R_H(t, t_0)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\partial X_H(t, t_0)}{\partial t} \right|_{t=t_0} - \left. \frac{\partial H(t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} = 0.$$

Функция  $N_H(t)$  удовлетворяет условию:

$$N_H(t) + Q = m\ddot{H}(t).$$

Из представленных системы и выражения получаем:

$$\ddot{H}(t) = \frac{N_H(t) + Q}{m}, \frac{\partial^2 X_H(t, t_0)}{\partial t^2} = \frac{Q}{m}.$$

В итоге получаем:

$$\left. \frac{\partial^2 R_H(t, t_0)}{\partial t^2} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\partial^2 X_H(t, t_0)}{\partial t^2} \right|_{t=t_0} - \ddot{H}(t_0) = \frac{N_H(t_0)}{m}.$$

Далее продифференцируем правую и левую части выражения

$$N_H(t) + Q = m\ddot{H}(t)$$

$n$  раз и, учитывая, что  $Q$  – константа, получим:

$$\frac{\partial^{n+2} H(t)}{\partial t^{n+2}} = \frac{1}{m} \frac{\partial^n N_H(t)}{\partial t^n}, n > 0.$$

В итоге получаем требуемое разложение.

Из однозначности разложения функции в ряд Тейлора следует исходное утверждение. Если первый ненулевой элемент в разложении (5) отрицательный, то это означает, что в бесконечной близости к точке  $t_0$  функция  $R_H(t, t_0)$  положительна, то есть происходит отрыв.

Предположим теперь, что в точке  $t_0$  происходит отрыв, то есть  $R_H(t, t_0) > 0$  для  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ . Необходимо показать, что первый ненулевой коэффициент  $d_i$  положителен. Предположим противное, что  $d_i$  отрицательное. Но тогда будем иметь  $R_H(t, t_0) < 0$  для  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ , что противоречит условию существования отрыва. Теорема доказана.

Предложенная теорема представляет собой дифференциальный критерий отрыва, который для любой точки поверхности позволяет ответить на вопрос о дальнейшем поведении частицы в малой окрестности выбранного момента времени. В частности, приведенный критерий показывает, что отрыва не произойдет, если функция  $N_H(t)$  равна нулю во всех точках поверхности.

Полученные необходимые и достаточные условия позволяют определить все возможные точки отрыва для известной поверхности колебания.

Для классификации различных типов отрыва введем следующее определение.

*Определение 4.* Назовем точку  $t_0$  отрывом  $k$ -ого порядка, если в последовательности коэффициентов разложения в ряд Тейлора функции зазора  $R_H(t, t_0)$  первые  $k-1$  коэффициентов равны нулю, а  $k$ -ый коэффициент положителен.

Заметим, что отрывом первого порядка является такой отрыв материальной частицы, при котором координаты траектории частицы и поверхности в момент отрыва совпадают, а производные различны.

Отрыв второго порядка предполагает равенство значений и производных соответствующих траектории и поверхности колебания. Другими словами, отрыв второго порядка определяется условиями:

$$N_H(t) = mg(1 - \frac{A\omega^2}{g} \sin(\omega t)) < 0. \quad (6)$$

Отрыв третьего порядка определяется условиями:

$$\begin{cases} N_H(t) = mg(1 - \frac{A\omega^2}{g} \sin(\omega t)) = 0 \\ -\frac{\partial N_H(t)}{\partial t} = \frac{A\omega^3}{g} \cos(\omega t) > 0 \end{cases} \quad (7)$$

Отрыв четвертого порядка определяется условиями:

$$\begin{cases} mg(1 - \frac{A\omega^2}{g}\sin(\omega t)) = 0 \\ \frac{A\omega^3}{g}\cos(\omega t) = 0 \\ \frac{A\omega^4}{g}\sin(\omega t) < 0 \end{cases}$$

Однако данная система не совместна, поэтому точек отрыва четвертого порядка не существует. Очевидно, что не существует отрыва и более высоких порядков. Это означает, что все отрывы, которые возможны для данной системы, определяются условиями (6) и (7).

Для иллюстрации рассмотрим рис. 4, на котором изображены функции  $N_H(t)$  – график 1 и  $\dot{N}_H(t)$  – график 2. Параметры имеют следующие значения:  $A = 0,02$  м,  $\omega = 40$  рад/с,  $m = 1$  кг.

Точка (а) на рисунке является точкой отрыва третьего порядка, в этой точке реакции опоры равны нулю. В точке (b) реакция опоры тоже равна нулю, но отрыва не происходит, так как для отрыва график 2 должен быть ниже нуля. Все точки отрыва второго порядка сосредоточены в промежутке (а, b).

На рис. 5 представлена часть траектории при отрыве из точки третьего порядка. Отрыв происходит в точке (1). Момент времени отрыва (2) равен 0,02 с. Начиная с момента (2), материальная частица  $X(t)$  некоторое время летит выше поверхности колебания  $A\sin(\omega t)$ . Параметры имеют следующие значения:  $A = 0,02$  м,  $\omega = 30$  рад/с.

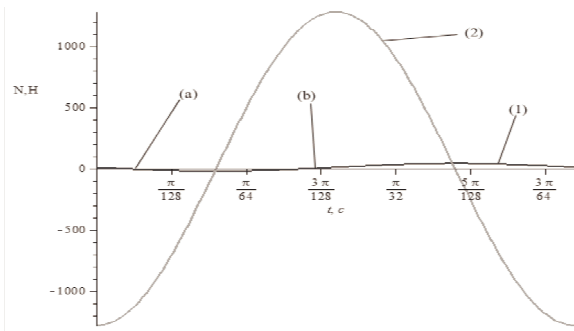


Рис. 4. Точки отрыва второго и третьего порядка.

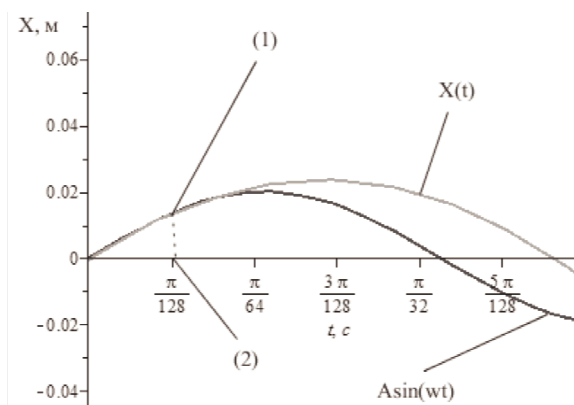


Рис. 5. Отрыв траектории из точки третьего порядка.

**III. Основные показатели отрыва.** После отрыва частица поднимается над поверхностью колебания и находится некоторое время в свободном полете. В зависимости от начальных данных частица может быть подброшена на различную высоту и пробыть без контакта с поверхностью определенное время, за это время поверхность может совершить различное количество колебаний. Рассмотрим данные характеристики в зависимости от параметров колебания поверхности.

**Длительность полета.** Предположим, что движение точки характеризуется системой (3), и при этом в точке  $t_0$  происходит отрыв третьего порядка. В этом случае траектория движения  $X$  материальной частицы на промежутке  $[t_0, t_1]$  задается выражением:

$$S(t) = A\sin(\omega t_0) + A\omega\cos(\omega t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2. \quad (8)$$

При этом выполнены условия:

$$\begin{aligned} \sin(\omega t_0) &= \frac{g}{A\omega^2}, \cos(\omega t_0) > 0; \\ S(t) &> A\sin(\omega t), t_0 < t < t_1; \\ S(t_1) &= A\sin(\omega t_1), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $t_0$  – момент отрыва,  $t_1$  – момент падения на поверхность,  $\omega, A$  – частота и амплитуда колебания основания.

То есть после отрыва частица летит по параболе, достигает определенного максимального значения и падает на поверхность. Для определения момента времени приземления  $t_1$  материальной частицы на поверхность при условии (9) ее отрыва в момент времени  $t_0$  необходимо решить следующее уравнение:

$$A\sin(\omega t_0) + A\omega\cos(\omega t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 = A\sin(\omega t). \quad (10)$$

Решение уравнения (10) может быть приближенно оценено моментом пересечения рассматриваемой параболы с уровнями  $-A, 0, A$ . Можно показать, что точный момент падения  $t$  материальной частицы на поверхность находится в промежутке:

$$t \in [t_2^{\min}, t_2^{\max}],$$

где границы интервала соответственно равны:

$$\begin{aligned} t_2^{\min} &= t_0 + \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{A\omega^2}{g}\right)^2 - 1} - \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{A\omega^2}{g}\right)^2 - 2\frac{A\omega^2}{g} + 1}, \\ t_2^{\max} &= t_0 + \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{A\omega^2}{g}\right)^2 - 1} + \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{A\omega^2}{g}\right)^2 + 2\frac{A\omega^2}{g} + 1}. \end{aligned}$$

На рис. 6 представлена траектория движения  $X$  материальной частицы, которая отрывается от поверхно-

сти колебания 2 с параметрами  $A = 0,02$  м,  $\omega = 60$  рад/с. Соответствующие границы временного интервала  $t_2^{\min}, t_2^{\max}$  представлены точками 5 и 6. Эти точки являются горизонтальными координатами точек пересечения 7 и 8 траектории движения материальной частицы 1 с уровнями 3 и 4.

Для определения точного момента  $t$  падения частицы на поверхность необходимо найти корень уравнения:

$$S(t) = A \sin(\omega t_0) + A \omega \cos(\omega t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 = A \sin(\omega t),$$

$$\sin(\omega t_0) = \frac{g}{A \omega^2}, t \in [t_2^{\min}, t_2^{\max}].$$

Данному промежутку времени соответствует промежуток фаз:

$$[\phi_{\min}, \phi_{\max}] = [\omega t_2^{\min}, \omega t_2^{\max}].$$

Можно показать, что  $\phi_{\max} - \phi_{\min} = 2$ .

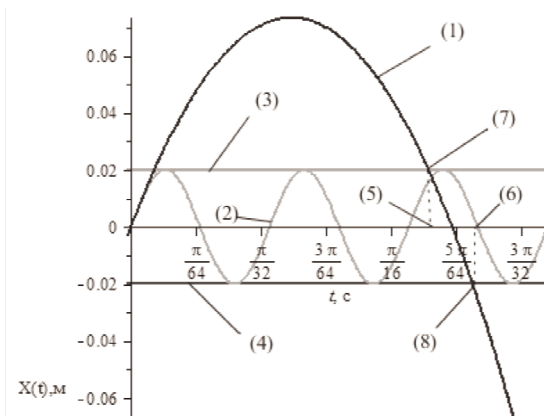


Рис. 6. Момент пересечения траекторией различных уровней колебания поверхности.

Длительность  $T$  полета материальной частицы может быть оценена интервалом:

$$T \in [T_1, T_2],$$

где

$$T_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{A \omega^2}{g}\right)^2 - 1} + \frac{A \omega}{g} - \frac{1}{\omega};$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{A \omega^2}{g}\right)^2 - 1} + \frac{A \omega}{g} + \frac{1}{\omega}.$$

Как видно из формулы, точность данной оценки существенно зависит от частоты. При малых частотах оценка не имеет смысла, но с ростом частоты может быть использована как асимптотическая оценка времени полета.

**Фаза отрыва.** Выше было показано, что существует только два типа отрыва материальной частицы от поверхности: отрывы третьего и второго порядка.

Фаза  $\phi = \omega t$  отрыва точки от поверхности в точке отрыва третьего порядка определяется из условий:

$$A \omega^2 \sin(\omega t) = A \omega^2 \sin(\phi) = g, \cos(\phi) > 0.$$

Необходимо отметить, что данное уравнение на  $\phi$  разрешимо только при условии:

$$\frac{g}{A \omega^2} \leq 1.$$

Существует два решения данного уравнения:

$$\begin{cases} \phi_0 = \arcsin\left(\frac{g}{A \omega^2}\right) \\ \phi_1 = \pi - \arcsin\left(\frac{g}{A \omega^2}\right) \end{cases}.$$

из чего получаем:

$$\phi_0 \in [0, \frac{\pi}{2}], \phi_1 \in [\frac{\pi}{2}, \pi].$$

Но отрыв третьего порядка возможен только при условии:

$$\cos(\omega t_0) > 0.$$

Фаза отрыва третьего порядка принадлежит только промежутку  $(0, \frac{\pi}{2})$  и определяется выражением:

$$\phi_0 = \arcsin\left(\frac{g}{A \omega^2}\right), \frac{g}{A \omega^2} < 1.$$

Фаза отрыва второго порядка определяется из условий:

$$N_H(t_0) = m(-A \omega^2 \sin(\omega t_0) + g) < 0.$$

Для фиксированных амплитуды и частоты множество искомого фаз принадлежит промежутку:

$$\phi = \omega t \in (\arcsin\left(\frac{g}{A \omega^2}\right), \pi - \arcsin\left(\frac{g}{A \omega^2}\right)).$$

Параметризуем все точки данного промежутка. Пусть параметр  $\tau \in (-1, 1)$ , тогда множество всех фаз, таких, что

$$\phi_\tau = \frac{\pi}{2} + \tau \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{g}{A \omega^2}\right)\right),$$

пробегают множество всех фаз отрыва второго порядка. Точка отрыва третьего порядка является граничной точкой области точек отрыва второго порядка.

Заметим, что разница между граничными точками области точек отрыва второго порядка составляет:

$$\Delta \phi = \pi - 2 \arcsin\left(\frac{g}{A \omega^2}\right).$$



Данная величина характеризует размер области точек отрыва второго порядка и имеет следующие свойства.

$$1. \frac{g}{A\omega^2} \rightarrow 1 \Rightarrow \Delta\phi \rightarrow 0;$$

$$2. \frac{g}{A\omega^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta\phi \rightarrow \pi.$$

Это означает, что если  $A\omega^2 = g$ , то на поверхности нет точек отрыва второго порядка. При неограниченном росте коэффициента  $\frac{A\omega^2}{g}$  область точек отрыва второго порядка стремится к промежутку  $[0, \pi]$ , что составляет половину периода. Каждой величине  $\frac{A\omega^2}{g} \geq 1$  можно поставить в соответствие характеристику множества точек отрыва второго порядка:

$$\theta = \frac{\pi - 2 \arcsin(\frac{g}{A\omega^2})}{2\pi}.$$

Данный коэффициент обозначает, какая доля частиц, равномерно распределенных на каждой фазе колебания, оторвется от поверхности. Если коэффициент перегрузки  $\frac{A\omega^2}{g} < 1$ , то отрыва не происходит ни в одной точке, и полагаем, что  $\theta = 0$ .

**Момент времени отрыва.** Через фазу отрыва точки третьего порядка от поверхности момент времени отрыва определяется по формуле:

$$t_0 = \frac{\arcsin(\frac{g}{A\omega^2})}{\omega} + \frac{2\pi k}{\omega}, k \in N.$$

Моменты времени отрыва от поверхности в точке второго порядка представляют собой открытые промежутки. Для любого параметра  $\tau \in (-1, 1)$  момент времени составляет величину:

$$t = \frac{\pi}{2\omega} + \tau \left( \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\arcsin(\frac{g}{A\omega^2})}{\omega} \right) + \frac{2\pi k}{\omega}.$$

**Уровень отрыва.** Уровень отрыва материальной частицы – это высота поверхности относительно уровня нулевой фазы в момент, когда происходит отрыв частицы. Уровень отрыва материальной частицы при отрыве третьего порядка определяется величиной  $X(t)$  в момент  $t = t_0$ . Из выражения (8) следует, что

$$S_0 = S(t_0) = \frac{g}{\omega^2}.$$

Для семейства точек отрыва второго порядка отрыв происходит немедленно в той же точке. В результате для любой точки:

$$t_\tau = \frac{\pi}{2\omega} + \tau \left( \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\arcsin(\frac{g}{A\omega^2})}{\omega} \right)$$

уровень отрыва составляет:

$$A \sin(\omega t_\tau) = A \cos\left(-\tau \frac{\pi}{2} + \tau \arcsin\left(\frac{g}{A\omega^2}\right)\right).$$

**Высота подлета.** Высота подлета материальной частицы определяется максимальной точкой параболической траектории, имеющей свое начало в точке отрыва. Рассмотрим характерную траекторию полета:

$$S(t) = A \sin(\omega t_0) + A\omega \cos(\omega t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2.$$

В точке максимума  $t_*$  производная траектории равна нулю:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{t=t_*} = A\omega \cos(\omega t_0) - g(t_* - t_0) = 0.$$

Из чего следует, что данная траектория достигает максимума в момент времени:

$$t_* = t_0 + \frac{A\omega \cos(t_0)}{g}.$$

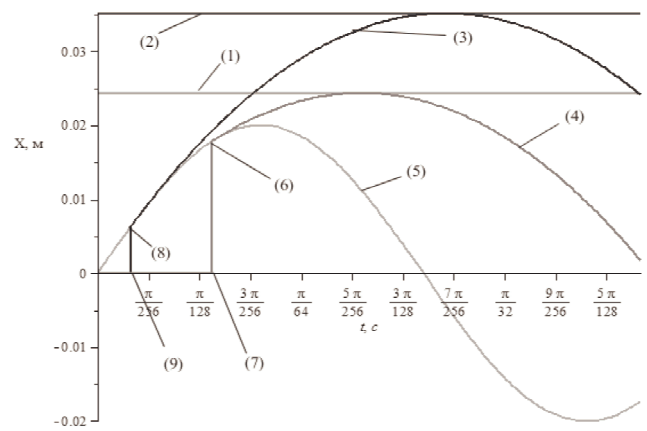
Высота подлета в данной точке составляет:

$$S_{\max} = A \sin(\omega t_0) + \frac{(A\omega \cos(\omega t_0))^2}{2g}.$$

Если отрыв происходит в точке отрыва третьего порядка, то максимальная высота равна:

$$S_{\max} = \frac{g}{2\omega^2} + \frac{A^2 \omega^2}{2g}.$$

На рис. 7 представлена поверхность колебания 5 для параметров  $A = 0,02$  м,  $\omega = 40$  рад/с.



**Рис. 7.** Траектории полета из точек отрыва второго и третьего порядка.

В момент времени 9 в точке 8 происходит отрыв третьего порядка. Траектория движения материальной

частицы после отрыва достигает максимального значения на уровне 2. Материальная частица, которая находится на поверхности в момент 7, отрывается немедленно и двигается по траектории 4, достигая максимума на уровне 1.

Если отрыв происходит в области точек отрыва второго порядка, то множество максимальных значений будет определяться параметрическим семейством максимумов параболических траекторий. Высота подлета будет равна:

$$\begin{aligned} S_{\max}(t_{\tau}) &= A \sin(\omega t_{\tau}) + \frac{(A\omega \cos(\omega t_{\tau}))^2}{2g} = \\ &= A \cos\left(\frac{\tau}{2}\left(\pi - 2 \arcsin\left(\frac{g}{A\omega^2}\right)\right)\right) + \\ &+ \frac{A^2 \omega^2}{2g} \left(\sin\left(\frac{\tau}{2}\left(\pi - 2 \arcsin\left(\frac{g}{A\omega^2}\right)\right)\right)\right)^2. \end{aligned}$$

На диапазоне параметров  $\tau \in [0, 1)$  максимум достигается в точке отрыва и составляет:

$$S_{\max}(t_{\tau}) = A \sin(\omega t_{\tau}).$$

Можно показать, что высота подлета траектории из точки отрыва третьего порядка выше всех траекторий подлета из точек второго порядка. Также можно показать, что средняя высота подлета всех частиц из области отрыва второго порядка при росте амплитуды и частоты в четыре раза меньше высоты подлета частицы из области третьего порядка.

**Функция зазора.** Под функцией зазора будем понимать разницу между траекторией движения материальной частицы и поверхностью колебания:

$$R(t) = X(t) - A \sin(\omega t).$$

Значение функции зазора можно оценить следующим образом:

$$X(t) - A \leq R(t) \leq X(t) + A.$$

Основной интерес представляют экстремальные значения функции зазора. Точки  $t_R$  локальных максимумов и минимумов функции зазора находятся из условий:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial t} \right|_{t=t_R} = \left. \frac{\partial X}{\partial t} \right|_{t=t_R} - A\omega \cos(\omega t_R) = 0.$$

Итоговое уравнение на данные точки будет иметь вид:

$$A\omega \cos(\omega t_0) - g(t_R - t_0) + A\omega \cos(\omega t_0) = 0.$$

**Динамический показатель подбрасывания.** Как было показано ранее, высота подлета материальной частицы зависит от параметров колебания поверхности амплитуды  $A$  и частоты  $\omega$ . В качестве динамического коэффициента подбрасывания рассмотрим величину  $D$ ,

которая показывает, во сколько раз высота подлета превышает величину колебания поверхности  $A$ :

$$D = \frac{S_{\max}}{A} = \sin(\omega t_0) + \frac{A}{2g} (\omega \cos(\omega t_0))^2.$$

Из представленного выражения видно, что в общем случае с ростом амплитуды и частоты величина подлета неограниченно превышает амплитуду колебания поверхности.

Для точек отрыва третьего порядка выполняется соотношение:

$$A\omega^2 \sin(\omega t_0) = g.$$

Данное соотношение позволяет представить динамический показатель подбрасывания в виде:

$$D = \frac{g}{2A\omega^2} + \frac{A\omega^2}{2g}.$$

Значение динамического показателя для точек отрыва третьего порядка варьируется от 1 до бесконечности. Это означает, что при фиксированной амплитуде колебания, увеличивая частоту колебания поверхности, материальную частицу можно подбросить на сколь угодно большую высоту, столкнувшись лишь с конструктивными ограничениями.

**Заключение.** На основе представленного решения задач о подбрасывании сделаем следующие выводы.

1. Исследование отрыва материальной частицы сводится к исследованию знаков семейства функций, которые определяются поверхностью колебания.

2. Полученный дифференциальный критерий отрыва определяет необходимые и достаточные условия отрыва материальной частицы от поверхности колебания, которая представлена бесконечно дифференцируемой функцией.

3. Полученный дифференциальный критерий отрыва материальной частицы от поверхности позволяет классифицировать множество всех возможных точек отрыва для рассматриваемого семейства колеблющихся поверхностей.

4. Проведенный анализ показывает, что отрыв с предварительным пролеживанием возможен только из точек отрыва третьего порядка, то есть из точек с реакцией опоры, равной нулю.

5. Динамический коэффициент подбрасывания для точек отрыва третьего порядка неограниченно возрастает по мере роста величины  $\frac{A\omega^2}{g}$ .

#### Литература

1. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики: в 2 т. Т. 2. Динамика. М.: Наука. 1968. 638 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Наука. 1986. 516 с.
3. Артоболовский И.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука. 1978. 640 с.
4. Блехман И.И., Джаналидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М.: Наука. 1968. 316 с.

5. Сельвинский В.В. Динамика контактного взаимодействия твердых тел: моногр. Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2009. 164 с.
6. Елисеев С.В., Марков К.К. Некоторые вопросы динамики колебательного процесса при неустойчивых связях // Механика и процессы управления: сб.ст. Иркутск, 1971. С. 71-83.
7. Елисеев С.В., Лоткин О.И. Условия существования и нарушения контакта для систем с неустойчивыми связями // Труды ОМИИТа. 1966. Вып. 69. С. 93-99.
8. Ситов И.С., Белокобыльский С.В. Математическая модель вибрационного поля двумерного объекта в системе обобщенных координат ( смещение - угол поворота и соответствующих координатам в обобщенных силах // Математика, ее приложение и математическое образование: материалы III Всероссийской конференции с международным участием. Улан-Уде: изд-во ВСГТУ. 2008. С. 282-288.
9. Белокобыльский С.В., Елисеев С.В., Кашуба В.Б. Математическое моделирование в механических колебательных системах. Мехатронные подходы // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2011. № 3. С. 70-79.

2. Lurie A.I. Analytical mechanics / A.I. Lurie. - M.: Science. 1986. - 516p.
3. Artobolevsky I.I. Theory of mechanisms and machines / I.I. Artobolevsky. - M.: Science. 1978.-640 p.
4. Blehman I.I., Dzanalidze G.Y. The vibrational movement. - M.: Science. 1968. -316p.
5. Selvinsky V.V. The dynamics of the cycle of interaction of solids.- Blagoveshchensk: Amur of the state University. 2009.-164 p.
6. Eliseev S.V., Markov C.C. Some questions of the dynamics of the oscillation process with no restraint links // Mechanics and control processes. - Irkutsk: the IIP. 1971.- With. 71-83.
7. Eliseev S.V., Lotkin O.I. Conditions of existence and violations of contact for systems with non-retaining links // Proceedings of the OMIIT. - Vol. 69. - Omsk. - OMIIT. 1966. With. 93-99.
8. Ситов И.С., Белокобыльский С.В. Математическая модель вибрационного поля двумерного объекта в системе обобщенных координат ( смещение - угол поворота и соответствующих координатам в обобщенных силах // Математика, ее приложение и математическое образование: материалы III Всероссийской конференции с международным участием. Улан-Уде: изд-во ВСГТУ. 2008. С. 282-288.
9. Belokobilskiy S.V., Eliseev S.V., Kashuba V.B. Mathematical fashion-model in mechanical oscillatory systems. Mechatronic approaches. Pro-problems of mechanical engineering and automation: an international journal. №3. 2011.-Moscow, Institute of mechanical engineering of them. P. 70-79.

### References

1. Loyciansky L.G. Course of theoretical mechanics: in 2 vol. T 2 Speaker / L.G. Loyciansky, A.I. Lurie. - M.: Science. 1968.-638 p.

УДК 621.01.(07)

## Трендовое прогнозирование и контроль систем качества

П.А. Лонщик<sup>1</sup>, С.В. Елисеев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия. E-mail:

Статья поступила 13.09.2012, принята 16.11.2012

*Рассмотрены общие вопросы научного сопровождения внедрения систем менеджмента качества и использования для управления методов прогнозирования с помощью трендов. Предложены алгоритмическая основа трендового прогнозирования и минимальная конфигурация математического аппарата. В частности, рассмотрены базовые принципы управления качеством, опирающиеся на принятии решений на основе фактов. Наиболее полно данный принцип реализуется методом моделирования процессов, как производственных, так и управленческих, инструментами математической статистики. Однако современные статистические методы довольно сложны для восприятия и широкого практического использования без углубленной математической подготовки всех участников процесса. Рассмотрены статистические методы прогнозирования, в том числе методы, основанные на анализе трендов. Прогнозирование с помощью трендов – один из методов статистического прогнозирования. Для получения адекватного прогноза необходимо выполнение следующих условий: временной интервал, для которого построен тренд, достаточен для определения тенденций; анализируемый процесс устойчив и обладает инерционностью; не ожидается сильных внешних воздействий на изучаемый процесс. Трендовое прогнозирование и контроль систем качества производственных процессов позволяют создать методологическую основу научного сопровождения и обеспечения в реализации системы мероприятий, которые выводят систему на уровень соответствия требуемым нормативам. Использование метода трендов связано с предварительным изучением особенностей технологического процесса, анализом и выявлением возможных условий появления отклонений с последующим сбором и обработкой информации.*

**Ключевые слова:** система менеджмента качества, управление качеством, трендовое прогнозирование.

## Trend prognosis and control of system of quality

P.A. Lonzich<sup>1</sup>, S.V. Eliseev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Research Irkutsk State Technical University, 83 Lermontova str., Irkutsk, Russia. . E-mail:  
The article received 13.09.2012, accepted 16.11.2012