

УДК 628.646

## Определение энергии диссипации контактного взаимодействия однородных твердых тел в условиях нестационарного нагружения\*

V.A. Меновщikov<sup>1</sup>, С.П. Ереско<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М.Ф. Решетнева, пр-т им. газеты «Красноярский рабочий» 31, Красноярск, Россия. E-mail: eresko07@mail.ru  
Статья поступила 16.02.2012, принята 17.09.2012

*Показан подход к совершенствованию методов определения энергии контактного взаимодействия твердых тел в условиях нестационарного нагружения с учетом усталостных напряжений, приводящих к образованию трещин, на основе волновой энергетической теории. Существующие методы расчета параметров контактного взаимодействия узлов механических систем в условиях нестационарного нагружения основаны на расчете статической и динамической грузоподъемности и не учитывают энергии деформирования под действием волн напряжений, воздействующих на поверхностные и подповерхностные слои контактирующих тел, имеющих место в реальных эксплуатационных процессах практически любых механических систем. Определение энергии диссипации связано со значительными трудностями, обусловленными с одной стороны приближенным знанием количества вакансий дислокаций и других дефектов в поликристаллах, а с другой стороны, определение указанных параметров связано со значительным экспериментальным объемом исследований. Однако такие расчеты возможны и данные расчетов могут дать реальную картину структурного состояния материала. Исходное стационарное состояние механической системы в первом приближении можно считать однородным, независимо от того находится ли данная система под действием силовых или температурных полей, так как учет влияния которых может быть реализован введением соответствующих коэффициентов. Эволюция поля (силового, температурного, энергетического) в пространстве и во времени может быть оценена интегрированием дифференциальных уравнений, полученных для конкретных случаев. Феноменологический подход к проблеме затухания (рассеяния) волны напряжений в нелинейных средах проводится в предположении малых амплитуд и поэтому максимальный уровень мало отличается от начального. По отношению к металлическим материалам это допущение справедливо вследствие малого рассеяния последними энергии падающей волны, причем в данном случае расчет упрощается за счет пренебрежения влиянием амплитуды поля.*

**Ключевые слова:** энергия, диссипация, волна напряжения, микропластичность, твердое тело, контртело, подповерхностный слой, эволюция силового поля

## Determination of energy dissipation for homogeneous solids contact interaction under nonstationary loading conditions

V.A. Menovshchikov<sup>1</sup>, S.P. Eresko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Siberian State Aerospace University, 31 Krasnoyarsky rabochy av., Krasnoyarsk, Russia. E-mail: eresko07@mail.ru  
The article received 16.02.2012, accepted 17.09.2012

*This article demonstrates the approach to the improvement of determination methods of solids contact interaction energy under nonstationary loading conditions taking into account the fatigue stress which leads to cracking. This approach is based on the wave energy theory. The existing methods of calculating the contact interaction parameters of mechanical systems units under nonstationary loading conditions are based on the calculation of static and dynamic load-carrying capacity and do not account for the energy of deformation under the effect of stress waves acting on the surface and subsurface layers of contacting bodies which occur in real-world operational processes of almost every mechanical system. The determination of dissipation energy is connected with considerable difficulties due to, on the one hand, the approximate knowledge of vacancies number and other defects dislocations in polycrystalline materials, and, on the other hand, the parameters definition is connected with a considerable experimental research. However, such calculations are feasible and they can give a true picture of the material structural state. The initial stationary state of a mechanical system can be assumed to be uniform at the first approximation, regardless of whether the system is under the influence of power and temperature fields since accounting for their effect can be implemented by means of appropriate coefficients introduction. The field (power, temperature, energy) evolution in space and time can be estimated by integrating the differential equations derived for specific cases. The phenomenological approach to the problem of the stress wave attenuation (dissipation) in nonlinear media is carried out under the assumption of small amplitudes and, therefore, the maximum level is closely approximated to the initial one. As for metal materials, this assumption is correct due to their small amount of the incident wave energy dissipation, and in this case, the calculation is simplified by neglecting the field amplitude effect.*

**Keywords:** energy, dissipation, stress wave, microplasticity, solid, counterbody, subsurface layer, force field evolution.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда поддержки науки и научной деятельности.

**Введение.** Существующие методы расчета параметров контактного взаимодействия элементов подшипниковых узлов механических систем в условиях нестационарного нагружения основаны на расчете статической и динамической грузоподъемности и не учитывают энергии деформирования под действием волн напряжений, воздействующих на поверхностные и подповерхностные слои контактирующих тел, имеющие место в реальных эксплуатационных процессах практически любых механических систем.

Описание волновой природы напряжений должно содержать следующие аспекты: **1** – описание механизма явления; **2** – описание стационарного состояния системы; **3** – описание эволюции силового и деформационного поля во времени и пространстве от начального (граничного) состояния к стационарному.

Первый аспект относится к теории микропластичности, определяющей превалирующий механизм рассеяния энергии падающей волны напряжений. В данном случае применимы механизмы рассеяния энергии в амплитудонезависимой области. Расчет сводится к суммированию потерь энергии падающей волны на движение вакансий, приместных атомов, незакрепленных дислокаций, субгранул и границ зерен.

Определение потерь энергии в данном случае связано со значительными трудностями, обусловленными, с одной стороны, приближенным знанием количества вакансий дислокаций и других дефектов в поликристаллах, а с другой стороны, определение указанных параметров связано со значительным экспериментальным объемом исследований. Однако такие расчеты возможны, и данные расчетов могут дать реальную картину структурного состояния материала.

Второй и третий аспекты могут быть решены в рамках феноменологической теории. Исходное стационарное состояние механической системы в первом приближении можно считать однородным, независимо от того, находится ли данная система под действием силовых или температурных полей, учет влияния которых может быть реализован введением соответствующих коэффициентов.

Эволюция поля (силового, температурного, энергетического) в пространстве и во времени может быть оценена интегрированием дифференциальных уравнений, полученных для конкретных случаев.

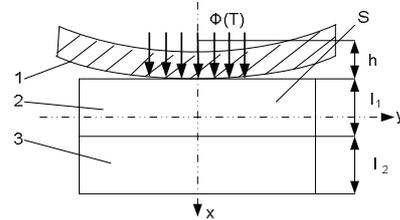
Феноменологический подход к проблеме затухания (рассеяния) волны напряжений в нелинейных средах проводится в предположении малых амплитуд, и поэтому максимальный уровень мало отличается от начального. По отношению к металлическим материалам это допущение справедливо вследствие малого рассеяния последними энергии падающей волны, причем в данном случае расчет упрощается за счет пренебрежения влиянием амплитуды поля.

Энергия волны в неоднородной среде расходуется на поглощение и рассеяние (увод энергии из когерентной части волны).

Рассмотрим подробнее оба понятия. Чтобы среда обладала поглощением, не обязательно, чтобы этим свойством обладали отдельные рассеивающие центры. Даже если последние только рассеивают излучение,

тем самым отводя энергию в сторону от выбранного направления движения волны.

**Определение энергии волн в однородной среде.** Рассмотрим систему взаимодействующих сред, состоящую из трех элементов конечных размеров.



**Рис. 1.** Схема контактного взаимодействия двух твердых тел: 1 – внешнее криволинейное контактное тело; 2 – поверхностный слой материала контртела; 3 – подповерхностный слой контртела.

Источником волн является развивающаяся трещина. Согласно [1], поток энергии  $T$  в вершине трещины с учетом только нормальных напряжений определяется:

$$\Phi(T) = BD^{-1} \left( 1 - \frac{v^2}{c_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} v^3 \sigma^2, \quad (1)$$

где  $c_1$  – скорость продольной волны в материале;  $v$  – скорость роста трещины;  $\sigma$  – растягивающее напряжение.

Вызванные потоком энергии колебания распространяются по трем элементам (рис. 1). Выразим величину давления на поверхность  $S$  контртела:

$$p_0 = \rho u_0 v, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность;  $u_0$  – смещение;  $v$  – скорость звуковой волны в материале.

Разложим вектор  $\vec{p}$  на две компоненты:

$$\mathbf{p} = p\mathbf{k}_1 + p\mathbf{k}_2. \quad (3)$$

Учитывая (3), выразим параметры Стокса:

$$I = [p\mathbf{k}_1]^2; \quad Q = [p\mathbf{k}_1]^2 - [p\mathbf{k}_2]^2; \quad (4)$$

$$u \equiv -2 \operatorname{Re}[(p\bar{\mathbf{k}}_1)(p\bar{\mathbf{k}}_2)]; \quad (4)$$

$$v \equiv -2 \operatorname{Im}[(p\bar{\mathbf{k}}_1)(p\bar{\mathbf{k}}_2)]. \quad (5)$$

Параметр  $u$  связан с распространением волны, а  $v$  – с поглощением.

Интенсивность потока энергии  $I$  через площадку связана со средней плотностью энергии волны соотношением:

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi} I, \quad (6)$$

а со средним потоком энергии –

$$\vec{S} = \frac{c}{2\pi} \vec{k} I, \quad (7)$$

где  $c$  – скорость распространения волны.

Для выяснения физического смысла параметров Стокса рассмотрим поляризованную волну, распространяющуюся в направлении оси  $Z$ .

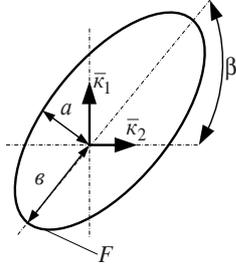


Рис. 2. Схема движения волны.

Полуоси эллипса определим как, при  $\epsilon_0 = p_0$ ,

$$a = \epsilon_0 \sin \beta, \quad b = \epsilon_0 \cos \beta. \quad (8)$$

Вектор силового поля можно выразить следующим уравнением:

$$\vec{p}(t) = 2p_0 \vec{k}_1 \sin \beta \cos(\omega t - \kappa z + \theta) + 2p_0 \vec{k}_2 \cos \beta \sin(\omega t - \kappa z + \theta), \quad (9)$$

тогда силовое поле в направлении распространения волны равно:

$$\left. \begin{aligned} p_{(\kappa_1)} &= p_0 (i \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) e^{i(\kappa z - \theta)} \\ p_{(\kappa_2)} &= p_0 (i \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) e^{i(\kappa z - \theta)} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где  $\kappa = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ ;  $\omega$  – циклическая частота;  $c$  – скорость волны;  $\lambda_0$  – длина волны

Как следует из (10), силовое поле (а следовательно и поток энергии) в направлении  $\vec{k}_2$  меньше, чем в направлении  $\vec{k}_1$ .

Из закона сохранения энергии силового поля:

$$T_{\text{полн}}^{(\vec{k})} = T_{\text{рас}}^{(\vec{k})} + T_{\text{погл}}^{(\vec{k})}, \quad (11)$$

где  $T_{\text{рас}}^{(\vec{k})}$  – энергия рассеяния в направлении волнового вектора;  $T_{\text{погл}}^{(\vec{k})}$  – энергия поглощения в направлении вектора  $\vec{k}$ .

Для случая, если длина волны велика по сравнению с расстоянием между частицами среды, энергия рассеяния имеет незначительную величину, и учитывать можно только поглощение.

В этом случае коэффициент поглощения можно определить из формулы:

$$I = I_0 e^{-\delta z}, \quad (12)$$

где  $I_0 = p_0^2$ ;  $\delta$  – коэффициент поглощения;  $z$  – координата.

Если падающая волна на поверхность  $F$  (рис. 2) полностью поляризована, то

$$T_{\text{полн}} = 2\pi \kappa^{-1} \left[ \text{Im}(C_{11}^L + C_{22}^L) + Q \text{Im}(C_{11}^L - C_{22}^L) - u \text{Im}(C_{12}^L + C_{21}^L) + v \text{Re}(C_{12}^L - C_{21}^L) \right] \quad (13)$$

Тогда:

$$\delta = N T_{\text{полн}}, \quad (14)$$

где  $N$  – число центров поглощения;  $C_{ij}$  – амплитуда силового поля.

Слагаемые  $[v \text{Re}(C_{12}^L - C_{21}^L)]$  и  $[u \text{Im}(C_{12}^L + C_{21}^L)]$  отвечают за распространение и поглощение волн соответственно.

Предположим, что для частот акустического диапазона действительная часть намного больше мнимой, т. е.  $\text{Re} \gg \text{Im}$ .

Распространение волны в среде можно представить волновым уравнением:

$$\left[ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \bar{u} = \Phi \left( \bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial \vec{r}}, \dots \right), \quad (15)$$

где  $u(\vec{r}, t)$  – искомое силовое поле;  $\Phi(\dots)$  – нелинейная функция силового поля и его производных любого порядка;  $\epsilon \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$  – линейный оператор, описывающий частотную дисперсию решетки.

Решение уравнения (15) может быть найдено в виде:

$$u = a(\vec{r}, t) \cos[\kappa x - \omega t + \phi(\vec{r}, t)] + w(\vec{r}, t) \quad (16)$$

где  $\kappa$  – волновое число.

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \quad (17)$$

Пусть уравнение (17) имеет положительные корни, т. е.  $\omega = \omega(\kappa)$ .

Функции  $a(\vec{r}, t)$  и  $\phi(\vec{r}, t)$ , согласно [2],

$$\phi_t + v \phi_x + \frac{1}{2} \left[ v^1 \phi_x^2 + \frac{v}{\kappa} (\nabla \phi)^2 \right] - \frac{v^1}{2a} a_{xx} - \frac{v}{2\kappa a} \Delta a = F(a) \quad (18)$$

$$(a^2)_t + v(a^2)_x + v'(a^2 \phi_x)_x + \frac{v}{\kappa} \nabla(a^2 \nabla \phi) = 2af(a), \quad (19)$$

где  $v$  – групповая скорость  $v = \frac{d\omega}{d\kappa}$ ;  $v' = \frac{dv}{d\kappa}$ .

Иначе говоря,

$$F(a) = \frac{v \text{Re} \Phi}{\kappa a}; \quad f(a) = \frac{v}{\kappa} \text{Im} \Phi_1,$$

$\Phi_1$  – коэффициент разложения  $\Phi(a \cdot \cos \xi; a \sin \xi)$  в ряд Фурье по  $\xi$  (исходное направление).

Функция  $w(\bar{r}, t)$  имеет вид:

$$w(\bar{r}, t) = \sum_{l \neq 1} \frac{\Phi e(a) e^{i(lkx - \omega t + \phi(\bar{r}, t))}}{l \left[ \left( \frac{\omega}{e} \right)^2 \varepsilon(l\omega) - \kappa^2 \right]} + w_0(\bar{r}, t), \quad (20)$$

где  $w_0(\bar{r}, t)$  – решение уравнения (15) без правой части.

Система уравнений (18), (19) будет иметь вид:

$$\phi = F(ai)t + \phi_{0i}, \quad a = a_i, \quad (21)$$

где  $a_i$  – корни уравнения.

$f(a) = 0$ , без учета высших гармоник, силовое поле:

$$u = a_i \cos[kx - (\omega k - F(a_i, \kappa) + \phi_{0i})]. \quad (22)$$

При затухании, обусловленном поглощением,  $a \rightarrow 0$ , и при  $t_0 = 0$   $a = a(0)$  т. е.  $a$  зависит от времени. Из выражений (18) и (19) получим, что:

$$\frac{da}{dt} = f(a). \quad (23)$$

При  $f[a(0)] < 0$   $a \rightarrow$  к ближайшему меньшему  $a(0)$ , корню уравнения (21). Интегрируя уравнение (23), получим значение амплитуды  $a$ , коэффициент затухания:

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \frac{aH}{ak}. \quad (24)$$

Если степень нелинейности среды является величиной значительной, можно использовать волновые уравнения вида:

$$\left[ \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon \left( |\bar{u}|, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] u = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) допускает решение в виде:

$$u(x, t) = a_e e^{i(kx - \omega t)}, \quad (26)$$

где  $\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c} \varepsilon'(-i\omega_1 a e)$ .  $\varepsilon''(-i\omega_1 a e) = 0$ .

Установим  $\text{Re } \varepsilon = \varepsilon'$ , а  $\text{Im } \varepsilon = \varepsilon''$  при  $\text{Re } \varepsilon \gg \text{Im } \varepsilon$

$$\frac{da}{dx} = -\frac{\omega}{c} \frac{\varepsilon''(-i\omega_1 a) a^2}{d \left[ a^2 \varepsilon'(-i\omega_1 a) \right]} \quad (27)$$

Решение уравнения (25) с учетом затухания будем искать в виде:

$$u = a(x) e^{i(S(x) - \omega t)}, \quad (28)$$

где  $S$  – множитель самовоздействия и при  $\varepsilon'' = 0$

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \int_{a_0}^a \kappa^{-\frac{1}{2}}(a) da \\ S &= S_0 \pm M \int_{a_0}^a a^{-2} \kappa^{-\frac{1}{2}}(a) da \end{aligned} \right\}, \quad (29)$$

где в уравнениях (29)  $\kappa(a) = 2w - 2v(a) - \frac{M^2}{a^2}$ ;  $w$  – постоянная интегрирования, имеющая смысл плотности энергии;  $M$  – постоянная интегрирования, имеющая смысл потока энергии через выбранную площадку. Если  $\kappa(a)$  имеет кратный корень, то решение (26), если же два однократных корня, то  $a(x)$  и  $S(x)$  периодические функции с периодом.

Период:

$$T = 2 \int_{a_1}^{a_2} \kappa^{-\frac{1}{2}}(a) da; \quad (30)$$

в свою очередь,  $a_1$  и  $a_2$  есть функции  $w$  и  $M$ .

Если  $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ , тогда  $M$  и  $w$  – медленно изменяющиеся функции по сравнению с  $a$  и  $S(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \langle \varepsilon''(a) a^2 \rangle \\ \frac{dw}{dx} &= -\frac{\omega^2}{c^2} M \langle \varepsilon''(a) \rangle \end{aligned} \right\}. \quad (31)$$

Выражение  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по периоду.

$$\langle \Psi(a) \rangle = \frac{2}{T} \int_{a_1}^{a_2} \Psi(a) \kappa^{-\frac{1}{2}}(a) da \quad (32)$$

Стационарные значения  $M_i$  и  $w_i$  определяются из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \langle \varepsilon''(a) \rangle &= 0 \\ \langle \varepsilon''(a) a^2 \rangle &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

**Выводы.** Подставляя значения  $M_i$  и  $w_i$ , вычисленные по формуле (32), в уравнения (29) и (30), а затем в (28), получим искомое решение. Изменения  $w$  и  $M$  находятся из уравнений (31).

Примеры практического применения данного подхода изложены в [3].

### Литература

1. Craggs J.W. Mch. Phys // Solids 1960. Vol. 1. № 5. P.139.
2. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М: Наука, 1973. 176 с.
3. Меновщиков В.А., Ереско С.П. Исследование и совершенствование игольчатых подшипников карданных передач транспортно-технологических машин: моногр. Красноярск: Изд-во КрасГАУ, 2006. 283 с.

### References

1. Craggs J.W. J. Mch. Phys / Solids. 1960. Vol. 1. №5. P.139.
2. Karpman V. I. Nonlinear waves in dispersive environment. М.: Nauka, 1973. 176 s.
3. Menovshchikov V.A., Eresko S.P. Investigation and improvement of needle bearings of cardan gears of transport and technological machines: monogr. Krasnoyarsk: Izd-vo KrasSGAU, 2006.283 s.