

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОВЕДЕНИЯ

УДК 62.752

Рычажные связи в механических цепях. Динамические аспекты

С.В. Белокобыльский¹, С.В. Елисеев², В.Б. Кашуба¹, И.С. Ситов¹

¹Братский государственный университет, ул. Макаренко 40, Братск, Россия. E-mail: plemja@rambler.ru²Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского 15, Иркутск, Россия
Статья поступила 02.02.2012, принята 10.09.2012

Рычажный механизм в теории механических цепей используется как форма соединения типовых элементов, однако, рычаг не входит в набор типовых звеньев, что связано с его определенными особенностями. Однако, рычажные связи приводят к изменениям топологической цельности механической цепи, также как это происходит по аналогии в теории электрических цепей при введении в цепь трансформатора. Если передаточное отношение рычага не равно единице, механическая цепь приобретает особый вид - метрику, что связано с появлением параллельных сил, действующих на рычаг или промежуточное твердое тело, которое может иметь различные формы размещения точки опоры. Рассматриваются особенности рычажных взаимодействий между элементами механических цепей. Предлагается метод построения математических моделей при выборе точки опоры рычажного механизма на разных элементах цепи. Показаны возможности учета инерционных свойств рычага. Предлагаемый метод расширяет возможности применения и использования аппарата теории механических цепей. Рассмотрены особенности соединения двух элементов с введением весоного рычага с плавающей опорой, задачей которого является расширение диапазона динамических свойств. При этом установлено, что параметры рычага имеют существенные значения, поскольку динамическая жесткость взаимодействия дает большой вариант изменений на разных частотах.

Ключевые слова: рычажные связи в колебательных системах, механические цепи, эквивалентные преобразования механических цепей.

Lever-type linkages in mechanical circuits. Dynamical aspects.

S.V. Belokobyly'sky¹, S. V. Eliseev², V.B. Kashuba¹, I. S. Sitov¹¹Bratsk State University, 40 Makarenko str., Bratsk, Russia. E-mail: plemja@rambler.ru²Irkutsk State University of Railway Transport, 15 Chernyshevskogo str., Irkutsk, Russia
The article received 02.02.2012, accepted 10.09.2012

In the theory of mechanical circuits, a lever-type linkage is used as a form for assembling a standard elements junction. The lever, however, is not included into the standard links set due to its specific features. However, the lever-type linkages result in changes of mechanical circuit topological integrity that is similar to the introduction of a transformer into the circuit in the circuit theory. If the contact ratio is not equal to unity, the mechanical circuit transforms into a special type one - a metric. It is connected with the onset of parallel forces acting on the lever or an intermediate solid body which may have different forms of a supporting point arrangement. Some peculiar features of the interaction between the mechanical systems elements are considered. The method for mathematical modeling while selecting the leverage supporting point for the circuit various elements is proposed. The resources to take into consideration the inertial properties of the lever have been demonstrated. The proposed method broadens the potential for applying and utilizing the mechanical circuit theory apparatus. The characteristics of two elements joining when introducing a powerful lever with floating support which is to expand the dynamic properties range have been considered. It has been established that the lever parameters are of essential value since the interaction dynamic stiffness assumes great option changes at different frequencies.

Keywords: lever-type linkages in oscillation systems, mechanical circuits, equivalence conversions of mechanical circuits.

I. Введение. В теории механических цепей рычажный механизм (или рычаг) используется как форма соединения типовых элементов [1, 2], однако рычаг не входит в набор типовых звеньев, что связано с его определенными особенностями. В работах [3, 4] отмечено, что рычажные связи приводят к изменениям топологической цельности механической цепи аналогично тому, как это происходит в теории электрических цепей [6] при введении трансформатора. В общем случае, если передаточное отношение рычага не равно единице, то механическая цепь приобретает особый вид (или «метрику»), что связано с появлением параллельных сил, действующих на рычаг или

промежуточное твердое тело, которое может иметь различные формы размещения точки опоры. В предлагаемой статье рассматриваются особенности взаимодействия рычажного механизма с элементами механической цепи и особенности отражения динамических связей в принципиальной схеме механической цепи.

II. Общие положения. Постановка задачи исследования. Рассмотрим расчетную схему технологической машины в виде цепной механической системы с двумя степенями свободы, как показано на рис. 1 ($a - e$), где приняты следующие обозначения: m_1 и m_2 – масса элементов цепной системы; $k_1 - k_4$ – жесткости упру-

гих элементов; z_1 и z_2 – кинематические внешние воздействия; точка (1) – точка соединения элементов k_2 и k_3 ; точки (1') и (1'') – концы рычага с длинами l_1 и l_2 ; точка (1) – на рис. 1 а является точкой соединения двух элементов k_2 и k_3 ; на рис. 1 б – д – опора рычага; на рис. 1 е – центр масс системы.

Вводимый рычаг на рис. 1 б – д является невесомым; на рис. 1 е – рычаг обладает массой m и моментом инерции J . Для описания состояния системы используются координаты $y_1 - y_4$ в неподвижной системе отсчета; y и φ (на рис. 1 е) – координаты рычага как твердого тела.

Задача заключается в оценке возможных форм соединения элементов с параметрами k_2 и k_3 (рис. 1 а),

если точка соединения (1) может быть разнесена с помощью рычага (l_1 и l_2) по точкам (1') и (1''). Первый вариант связан с рассмотрением точки опоры точка (1)) рычага, связанной с неподвижной стойкой, как это показано на рис. 1 б, в. Для упрощения последующих расчетов будем полагать, что рычаг обладает моментом инерции J и имеет возможность поворачиваться на угол φ . В дальнейшем после вывода уравнений будет принято, что $J = 0$. Таким образом, исходная расчетная схема будет иметь три степени свободы – y_1 , y_2 и φ . При этом φ определяется однозначно через y_3 и y_4 при использовании рычажных связей.

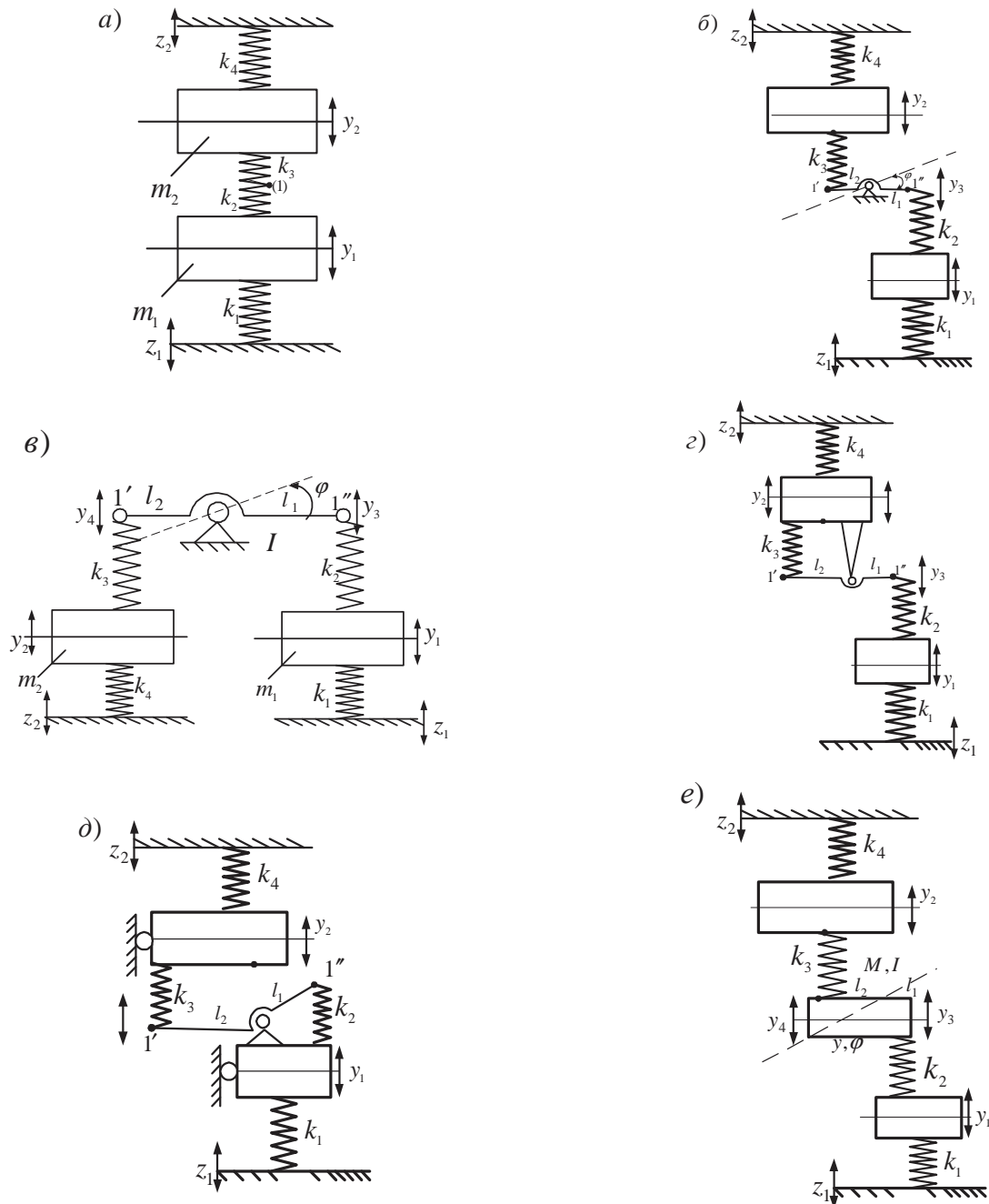


Рис. 1. Варианты расположения точки контактов двух типовых элементов k_2 и k_3 при использовании рычажных связей.

III. Сравнительная оценка вариантов размещения опор.

1. В качестве базовой модели рассмотрим расчетную схему на рис. 1 а, где элементы k_2 и k_3 соединены последовательно, что можно отразить через приведенную жесткость:

$$k_{np} = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}. \quad (1)$$

Выражения для кинетической и потенциальной энергий базовой модели (рис. 1 а) имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2, \quad (2)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_{np} (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_2 - z_2)^2. \quad (2')$$

Запишем систему дифференциальных уравнений движения:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1 (k_1 + k_{np}) - y_2 k_{np} = k_1 z_1, \quad (3)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2 (k_{np} + k_4) - y_1 k_{np} = k_4 z_2. \quad (4)$$

Структурная схема эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления, приведена на рис. 2.

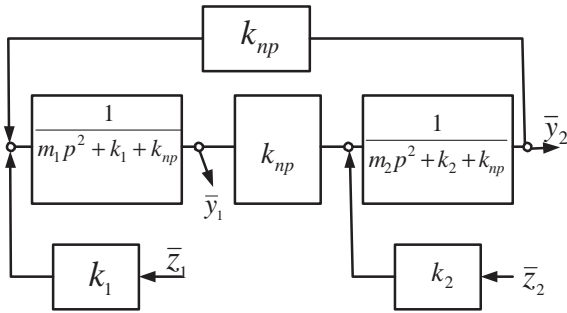


Рис. 2. Структурная схема системы, соответствующей рис. 1 а.

Рассматриваемая система, как следует из рис. 2, имеет две парциальные системы с парциальными частотами колебаний:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_{np}}{m_1}, \quad (5)$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_2 + k_{np}}{m_2}. \quad (6)$$

Отметим, что структурная схема является графическим аналогом уравнений (3), (4) в области преобразований Лапласа ($p = j\omega, j = \sqrt{-1}$). В системе (рис. 2) связи между парциальными структурами носят упругий характер. В рассматриваемом случае силы сопротивления считаются малыми. В системе имеется два «входных сигнала» (кинематическое возмущение \bar{z}_1 и \bar{z}_2), что позволяет найти ряд передаточных функций. Будем полагать, что во всех рассматриваемых случаях возму-

щение имеет одну частоту. Если $\bar{z}_1 \neq 0$, а $\bar{z}_2 = 0$, то передаточные функции от z_1 по y_1 и y_2 примут вид:

$$\bar{W}_1 = \frac{\bar{y}_1}{\bar{z}_1} = \frac{k_1 (m_2 p^2 + k_2 + k_{np})}{(m_1 p^2 + k_1 + k_{np})(m_2 p^2 + k_2 + k_{np}) - k_{np}^2}, \quad (7)$$

$$\bar{W}_1 = \frac{\bar{y}_2}{\bar{z}_1} = \frac{k_1 k_{np}}{(m_1 p^2 + k_1 + k_{np})(m_2 p^2 + k_2 + k_{np}) - k_{np}^2}. \quad (8)$$

Аналогичным образом могут быть найдены и другие необходимые передаточные функции.

2. Найдем выражение для кинетической и потенциальной энергии для системы на рис. 1 б.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} J \dot{\phi}^2, \quad (9)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + k_2 (y_3 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_4 - y_2)^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_2 - z_2)^2. \quad (10)$$

В рассматриваемом случае выполняются соотношения $\phi = \frac{y_3}{l_1}$ или $\phi = \frac{y_4}{l_2}$, тогда, с учетом типа рычажной связи, можно принять, что

$$y_3 = -\frac{l_1}{l_2} y_4 \text{ или } y_3 = -i y_4, \quad (11)$$

где $i = \frac{l_1}{l_2}$ называется передаточным отношением рычага. Отметим, что при рычаге другого типа нужно учитывать знак i , то есть в направления скорости точек рычага. Выражения (9), (10) можно преобразовать к виду:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} J \frac{y_4^2}{l_2^2}, \quad (12)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + k_2 (-y_1 - i y_4)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_4 - y_2)^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_2 - z_2)^2. \quad (13)$$

Примем, что $\frac{J}{l_2^2} = m_0$, тогда система дифференциальных уравнений движения запишется:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1 (k_1 + k_2) + k_2 i y_4 = k_1 z_1, \quad (14)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2 (k_3 + k_4) - y_4 k_3 = k_2 z_2, \quad (15)$$

$$m_0 \ddot{y}_4 + y_4 (k_2 i^2 + k_3) + y_1 k_2 i - k_3 y_2 = 0. \quad (16)$$

Структурная схема системы на рис. 1 б, в координатах y_1, y_2 и y_4 представлена на рис. 3.

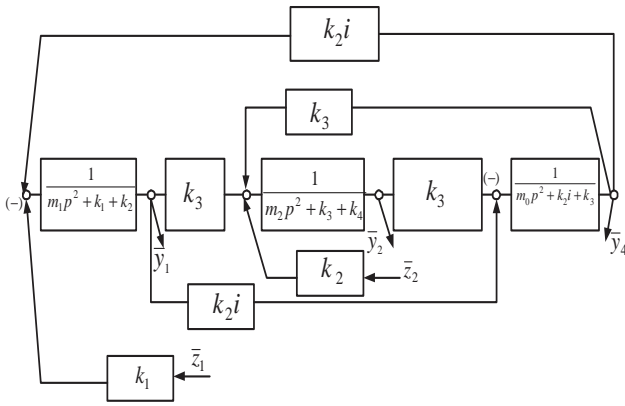


Рис. 3. Структурная схема системы, соответствующей на рис. 1 б.

Из рис. 1 б следует, что введение массоинерционно-го рычага добавило, по сравнению со схемой на рис. 1 а, дополнительную степень свободы. При этом перекрестные связи системы являются упругими; парциальных систем и их частот будет соответственно три:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \tag{17}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k_3 + k_4}{m_2}, \tag{18}$$

$$\omega_3^2 = \frac{k_2 i}{m_0}. \tag{19}$$

3. Для учета эффектов введения невесомого рычага (стержня) примем, что $m_0 = 0$. Из (16) найдем

$$y_4 = -y_1 \frac{k_2 i}{k_2 i^2 + k_3} + y_2 \frac{k_3}{k_2 i^2 + k_3}, \tag{20}$$

Примем, что

$$a = \frac{k_2 i}{k_2 i^2 + k_3}, b = \frac{k_3}{k_2 i^2 + k_3}, \tag{21}$$

тогда

$$y_4 = -y_1 a + y_2 b. \tag{22}$$

Подставив (22) в (14) и (15), получим систему уравнений

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2 - k_2 a i) + k_2 i b y_2 = k_1 z_1, \tag{23}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2(k_3 + k_4 - k_3 b) + k_3 a y_1 = k_2 z_2, \tag{24}$$

С учетом соотношений (21) эти уравнения примут вид:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1 \left(\frac{k_1 k_2 i^2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{k_2 i^2 + k_3} \right) + y_2 \frac{k_2 k_3 i}{k_2 i^2 + k_3} = k_1 z_1, \tag{25}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2 \left(\frac{k_2 k_3 i^2 + k_4 k_2 i^2 + k_4 k_3}{k_2 i^2 + k_3} \right) + y_1 \frac{k_2 k_3 i}{k_2 i^2 + k_3} = k_2 z_2, \tag{26}$$

При $I = 1$ (25), (26) сводятся к системе уравнений, которая отличается от системы уравнений (3), (4) тем, что знаки перед членами $k_{np} y_1$ в (3) и $k_{np} y_2$ в (4) будут не минус, а плюс. Это означает, что введение рычага первого рода при $i = 1$ производит изменение знака связи между парциальными системами. Если в исходной системе (без введения рычага первого рода) такая связь была положительной (рис. 2), то с учетом введения рычажной связи указанного типа происходит изменение типа перекрестной связи между парциальными системами, и она становится отрицательной. Это приводит к изменению знаменателя передаточной функции (7), (8), то есть к изменению характеристического уравнения системы. Что касается выбора i , при котором система уравнений (25), (26) совпадала бы с системой уравнений (3), (4), то его не существует.

Если $I = 0$, то это соответствует $l_1 = 0$, тогда (25), (26) примут вид:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2) = k_1 z_1, \tag{27}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2 k_4 = k_2 z_2. \tag{28}$$

Наличие опоры для рычага в этом случае «разрушает» исходную систему. Она превращается в систему двух колебательных контуров, которые не взаимодействуют между собой. Оставшаяся часть рычага $l_2 \neq 0$ при $l_1 = 0$ не оказывает на движение влияния. Однако, если $J \neq 0$, то контур m_2, k_2 образует совместно с фрагментом рычага $l_2 \neq 0$ систему с двумя степенями свободы, но взаимодействие с контуром m_1, k_1, k_2 разрушается. Если $I = \infty$, то $l_2 = 0$; в этом случае наблюдается симметричная по отношению к вышерассмотренной ситуация.

4. Если связь между элементами k_1 и k_2 будет реализована с помощью рычага второго рода, центр поворота которого совпадает с одним из концов рычага, то система уравнений движения (25), (26) запишется:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1 \left(\frac{k_1 k_2 i^2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{k_2 i^2 + k_3} \right) - y_2 \frac{k_2 k_3 i}{k_2 i^2 + k_3} = k_1 z_1, \tag{29}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2 \left(\frac{k_2 k_3 i^2 + k_4 k_2 i^2 + k_4 k_3}{k_2 i^2 + k_3} \right) - y_1 \frac{k_2 k_3 i}{k_2 i^2 + k_3} = k_2 z_2. \tag{30}$$

При таком переходе надо учесть, что выражение (11) принимает вид:

$$y_3 = i y_4, \tag{31}$$

что приводит к существенным изменениям свойств системы.

Если i не принимает экстремальных значений, то при $i < 1$ и $i > 1$ можно будет наблюдать изменение динамических свойств системы. Сравним две системы уравнений движения (3), (4) и (29), (30):

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_{np}) - y_2 k_{np} &= k_1 z_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 + y_2(k_{np} + k_4) - y_1 k_{np} &= k_4 z_2, \\ m_1 \ddot{y}_1 + y_1 \left(\frac{k_1 k_2 i^2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{k_2 i^2 + k_3} \right) - \\ - y_2 \frac{k_2 k_3}{k_2 i^2 + k_3} &= k_1 z_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 + y_2 \left(\frac{k_2 k_3 i^2 + k_4 k_2 i^2 + k_4 k_3}{k_2 i^2 + k_3} \right) - \\ - y_1 \frac{k_2 k_3 i}{k_2 i^2 + k_3} &= k_2 z_2. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + y_1 \left(\frac{k_1 k_2 i^2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{k_2 i^2 + k_3} \right) - \\ - y_2 \frac{k_2 k_3}{k_2 i^2 + k_3} &= k_1 z_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 + y_2 \left(\frac{k_2 k_3 i^2 + k_4 k_2 i^2 + k_4 k_3}{k_2 i^2 + k_3} \right) - \\ - y_1 \frac{k_2 k_3 i}{k_2 i^2 + k_3} &= k_2 z_2. \end{aligned} \right\} \quad (32')$$

Из системы уравнений (32), (32') можно составить соотношения:

$$k_2 + k_3 i = k_2 i^2 + k_3, \quad (33)$$

откуда

$$i^2 k_2 - i(k_2 + k_3) + k_3 = 0. \quad (34)$$

Решение (34) относительно i имеет вид:

$$i = \frac{k_2 + k_3}{2k_2} \pm \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2}. \quad (35)$$

Таким образом, можно найти значения i , при которых две системы уравнений (3), (4) и (29), (30) совпадают:

$$i_1 = 1, i_2 = \frac{k_3}{k_2}. \quad (36)$$

5. Рассмотрение расчетной схемы, приведенной на рис. 1 а, дает результаты, аналогичные полученным для схемы на рис. 1 б. Однако использование схемы на рис. 1 в дает более четкую картину динамических взаимодействий. В работе [3] рассмотрены особенности систем с рычажными связями первого и второго родов, где показано, что выбор i определяется также условиями устойчивости.

IV. Случай расположения опоры на подвижном элементе. Рассмотрим систему, расчетная схема которой (рис. 1 з) предполагает наличие опоры на массе m_2 . В данном случае рассматривается рычаг первого рода, обладающий моментом инерции J относительно точки опоры и массой m . Центр тяжести рычага совпадает с точкой опоры. Поскольку в точке (1) имеется сочленение, то схема на рис. 1 з, может быть преобразована к виду, показанному на рис. 4.

Отметим, что при преобразовании точки опоры рычага первого рода точка (1) разделена пружиной жесткостью k'_0 , которая соединяет рычаг и массу m_2 .

В дальнейших расчетах эта пружина будет удалена в предположении $k'_0 \rightarrow \infty$. Введем переменную $y - y_2 = y_0$, тогда запишем выражение для кинетической и потенциальной энергий, используя координаты:

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2, \quad (37)$$

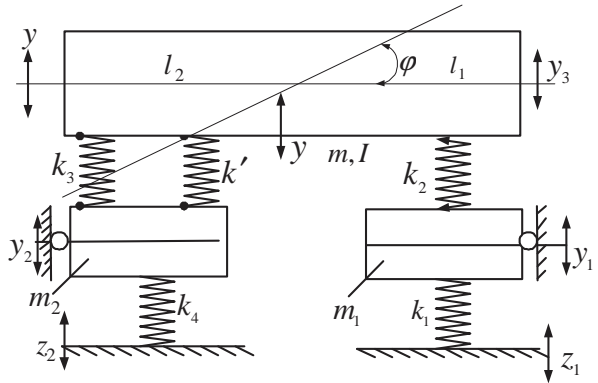


Рис. 4. Преобразованная расчетная схема, соответствующая схеме на рис. 1 з.

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} K_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 (y_3 - y_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} K_4 (y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2} K_3 (y_4 - y_2)^2 + \frac{1}{2} K_0 (y_0)^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Для расчетов введем ряд соотношений:

$$\begin{aligned} y &= ay_3 + by_4, \quad a = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, \quad b = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \\ \varphi &= c(y_4 - y_3), \quad c = \frac{1}{l_1 + l_2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Преобразуем (37), (38), используя соотношения (39), и получим:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \\ &+ \frac{1}{2} J c^2 (\dot{y}_4 - \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} m (a \dot{y}_3 + b \dot{y}_4)^2, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_3 - y_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} k_4 (y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_4 - y_2)^2 + \frac{1}{2} k_0 (y_0)^2, \end{aligned} \quad (41)$$

где $y_0 = y - y_2$. Тогда, принимая, что $ay_3 + by_4 - y_2 = y_0$, запишем потенциальную энергию в виде:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_3 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_2 - z_2)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} k_3 (y_4 - y_2)^2 + \frac{1}{2} k_0 (ay_3 + by_4 - y_2)^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Отметим, что $\dot{y} = \dot{y}_0 + \dot{y}_2 = ay_3 + by_4$, тогда в выражении кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} J c^2 (\dot{y}_4 - \dot{y}_3)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{y}_0 + \dot{y}_2)^2,$$

можно учесть соотношения

$$y_3 = \frac{y_0 + y_2 - by_4}{a} = a_1 y_0 + a_1 y_2 - b_1 y_4.$$

Введем ряд обозначений:

$$y_3 = a_1 y_0 + a_1 y_2 - b_1 y_4, \quad a_1 = \frac{1}{a}, \quad b_1 = \frac{b}{a}.$$

Запишем кинетическую энергию в виде:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} Jc^2 (\dot{y}_4 - a_1 \dot{y}_0 + a_1 \dot{y}_2 - b_1 \dot{y}_4)^2 + \quad (43)$$

$$+ \frac{1}{2} m (aa_1 \dot{y}_0 + aa_1 \dot{y}_2 - b_1 a \dot{y}_4 + b \dot{y}_4)^2$$

или

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} Jc^2 (b_2 y_4 - a_1 y_0 - a_1 y_2)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{y}_0 + \dot{y}_2)^2, \quad (43')$$

где присутствуют координаты (y_1, y_2, y_4, y_0) . Потенциальная энергия системы в этом случае примет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (a_1 y_0 + a_1 y_2 - b_1 y_4 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2} k_3 (y_4 - y_2)^2 + \frac{1}{2} k_0 (y_0)^2. \quad (44)$$

Сделаем ряд вспомогательных выкладок и запишем систему уравнений движения:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1 (k_1 + k_2) - y_2 (-k_2 a_1) + y_4 (k_2 b_1) + y_0 (-k_2 a_1) = k_1 z_1, \quad (45)$$

$$\ddot{y}_2 (m_2 + Jc^2 a_1^2 + m) + y_2 (k_2 a_1^2 + k_4 + k_3) + y_4 (-k_2 a_1) + \ddot{y}_4 (-Jc^2 a_1 b_2) + y_4 (-k_2 a_1 b_1 - k_3) + \ddot{y}_0 (Jc^2 a_1^2 + m) + y_0 (k_2 a_1^2) = k_4 z_2, \quad (46)$$

$$y_1 (k_2 b_1) + \ddot{y}_2 (-Jc^2 a_1 b_2) + y_2 (-k_2 a_1 b_1 - k_3) + \ddot{y}_4 (Jc^2 b_2^2) + y_4 (k_2 b_1^2 + k_3) + \ddot{y}_0 (-Jc^2 a_1 b_2) + y_0 (-k_2 a_1 b_1) = 0, \quad (47)$$

$$\ddot{y}_1 (Jc^2 a_1^2) + y_2 (k_2 a_1^2) + y_1 (-k_2 a_1) + \ddot{y}_4 (Jc^2 a_1 b_2) + y_4 (-k_2 a_1 b_1 + k_3) + \ddot{y}_0 (Jc^2 a_1^2) + y_0 (k_0 + k_2 a_1^2) = 0. \quad (48)$$

Коэффициенты уравнений движения в координатах (y_1, y_2, y_4, y_0) представлены в таблице 1.

Для перехода к системе координат (y_1, y_2, y_4) воспользуемся методом, изложенным в [5] и произведем «зануления» y_0 . Получим систему уравнений в координатах (y_1, y_2, y_4) . Примем, что $J = 0$ и $m = 0$, тогда получим вначале уравнения:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + y_1 (k_1 + k_2) - y_2 k_2 a_1 + y_4 k_2 b_1 = k_1 z_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 + y_2 (k_2 a_1^2 + k_4 + k_3) - y_1 k_2 a_1 - y_4 (k_2 a_1 b_1 + k_3) = k_4 z_2, \\ y_1 k_2 b_1 - y_2 (k_2 a_1 b_1 + k_3) + y_4 (k_2 b_1^2 + k_3) = 0. \end{cases} \quad (49)$$

Таблица 1

Коэффициенты уравнений движения (45) – (48)

a_{11}	y_1	a_{12}	y_2	a_{13}	y_4	a_{14}	y_0
$m_1 p^2 + k_1 + k_2$		$-k_2 a_1$		$k_2 b_1$		$-k_2 a_1$	
a_{21}		a_{22}		a_{23}		a_{24}	
$-k_2 a_1$		$(m_2 + m + Jc^2 a_1^2) p^2 + k_2 a_1^2 + k_3 + k_4$		$-Jc^2 a_1 b_2 p^2 - k_3 - k_2 a_1 b_1$		$(m + Jc^2 a_1^2) p^2 + k_2 a_1^2$	
a_{31}		a_{32}		a_{33}		a_{34}	
$k_2 b_1$		$-Jc^2 a_1 b_2 - k_2 a_1 b_1 - k_3$		$Jc^2 b_2 p^2 + k_2 b_1^2 + k_3$		$-Jc^2 a_1 b_2 - k_2 a_1 b_1$	
a_{41}		a_{42}		a_{43}		a_{44}	
$-k_2 a_1$		$Jc^2 a_1 p^2 + k_2 a_1^2$		$-Jc^2 a_1 b_2 - k_2 a_1 b_1$		$Jc^2 a_1^2 p^2 + k_0 + k_2 a_1$	
Q_1		Q_2		Q_3		Q_4	
$k_1 z_1$		$k_4 z_2$		0		0	

Примечание. Q_1 - Q_4 – обобщенные силы.

Третье уравнение из системы можно записать в виде

$$y_1 a_3 - a_4 y_2 + a_5 y_4 = 0, \quad (50)$$

где $a_3 = k_2 b_1, a_4 = k_2 a_1 b_1 + k_3, a_5 = k_2 b_1^2 + k_3$, , что используется для получения координаты:

$$y_4 = \frac{a_4 y_2 - a_3 y_1}{a_5} = b_3 y_2 - b_4 y_1, \quad (51)$$

где, в свою очередь, $b_3 = \frac{a_4}{a_5}; b_4 = \frac{a_3}{a_5}$.

Осуществим подстановку (51) в систему уравнений (49) и получим:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1 (k_1 + k_2 - k_2 b_1 b_4) - y_2 (k_2 a_1 - k_2 b_1 b_3) = k_1 z_1, \quad (52)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2 (k_2 a_1^2 + k_4 + k_3 - k_2 a_1 b_1 b_3 - k_3 b_3) - y_1 (k_2 a_1 - k_2 a_1 b_1 b_4 - k_2 b_1 b_4) = k_4 z_2. \quad (53)$$

Для дальнейшего использования составим список соотношений

$$\begin{aligned} a &= \frac{l_1}{l_1 + l_2}; b = \frac{l_2}{l_1 + l_2}; c = \frac{1}{l_1 + l_2}; a_1 = \frac{1}{a}; \\ b_1 &= \frac{b}{a}; b_2 = 1 + b_1 = \frac{a + b}{a}; a_3 = k_2 b_1; \\ a_4 &= k_2 a_1 b_1 + k_3; a_5 = k_2 b_1^2 + k_3; b_3 = \frac{a_4}{a_5}; b_4 = \frac{a_3}{a_5}. \end{aligned} \quad (54)$$

Используя (54) и принимая значения l_1 и l_2 равными нулю одновременно и попеременно, можно упростить обобщенные расчетные схемы на рис. 1 б – е, которые в конечном итоге приводятся к базовой или исходной схеме, приведенной на рис. 1 а.

Примем, что $i = \frac{l_2}{l_1}$, тогда соотношения (54) можно преобразовать:

$$\begin{aligned} a &= \frac{l_1}{l_1 + l_2} = 1 + i; b = \frac{l_2}{l_1 + l_2} = \frac{i}{1 + i}; \\ b_1 &= i; b_2 = 1 + i; a_3 = k_2 i; \\ a_4 &= k_2 (i + 1) i + k_3; a_5 = k_2 i^2 + k_3; \\ b_3 &= \frac{k_2 (i + 1) i + k_3}{k_2 i^2 + k_3}; b_4 = \frac{k_2 i}{k_2 i^2 + k_3}. \end{aligned} \quad (55)$$

Упрощения приводят к сопоставимым результатам.

V. Случай соединения двух элементов при промежуточном звене в виде рычага второго рода. Рассматривается вариант для расчетной схемы на рис. 1 з, когда используется рычаг 2-го рода. В этом случае схема взаимодействия элементов будет иной, чем показано на рис. 5.

На расчетной схеме (рис. 5) приняты обозначения: отрезок (1) (1'') – соответствует l_2 , отрезок (1)(1') – соответствует l_1 , рычаг обладает моментом инерции J

относительно опоры (точка (1)), ϕ – угол отклонения рычага от элемента массы m_2 , y_3 – координата точки крепления пружины k_3 – точка (1'), $i = \frac{l_2}{l_1}$.

Выражение для кинетической и потенциальной энергий имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{y}_3^2, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_3' - y_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} k_3 (y_3 - y_2)^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_4 - z_2)^2. \end{aligned} \quad (57)$$

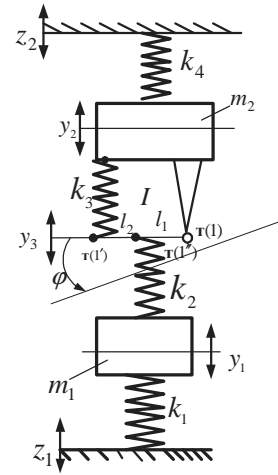


Рис. 5. Расчетная схема системы на рис. 1 з, но с рычагом второго рода.

Введем ряд соотношений: угол поворота ϕ в относительном движении рычага

$$\phi = \frac{y_2 - y_4}{l_2}; y_4' = y_2 - y_4; y_3' = \frac{y_4'}{i}; y_4' = \phi l_2; y_4', y_3' -$$

координаты точек крепления пружин в относительном движении; выразим y_4' через $y_3' - y_4' = y_3' i$.

Тогда абсолютная скорость движения приведенной массы ($m_0 = \frac{J}{l_2^2}$) определится $\dot{y}_4 = \dot{y}_2 + \dot{y}_4'$. Смещение

точки крепления пружины k_2 примет вид $y_3 = y_2 + y_3' = y_2 + y_4'$. Запишем (56), (57) в виде:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{y}_4^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} m_0 (\dot{y}_2 - \dot{y}_4')^2, \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} k_1 (y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_3' - y_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} k_3 (y_4')^2 + \frac{1}{2} k_4 (y_2 - z_2)^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Примем, что $y_4' = y_2 - y_1, y_3' = \frac{y_4'}{i} = \frac{y_2 - y_4}{i}$.

Сделаем ряд выкладок и получим систему уравнений:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2) + y_2(-k_2) + \frac{k_2 y'_4}{i} = k_1 z_1, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2(m_0 + m_2) + y_2(k_2 + k_4) - \\ - y_1 k_2 - y'_4 k_2 - \ddot{y}'_0 m_0 = k_2 z_2, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\ddot{y}'_4 m_0 + y'_4(k_3 + \frac{k_2}{i}) + y_1 \frac{k_2}{i} - \ddot{y}'_0 m_0 - \frac{k_2}{i} y''_2 = 0. \quad (62)$$

Если $m_0 = 0$ ($m_0 = \frac{J}{l_2^2}$), то система уравнений записывается:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2) - y_2 k_2 + k_2 y'_4 = k_1 z_1, \quad (63)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2(k_2 + k_4) - y_1 k_2 - \frac{y'_4 k_2}{i} = k_2 z_2, \quad (64)$$

$$k_3 y'_4 + \frac{y'_4 k_2}{i} - \frac{y_2 k_2}{i} + \frac{y_1 k_2}{i} = 0. \quad (65)$$

Из (65) найдем значение координаты:

$$y'_4 = y_2 \frac{k_2 i}{k_3 i^2 + k_2} - \frac{k_2 i}{k_3 i^2 + k_2} y_1. \quad (66)$$

После подстановки (66) в (63) и (64) получим:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2 - \frac{k_2^2 i}{k_3 i^2 + k_2}) - \\ - y_2(k_2 - \frac{k_2^2 i}{k_3 i^2 + k_2}) = k_1 z_1, \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{y}_2 + y_2(k_2 + k_4 - \frac{k_2^2 i}{k_3 i^2 + k_2}) - \\ - y_1(k_2 - \frac{k_2^2 i}{k_3 i^2 + k_2}) = k_2 z_2, \end{aligned} \quad (68)$$

или

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + y_1 \left[\frac{(k_1 + k_2)k_3 i^2 + k_1 k_2}{k_3 i^2 + k_2} \right] - \\ - y_2 \left[\frac{k_2 k_3 i^2}{k_3 i^2 + k_2} \right] = k_1 z_1, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{y}_2 + y_2 \left[\frac{(k_2 + k_4)k_3 i^2 + k_2 k_4}{k_3 i^2 + k_2} \right] - \\ - y_1 \left[\frac{-k_3 i^2 k_2}{k_3 i^2 + k_2} \right] = k_2 z_2, \end{aligned} \quad (70)$$

Если принять, что $l_2 = 0$, то (69), (70) преобразуются в систему уравнений:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1 k_1 = k_1 z_1, \quad (71)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + y_2 k_2 = k_2 z_2, \quad (72)$$

При $I = 1$ ($l_2 = l_1$) получим соответственно:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1 \left(\frac{k_1 k_3 + k_2 k_3 + k_1 k_2}{k_2 + k_3} \right) -$$

$$- y_2 \frac{k_3 k_2}{k_3 + k_2} = k_1 z_1,$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + \frac{k_2 k_3 + k_3 k_4 + k_2 k_4}{k_3 + k_2} -$$

$$- y_2 \frac{k_3 k_2}{k_2 + k_3} = k_2 z_2,$$

Преобразуем (73), (74) к виду:

$$m_1 \ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_{np}) - y_2 k_{np} = k_1 z_1, \quad (75)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + (k_4 + k_{np}) - y_2 k_{np} = k_2 z_2, \quad (76)$$

где $k_{np} = \frac{k_3 k_2}{k_3 + k_2}$.

Отметим, что система уравнений (75), (76) соответствует конфигурации расчетной схемы на рис. 1 а. Такая ситуация может быть только при $I = 1$. Если $l_1 = 0$, то $i \rightarrow \infty$, в этом случае «выходит» из взаимодействия упругий элемент k_3 .

При рассмотрении расчетной схемы на рис. 5 отметим, что при $l_1 = 0$ пружина k_2 соединяет m_1 и m_2 напрямую, а упругий элемент k_3 «выходит» из взаимодействия, так как $l_2 \neq 0$. Система в этом случае полностью совпадает с цепной системой обычного вида. Аналогичная ситуация происходит и при $I = 1$. Если $l_2 = 0$ при $l_1 = 0$, то ситуация остается аналогичной ($I = 1$). Если $l_2 = 0$, а $l_1 \neq 0$, то система распадается на два блока ($m_1 p^2 + k_1$) и ($m_2 p^2 + k_4$), а соединение этих блоков произойдет только при $l_1 = 0$.

Вариант безопорного рычага. Рассмотрим систему общего вида, когда рычаг не имеет опоры (рис. 6).

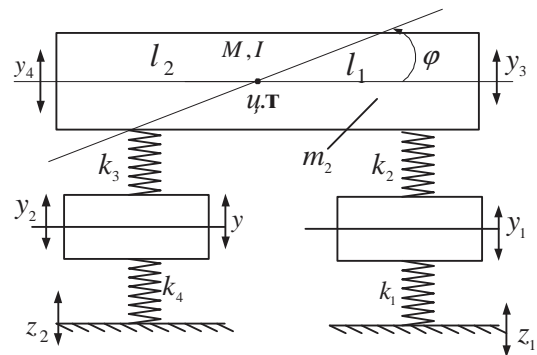


Рис. 6. Расчетная схема системы с двумя степенями свободы с рычагом без фиксированной точки опоры рычага.

Выражения для кинетической и потенциальной энергий имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2, \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_3 - y_1)^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_3(y_4 - y_2)^2 + \frac{1}{2}k_4(y_2 - z_2)^2. \end{aligned} \quad (78)$$

Введем ряд соотношений:

$$\begin{aligned} y_3 = y + l_2\varphi, \quad y_4 = y - l_2\varphi, \\ \varphi = \frac{y_3 - y_4}{l_1 + l_2}, \quad y = ay_4 + by_3, \\ a = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, \quad b = \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad c = \frac{1}{l_1 + l_2}. \end{aligned} \quad (79)$$

Преобразуем (77), (78) к виду:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}M(a\dot{y}_4 + b\dot{y}_3)^2 + \\ & + \frac{1}{2}Jc^2(\dot{y}_3 - \dot{y}_4)^2, \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_3 - y_1)^2 + \\ & + \frac{1}{2}k_3(y_4 - y_2)^2 + \frac{1}{2}k_4(y_2 - z_2)^2. \end{aligned} \quad (81)$$

Сделаем ряд промежуточных выкладок и запишем систему уравнений движения в координатах (y_1, y_2, y_3, y_4) :

$$m_1\ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2) + y_3(-k_2) = k_1z_1, \quad (82)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + y_2(k_3 + k_4) - y_4k_3 = k_4z_2, \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_3(Mb^2 + Jc^2) + y_3(k_2) - \\ - \ddot{y}_4(Jc^2 - Mab) + y_1(-k_2) = 0, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_4(Ma^2 + Jc^2) + y_4(k_3) - \\ - \ddot{y}_3(Jc^2 - Mab) - y_2k_3 = 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Примем $M = 0, J = 0$, то есть рычаг является в данном случае невесомым, но в нем имеется точка поворота, тогда

$$m_1\ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2) - y_3k_2 = k_1z_1, \quad (86)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + y_2(k_3 + k_4) - y_4k_3 = k_4z_2, \quad (87)$$

$$y_3k_2 - y_1k_2 = 0, \quad (88)$$

$$y_4k_3 - y_2k_3 = 0, \quad (89)$$

откуда $y_4 = y_2$.

После подстановок в (86), (87) получим

$$m_1\ddot{y}_1 + y_1(k_1 + k_2) - y_1k_2 = k_1z_1, \quad (90)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + y_2k_3 + k_4y_2 - y_2k_3 = k_4z_2, \quad (91)$$

В этом случае система (82) – (85) редуцируется к виду:

$$m_1\ddot{y}_1 + y_1k_1 = k_1z_1, \quad (92)$$

$$m_2\ddot{y}_2 + y_2k_4 = k_4z_2, \quad (93)$$

Если рычаг не обладает массоинерционными свойствами, то он не играет никакой роли в схеме по рис. 1 е; система уравнений распадается на два независимых уравнения (92), (93).

Воспользуемся преобразованиями Лапласа и запишем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_3(A) - \bar{y}_4(B) - \bar{y}_1k_2 &= 0, \\ \bar{y}_3B + \bar{y}_4C - k_3\bar{y}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Если J и M не равны нулю, то из системы уравнений следует, что при

$$\begin{aligned} A = (Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2, \quad B = (Mab - Jc^2)p^2, \\ C = (Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_3, \end{aligned}$$

можно преобразовать систему уравнений (82) – (85). Используя (94), найдем, что

$$y_4 = \frac{y_2Ak_3 + y_1k_2B}{AC - B^2}; \quad (95)$$

$$y_3 = \frac{y_1k_2C + y_2k_3B}{AC - B^2}; \quad (96)$$

Пусть $y_4 = k_2a_1y_1 + k_3b_1y_2$,

где $a_1 = \frac{B}{AC - B^2}$; $b_1 = \frac{A}{AC - B^2}$; в свою очередь, $y_3 = a_2k_2y_1 + b_2k_3y_2$,

где $a_2 = \frac{C}{AC - B^2}$; $b_2 = \frac{B}{AC - B^2}$; то есть $b_2 = a_1$.

Осуществив подстановку (94), (95) в (82) и (83), получим:

$$\bar{y}_1(m_1p^2 + k_1 + k_2) - k_2(a_2k_2y_1 + b_2k_3y_2) = k_1z_1, \quad (97)$$

$$\bar{y}_2(m_2p^2 + k_3 + k_4) - k_3(a_1k_2y_1 + b_2k_3y_2) = k_2z_2, \quad (98)$$

или

$$\bar{y}_1(m_1p^2 + k_1 + k_2 - a_2k_2^2) - y_2k_2k_3b_2 = k_1z_1, \quad (99)$$

$$\bar{y}_2(m_2p^2 + k_3 + k_4 - b_1k_3^2) - y_1k_3k_2a_1y_1 = k_2z_2, \quad (100)$$

Поскольку $a_1 = b_2$, то в системе уравнений (99), (100) имеется некоторая симметрия.

Рассмотрим

$$k_2 - a_2k_2^2 = k_2 - \frac{k_2^2C}{AC - B^2} = \frac{ACk_2 - k_2B^2 - k_2^2C}{AC - B^2};$$

$$\begin{aligned} k_2 - a_2k_2^2 = & \frac{[(Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2][(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_3]k_2 - \\ & - k_2[(Mab - Jc^2)p^2]^2 - k_2[(Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_3]}{AC - B^2} = 0. \end{aligned}$$

$$k_2 - a_2k_2^2 = \frac{k_2^2k_3 - k_2^2k_3}{k_2k_3} = 0.$$

Если $p = 0$, то $k_2 - a_2 k_2^2 = \frac{k_2^2 k_3 - k_2^2 k_3}{k_2 k_3} = 0$.

Если $p^2 \rightarrow \infty$, то

$$k_2 - a_2 k_2^2 = \frac{k_2 (Mb^2 + Jc^2)(Ma^2 + Jc^2) - (Mab - Jc^2)^2 k_2}{(Mb^2 + Jc^2)(Ma^2 + Jc^2) - (Mab - Jc^2)^2} = k_2.$$

Аналогичный результат будет по $k_3 - k_3^2 b_1$.

То есть, при $p \rightarrow \infty$ и $M \neq 0, J \neq 0$ система распадается на два независимых блока (движения по y_1, y_2 не связаны). Если $p = 0$, то эффект взаимодействия отсутствует, также как и при $p \rightarrow \infty$, но причины разные. Если $p \neq 0$ и $p \neq \infty$, то мы будем иметь промежуточный случай. Что касается оценки влияния промежуточного тела между m_1 и m_2 через точку (1), то введение весо-мого рычага с плавающей опорой дает следующие особенности.

В статическом случае, связь между m_1 и m_2 при $p = 0$ обеспечивалась через упругий элемент с приведенной жесткостью, определяемой выражением

$k_{пр} = \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}$. При введении рычага при $p = 0$ мы должны учесть в перекрестной связи коэффициенты $a_1 = b_2$.

При $p = 0$ они равны нулю, так как $b_2 = \frac{B}{AC - B^2}$, а

$B = (Mab - Jc^2)p^2$. Оценим значения коэффициентов a_2 и b_1 :

$$a_2 = \frac{C}{AC - B^2} = \frac{k_3}{k_2 k_3} = \frac{1}{k_2}, b_1 = \frac{1}{k_3}.$$

Если произвести подстановку таких значений в уравнение (99), (100), то уравнения распадаются на автономные; в этом случае связи между элементами m_1 и m_2 , через упругие элементы K_2 и K_3 не осуществляются.

VI. Заключение. В общем случае система, расчетная схема которой приведена на рис. 1 e, имеет, с учетом весо-мого рычага, четыре степени свободы. Поэтому можно ожидать, что взаимодействие между m_1 и m_2 четыре раза будет подвергаться существенным изменениям на резонансных частотах. Значения двух частот, связанных с рычагом, определяются из характеристического уравнения

$$AC - B^2 = 0. \tag{101}$$

При достижении резонансных частот коэффициенты b_1, b_2, a_2 достигают бесконечных величин. Если взять каждый из коэффициентов a_2 и b_1 , то они принимают на определенных частотах нулевые значения, определяемые по формулам:

$$\omega_{1\text{дин}}^2 = \frac{k_2}{Mb^2 + Jc^2}, \tag{102}$$

$$\omega_{2\text{дин}}^2 = \frac{k_3}{Ma^2 + Jc^2}. \tag{103}$$

На этих частотах система элементов m_1 и m_2 , изначально имеющих цепную структуру и перекрестную связь упругого типа, будет вести себя как некоторое твердое тело на упругих опорах $K_1 + K_2$ и $K_3 + K_4$ с перекрестной связью инерционного типа. Характерной особенностью соединения двух элементов по схеме, показанной на рис. 1 a, при введении весо-мого рычага с плавающей опорой является расширение диапазона динамических свойств. При этом параметры рычага имеют существенные значения, поскольку динамическая жесткость взаимодействия дает большой вариант изменений на разных частотах.

Литература

1. Дружинский И.А. Механические цепи. М.: Машиностроение, 1977. 240с.
2. Елисеев С.В., Резник Ю.Н, Хоменко Ф.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2008. 523 с.
3. Елисеев С. В., Московских А. О., Большаков Р. С., Савченко А. А. Возможности интеграции методов теории цепей и теории автоматического управления в задачах динамики машин // techomag.edu.ru: Наука и образование: электрон. науч.-техн. изд. 2012. № 6. URL: <http://techomag.edu.ru/doc/378699.html> (дата обращения: 10.06.2012).
4. Белокобыльский С.В. Динамика систем с сухим трением и ее приложение к задачам горной механики: моногр. М.: Машиностроение, 2002. 209 с.
5. Хоменко А.П., Елисеев С.В. Виброзащитные системы с сочленениями. Технология построения математических моделей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2010. Вып. № 4 (28). С. 8-18.

References

1. Druzhinsky I.A. Mechanical chains. M.: Mashinostroeniye, 1977. 238 s.
2. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyad'ko A.A. Dynamic synthesis in the generalized problems of technical objects vibroprotection and vibroinsulation. Irkutsk: Izd-vo Irkut. gos. un-ta, 2008. 523 s.
3. Eliseev S.V., Moskovskikh A.O., Bol'shakov R.S., Savchenko A.A. Integration capabilities of the circuit theory and automatic control theory methods in the machines dynamics problems // techomag.edu.ru: Nauka i obrazovanie: electron.n.-tekhn. izd. 2012. № 6. URL: <http://techomag.edu.ru/doc/378699.html> (access date: 10.06.2012).
4. Belokobyl'sky S.V. Dry friction dynamics and its application to the mining mechanical engineering problems: monogr. M.: Mashinostroeniye, 2002. 209 s.
5. Khomenko A.P., Eliseev S.V. Coupling vibration isolation systems. Mathematical models development // Sovremennye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovaniye. 2010. Vyp. № 4 (28). S. 8-18.