

## ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОВЕДЕНИЯ

УДК 62.752

### Взаимодействие звеньев через массоинерционный элемент в теории механических цепей

С.В. Белокобыльский<sup>1</sup>, С.В. Елисеев<sup>2</sup>, И.С. Ситов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Братский государственный университет, Макаренко 40, Братск, Россия. E-mail: plemja@rambler.ru

<sup>2</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения, Чернышевского 15, Иркутск, Россия.

Статья поступила 15.01.2012, принята 4.05.2012

*Рассматриваются вопросы взаимодействия двух типовых элементов механических цепей через массоинерционное звено в виде материальной точки. Получены необходимые соотношения. Показаны возможности учета особенностей при использовании в качестве соединительного звена твердого стержня с неподвижной точкой опоры. В механических цепях соединения элементов (типовых элементарных звеньев) при реализации последовательных соединений могут использоваться некоторые промежуточные устройства. Физической формой такого устройства может выступать невесомый (или весомый) стержень, имеющий точку вращения. Использование подобных устройств в реализации последовательных соединений в приложении к механическим цепям позволяет изменить метрику системы, то есть формировать систему сил как минимум в плоскости. В механических цепях устройства промежуточной связи при малых массоинерционных параметрах (невесомые стержни) выполняют кинематические функции, что позволяет изменить приведенные параметры механических цепей. Рычажные соединения позволяют ввести в рассмотрение обобщенную процедуру определения параметров последовательного соединения двух элементов. Предлагаемый подход может рассматриваться как методологическая основа учета в динамических расчетах свойств реальных узлов, агрегатов и передач различных машин, поскольку любые виды подвижных соединений в конструктивных реализациях часто являются достаточно сложными многозвенными механизмами и устройствами.*

**Ключевые слова:** механическая цепь, соединения механических элементов, колебания механической системы с рычажными связями.

### Interactions of links through mass-inertia element In theory of mechanical chains

S.V. Belokobyl'sky<sup>1</sup>, A.V. Eliseev<sup>2</sup>, I.S. Sitov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bratsk State University, 40, Makarenko str., Bratsk, Russia. E-mail: plemja@rambler.ru

<sup>2</sup>Irkutsk State University of Railway Engineering, 15, Chernyshevskogo str., Irkutsk, Russia.

Received 15.01.2012; Accepted 4.05.2012

*Questions of interactions of two typical links (spring, for example) of mechanical chains through mass-inertia link as material point are considered. Necessary correlations are received. Possibilities of accounting of peculiarities on using of lever as junction link with immovable point of support are shown. In mechanical circuits of connection of elements (typical elementary components for the implementation of successive connections) can be used, some intermediate devices. The physical form such a device can be weightless (or significant) rod with the point of rotation. Use such devices in the implementation of serial communications, in the Annex to the mechanical circuits, allows you to change the metric system, that is to form the system of forces, at least, in a plane. In mechanical circuits of the device interim communications for small mass-inertia link parameters (weightless rods) perform kinematic function that allows you to change the parameters of mechanical circuits. Worm connections allow you to enter in consideration of the generic procedure of determining the parameters of the serial connection of two elements. The proposed approach can be considered as the methodological basis for accounting in dynamic calculations of the properties of the real units, assemblies and transmission of various machines, as any kinds of mobile connections in a constructive implementations are often quite complex, of multilink mechanisms and devices.*

**Keywords:** mechanical chain, junction of mechanical elements, oscillation of mechanical system with lever ties.

**I. Введение.** Механическая колебательная система, часто используемая в качестве расчетной схемы, ориентированной на необходимость решения определенной задачи, в первую очередь оценивается перспективой получения математической модели. Во многих случаях математическая модель может быть составлена на основе применения известных приемов составления дифференциальных уравнений движения или динами-

ческого состояния системы. Последующие линеаризация и упрощение, в конечном итоге, приводят к определенному компромиссу, в ходе которого фиксируется базовая модель. В решении задач виброзащиты и виброизоляции, как было показано в работах [1, 2], могут использоваться структурные методы, основанные на применении теории цепей, а также подходов, развитых в теории автоматического управления. Возможная ин-

теграция подходов предполагает выделение объекта защиты, что совпадает в теории автоматического управления с пониманием существования объекта управления.

Если предполагать, что в виброзащитной системе можно выделить объект защиты, в отношении которого реализуется технология поиска и выбора способов и средств управления динамическим состоянием, то естественным продолжением процесса моделирования становится формирование модели, содержащей объект защиты, а также и цепей, образующих систему. По существу, в таком понимании синтезируется некоторая новая общность, или модель, в которой составляющие цепи – а они могут быть различной природы – замыкаются на объект управления (защиты). В результате получается интегральная модель, позволяющая к оценке динамического состояния подходить с позиций теории автоматического управления и использовать в полной мере ее аналитический аппарат [3].

С другой стороны, окружающие объекты связи могут рассматриваться как фрагменты механических цепей и быть преобразованы в некоторые структуры, имеющие передаточные функции. Физический смысл структур проявляется в том, что они являются дополнительными обратными связями по отношению к объекту защиты. В таких цепях формируются силы, действующие на объект. Параметры цепей выступают при этом как приведенные жесткости обобщенных пружин, что в целом приводит к существенному упрощению исходной структурной схемы системы, однако правила преобразований в структурах теории цепей и теории автоматического управления имеют свою специфику и границы применимости.

**II. Общие положения. Постановка задачи.** В теории механических цепей для преобразований используются правила последовательного и параллельного соединения элементов. Если механическая цепь (в ее простейшем варианте) состоит из типовых элементов с передаточными функциями  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$ , которые соединены в точке (2) – рис. 1, – то эквивалентным дуальным звеном будет двухполюсник, параметры которого определяются по формуле последовательного соединения пружин [1]

$$W_3(p) = \frac{W_1(p)W_2(p)}{W_1(p) + W_2(p)}, \quad (1)$$

где  $W_1(p)$  и  $W_2(p)$  – передаточные функции типового или сложного звена [3];  $p = j\omega$  – комплексная переменная ( $j = \sqrt{-1}$ ); в дальнейшем  $W_1(p)$  (и другие) может обозначаться, как  $W_1$ .

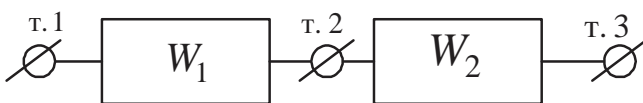


Рис. 1. Принципиальная схема последовательного соединения элементов.

Последовательные соединения характерны для механических и электрических цепей; при этом необхо-

димо, чтобы звенья  $W_1$  и  $W_2$  совпадали по параметрам «вход-выход» у каждого звена. Для примера, на рис. 1 используются два упругих элемента; в обеих пружинах входом является смещение, а выходом – усилие, что соответствует последовательному соединению пружин [3].

В предлагаемой работе исследуются возможности, приобретаемые цепью, состоящей из последовательно соединенных упругих элементов с жесткостями  $k_1$  и  $k_2$  и твердым телом между ними.

**III. Соединение элементов через твердое тело в виде материальной точки.** Будем полагать, что соединение двух элементов происходит таким образом, что точка (2) представляет собой некоторую «сборку», как показано на рис. 2. В этом случае при  $m = 0$  легко вернуться к первоначальному варианту. Если полагать, что  $m \neq 0$ , то система преобразуется в механическую колебательную систему с одной степенью свободы (рис. 3).

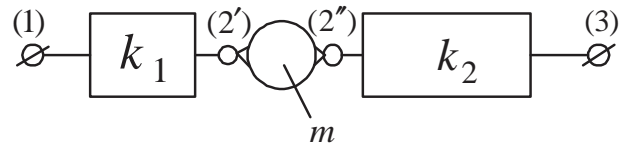


Рис. 2. Принципиальная схема соединения двух элементов  $k_1$  и  $k_2$  через точку (2) обладающую массой  $m$ .

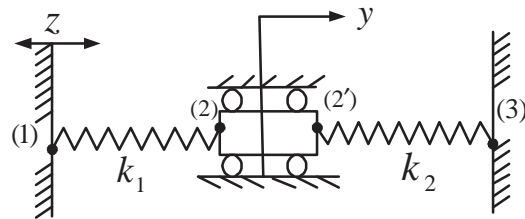


Рис. 3. Расчетная схема последовательного соединения элементов  $k_1$  и  $k_2$  через материальную точку ( $m$ ).

Поскольку материальная точка не имеет размеров, то можно предполагать, что твердое тело в виде материальной точки с массой  $m$  привнесет некоторые динамические эффекты, но при этом линейей действия сил упругих элементов остается прямой. Отличие схем на рис. 1 и рис. 3 заключается в том, что связь между точками (1) и (3) будет зависеть от частоты.

**Определение приведенных параметров.** Используем для определения необходимых данных некоторые приемы структурной теории виброзащитных систем [3], для чего построим структурную схему по рис. 3, на которой входом будет кинематическое возмущение  $Z$ , а выходом – сила, действующая на массу  $m$  (в данном случае это динамическая реакция  $Q_p$  на неподвижной стойке, на которую опирается пружина  $K_2$  (рис. 4а)).

Если преобразовать структурную схему на рис. 4а, принимая эквивалентность силового и кинематического возмущения, то получим приведенную схему (рис. 4б), которую, в свою очередь, можно упростить (рис. 4в) и найти передаточную функцию:

$$W_3(p) = \frac{\bar{Q}_p}{\bar{Z}} = \frac{k_1(mp^2 + k_2)}{mp^2 + k_1 + k_2}, \quad (2)$$

где  $Q_p$  – динамическая реакция в точке (3);  $p = j\omega$ . Если принять, что  $p = 0$ , то есть система рассматривается в статике, то

$$W_3(p)_{p=0} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad (3)$$

что полностью совпадает с выражением (1). Физический смысл (3) заключается в том, что введение между элементами  $W_1$  и  $W_2$  твердого тела в виде материальной точки ничего не меняет, но только в статике. Вместе с тем, с введением твердого тела, если иметь в виду исследование возможностей соединения двух типовых элементов (в последовательном соединении), преследуя некоторые цели развития структуры в ее топологическом смысле, в статике не происходит ничего необычного в силу того, что материальная точка обладает только массой, но не имеет размеров. Масса промежуточного элемента играет роль при протекании динамических процессов. Модуль  $W_3(p)$  представляет собой динамическую жесткость последовательного соединения двух пружин. При  $p = 0$  динамическая жесткость (обозначим ее через  $K_{дин}$ ) совпадает со статической  $K_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ , однако ситуация изменяется в зависимости от частоты динамического процесса, что показано на рис. 5.

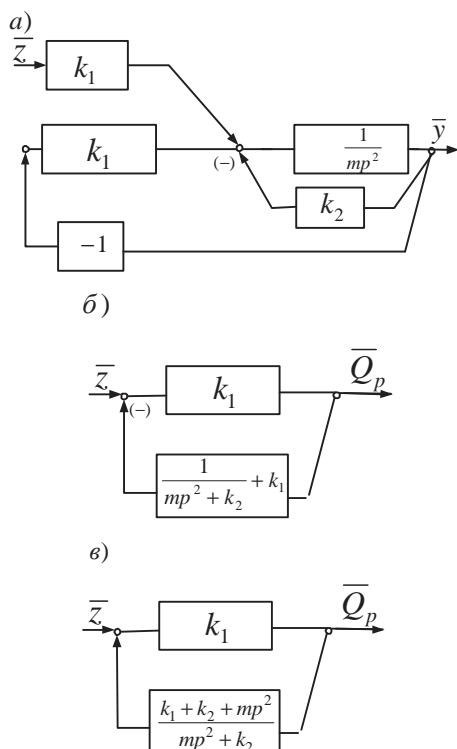


Рис. 4. Структурная схема системы, соответствующей схемам на рис. 3: а) общий вид; б) приведенные элементы; в) упрощенная приведенная схема.

На графике  $K_{дин}(\omega)$  можно найти в точке пересечения с линией  $K_0$ , на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  -  $K_{дин} = K_0$ ; то есть, на двух частотах динамическая система обладает свойствами как в статике. Аналогично можно найти частоты  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$  на пересечении  $K_{дин}(\omega)$  с линией  $K_0$ . Однако приве-

денное выше справедливо лишь при  $m = 1$  (принято для предварительных оценок).

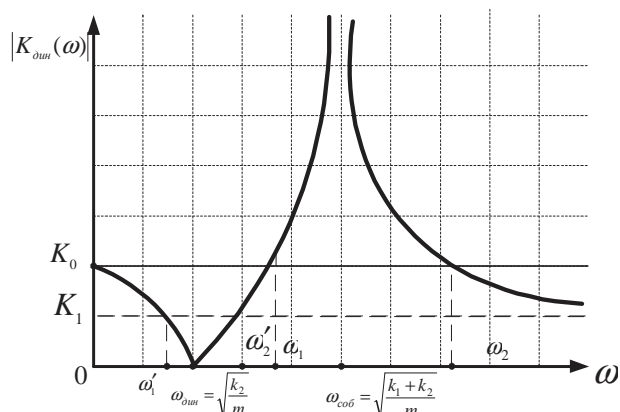


Рис. 5. Зависимость динамической жесткости последовательного соединения пружин  $K_1$  и  $K_2$  от частоты.

На самом деле динамическая жесткость зависит от двух параметров: частоты  $\omega$  и величины массы  $m$ . Так, при  $m \neq 0, m \neq 1$ .

$$W_3(p) = \frac{k_1 p^2 + \frac{k_1 k_2}{m}}{p^2 + \frac{k_1 + k_2}{m}}. \quad (4)$$

Если  $m \rightarrow \infty$ , то  $|W_3(p)| \rightarrow k_1$ . Физически это означает, что  $m \rightarrow \infty$  элемент  $W_2$ , или пружина (в нашем случае) с жесткостью  $k_2$ , блокируются (жесткость  $K_2$  становится большой и  $K_0 = K_1$ ).

В промежуточных случаях изменение  $m$  на каждой частоте дает семейство графиков, и анализ показывает, что введение твердого тела в виде материальной точки как некоторого нового элемента, предназначенного для расширения возможностей самого правила последовательного соединения, имеет ряд ограничений. Это дает представление о сложной зависимости свойств ветви от сочетания параметров элементов. Кроме того, соединение может вести себя как обычная пружина на частотах  $\omega'_1$  и  $\omega'_2$ , однако при этом вместо  $K_{пр}$  (или  $K_0$  при  $p = 0$ ) мы будем иметь  $k_1$ . Отметим также, что такую жесткость принимает ветвь при  $m \rightarrow \infty$ . То есть, процесс последовательного соединения при учете динамических факторов дает представление о свойствах ветви, имеющей меньшую, чем в статике, жесткость, что будет наблюдаться после  $\omega_2$ . К числу принципиально новых свойств можно отнести наличие режима с  $\omega_{дин}$ . На этой частоте при последовательном соединении пружин  $k_1$  и  $k_2$  через массу  $m$  будет наблюдаться динамическая нулевая жесткость. В свою очередь, при  $\omega_{sob}$  динамическая жесткость становится бесконечно большой, и ветвь «запирается», что нашло отражение в [4].

**IV. Твердое тело в виде стержня.** Более общим случаем по отношению к материальной точке является весомый твердый стержень, обладающий массой и моментом инерции. Такой промежуточный элемент в последовательном соединении  $W_1$  и  $W_2$  может использоваться, если решать задачи с созданием системы сил, которые будут находиться не на одной прямой, а дей-

ствовать в плоскости, например, создавать систему параллельных сил. В этом случае меняется топология системы, точнее, топологическая схема системы, если понимать под этим некоторые конфигурации равновесия системы сил на плоскости с использованием моментов сил и угловых смещений.

В общем случае твердое тело на плоскости совершает сложные движения, состоящие из поступательного движения по траектории центра масс и вращательного движения вокруг центра масс. В нашем случае можно полагать, что поступательное движение будет прямолинейным. Если твердое тело в виде весомого стержня (будем считать его вертикальным) изменяет свое положение, участвуя в плоском движении, то всегда можно найти мгновенный центр скоростей, а переход тела из одного положения в другое осуществляется за счет одного поворота [5]. Такие представления предполагают возможность введения стержня как некоторого соединительного устройства между элементами  $W_1$  и  $W_2$  при последовательном соединении, как показано на рис. 6, где точка  $(2^0)$  является мгновенным центром скоростей или мгновенным центром вращения ввиду малости самих перемещений.

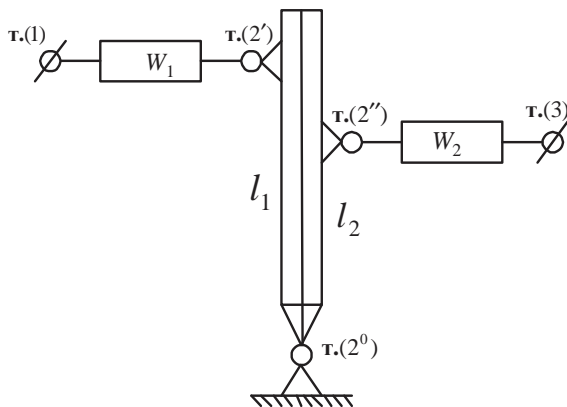


Рис. 6. Принципиальная схема последовательного соединения через весомый стержень.

Стержень на рис. 6 можно рассматривать как рычаг, на который в точках  $(2^')$  и  $(2''')$  происходит присоединение элементов  $W_1$  и  $W_2$ . В силу особенностей рычага между  $W_1$  и  $W_2$  возникает соотношение, определяемое положением точек  $(2^')$  и  $(2''')$  относительно центра вращения точки  $(2^0)$ . Положение точки  $(2^0)$  зависит от разных причин и может быть различным. В случае, показанном на рис. 6, рассматривается рычаг второго рода [6]. Однако, если точка  $(2^0)$  переместится и займет положение между точками, определяемое положением точек  $(2^')$  и  $(2''')$ , то это будет рычаг первого рода. Упомянутые рычаги имеют свои особенности. Отождествление точки опоры рычага с мгновенным центром скоростей представляется обоснованным с учетом, как было упомянуто, ряда ограничений, поскольку конечной целью исследований является изучение влияния при последовательном соединении введения промежуточного устройства в виде весомого рычага. Если физическая реализация рычажного взаимодействия будет связана с установкой точек опор рычага в мгновенном центре скоростей, то такая ситуация существ-

венно упростит процесс изучения динамических свойств соединения.

Попытки обосновать в более простой форме теорию построения механических фильтров делались в работах [7, 8]. При этом предполагалось, что рычаг является невесомым стержнем, что в определенной степени ограничило представления о наборе динамических свойств механических цепей и фильтров, в частности. В теории электрических цепей устройством, привносящим эффекты, аналогичные рычагу в механических цепях, рассматривается идеальный трансформатор. В частности, в работе [7] делается замечание о том, что введение трансформатора «разрывает», в определенном смысле, гальваническую цепь; при этом топология системы цепи меняется (можно понимать, что появляются некоторые пространственные формы связи). Представляется, что при переходе от механических систем (и цепей, в частности), состоящих из материальных точек, соединенных типовыми элементами (пружина, демпфер), к механическим системам, содержащим твердые тела в плоском движении (а также их сочленения), необходимо вводить в технологию построения математических моделей и в структуру самих моделей рычажные связи и соотношения, а также рычажные механизмы различного вида. Практически с этими вопросами приходится встречаться в динамике силовых передач, изучении расчетных схем и математических моделей редукторов, дифференциалов, коробок скоростей и др. Собственно, через рассмотрение динамики плоского взаимодействия и формируется методологическая платформа для изучения упругих колебаний в системах с пространственными твердыми телами.

**V. Некоторые предложения о понимании роли «плавающей опоры».** Прежде чем приступить к рассмотрению особенностей рычага с опорами, рассмотрим невесомый рычаг, у которого точка опоры не определена и является плавающей. Такой подход можно встретить, например, в работе [1]. Отметим, что если невесомый рычаг реализуется в соединении  $W_1$  и  $W_2$ , в которых движение  $W_1$  и  $W_2$  определяется конструктивными средствами, то рычаг может занимать произвольное положение только при наличии у одного из соединительных элементов кинематической пары IV класса, обеспечивающей вращение рычага относительно точки соединения элемента  $W_1$ , и еще одной кинематической пары, создающей возможность скольжения рычага вдоль своей оси. Если этого не будет, то рычаг заклинит движение. При рассмотрении малых движений рычага и элементов в невырожденных ситуациях, когда выполняются условия ( $l_1 = 0$ , или  $l_2 = 0$ ), стержень (рычаг без точки опоры) может передавать движение, формируя случайную конфигурацию взаимодействия между двумя граничными случаями. Первый – когда стержень, имеющий возможность скольжения по одной из кинематических пар, расположен перпендикулярно линиям движения  $W_1$  и  $W_2$ . Во втором случае, стержень находится в положении, близком к параллельному движению  $W_1$  и  $W_2$ . В этих случаях взаимодействие с помощью невесомого стержня с плавающей точкой опоры можно считать нереализуемым.

**VI. Соединение упругих элементов через рычаг 2-го рода.** Рассмотрим рычажную схему с рычагом 2-го рода, приведенную на рис. 7. Будем полагать, что  $J$ -момент инерции рычага относительно точки ( $2^0$ ). Найдём кинетическую и потенциальную энергии системы

$$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2. \quad (5)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} K_1 (y_2' - z_1)^2 + K_2 (y_2'')^2. \quad (6)$$

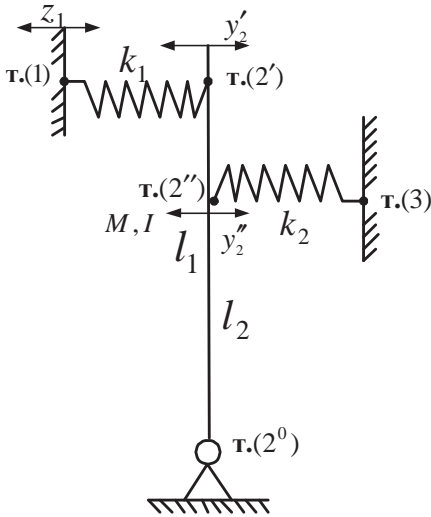


Рис. 7. Принципиальная схема соединения упругих элементов с рычагом второго рода.

Если  $\varphi$  – угол малого поворота рычага, то  $y_2' = \varphi l_1$ , а  $y_2'' = \varphi l_2$ , тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} K_1 (\varphi l_1 - z_1)^2 + K_2 (\varphi l_2)^2. \quad (7)$$

Запишем уравнение движения для системы на рис. 7:

$$J \ddot{\varphi} + K_1 l_1^2 \varphi - K_1 l_1 z_1 + K_2 l_2^2 \varphi = 0.$$

Или

$$J \varphi'' + \varphi (K_1 l_1^2 + K_2 l_2^2) = K_1 l_1 z_1. \quad (8)$$

Структурная схема системы имеет вид, как показано на рис. 8.

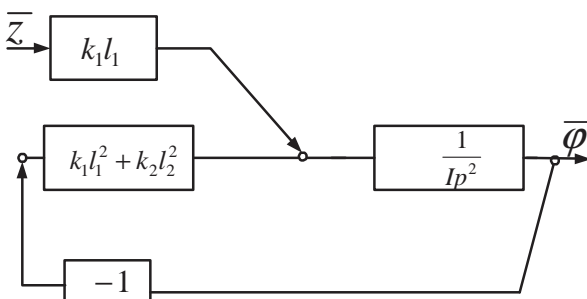


Рис. 8. Структурная схема системы, приведенной на рис. 7, в координатах  $\varphi$ .

Построим математическую модель системы, используя соотношение  $\varphi = \frac{y_2''}{l_2}$ , тогда кинетическая и потенциальная энергии системы примут вид:

$$T = \frac{1}{2} J \left( \frac{\dot{y}_2''}{l_2} \right)^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} (y_2' - z_1)^2 K_1 + \frac{1}{2} K_2 (y_2'')^2. \quad (8')$$

Примем, что  $y_2' = y_2'' \frac{l_1}{l_2}; i = \frac{l_1}{l_2}$ , и запишем выражение для потенциальной энергии:

$$\Pi = \frac{1}{2} K_1 (y_2'' i - z_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 (y_2'')^2. \quad (8'')$$

Тогда уравнение (8) преобразуется к виду

$$m_0 \ddot{y}_2'' + y_2'' (K_1 i^2 + K_2) = K_1 i z_1, \quad (9)$$

где  $\left( \frac{J}{l_2^2} = m_0 \right)$ .

Чтобы найти динамическую реакцию в точке контакта элемента  $K_2$  со стойкой, построим структурную схему (рис. 9).

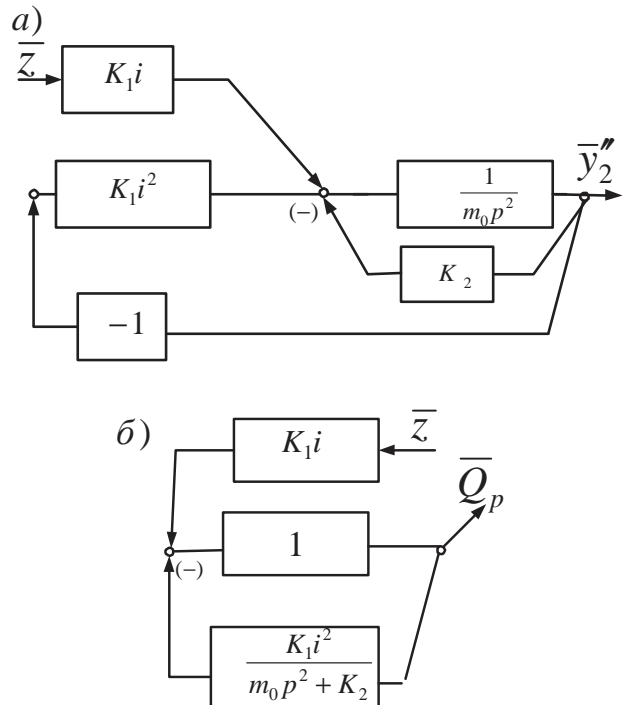


Рис. 9. Структурная схема системы, приведенной на рис. 8: а) общая схема; б) приведенная для определения динамической реакции в точке (3) –  $\bar{Q}_p$ .

Для определения приведенной жесткости необходимо найти динамическую реакцию  $Q_p$ , возникающую в точке (3), что можно сделать, используя схему на рис. 9б. Найдем передаточную функцию системы:

$$W(p) = \frac{\bar{Q}_p}{\bar{z}} = \frac{K_1 i (m_0 p^2 + K_2)}{m_0 p^2 + K_1 i^2 + K_2}. \quad (9')$$

Физический смысл  $|W(p)|$  заключается в том, что модуль выражения (9') является приведенной динамической жесткостью обобщенной промежуточной пружины ( $K_{дин}$ ). При  $p = 0$  динамическая жесткость превращается в статическую, обозначаемую как  $K_0$ . Для

определения условия взаимодействия в статике примем  $m_0 = \frac{J}{l_2^2} = 0$  и получим (при  $p = 0$ ), что

$$W_3(p) = \frac{\bar{Q}_p}{z} = \frac{K_1 i K_2}{K_1 i^2 + K_2}. \quad (10)$$

Отметим, что в данном случае наблюдается некоторая разновидность последовательного соединения. При  $i = 1$  – это соединение совпадает с последовательным для случая  $m = 0$  выражения (2), с чем можно вполне согласиться. При  $m = 0$  наблюдается соответствие в наших предположениях невесомому стержню; отметим, что при  $i = 1$  имеется также совпадение с выражением (10). Если  $i \neq 1$ , то статическая жесткость

$$K'_0 = \frac{K_1 i K_2}{K_1 i^2 + K_2} \quad (11)$$

зависит от передаточного отношения  $i$ . Если  $i = 0$ , то  $K'_0 = 0$ ; если  $i = 1$ , то  $K'_0 = K_0 = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$ , что соответствует рассмотренному выше случаю, когда  $W_1$  и  $W_2$  соединяются между собой при  $m = 0, p = 0$ . Величина  $i$ , как можно отметить, определяет границы, или меру изменения механической цепи в топологическом смысле. Для «подчеркивания» эффекта можно ввести такое понятие, как разность  $R$  приведенных жесткостей при наличии разности положения точек ( $2^{\circ}$ ), ( $2^{\circ}$ ):

$$R = l_2 - l_1. \quad (12)$$

Запишем в таком случае, что

$$\begin{aligned} R &= \frac{K_1 i K_2}{K_1 i^2 + K_2} - \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} = \frac{K_1^2 K_2 i - K_1^2 K_2 i^2}{(K_1 i^2 + K_2)(K_1 + K_2)} = \\ &= \frac{(K_1 K_2) [i^2 (K_2 - K_1) + K_1 i - K_2]}{(K_1 + K_2)(K_1 i^2 + K_2)} = \\ &= \frac{K_1 K_2 (K_1 i + K_2 i - K_1 i^2 - K_2)}{(K_1 + K_2)(K_1 i^2 + K_2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Физический смысл  $R$  заключается в том, что этот показатель определяется через  $i = \frac{l_1}{l_2}$ , то есть характеризует меру изменения положения линии действия сил в плоскости (условно это мера отражает появление двухмерности в расположении действия сил). Если  $i = 0$ , то промежуточный стержень (рычаг, в котором  $l = 0$ ) не участвует в передаче воздействия, а цепь распадается. Тогда, по сравнению с вариантом без стержня, можно получить  $R = \frac{-K_1 K_2}{K_1 + K_2}$ , чего и следовало ожидать. При  $l = 1$  получим, что  $R = 0$ , то есть, наличие стержня не изменяет ситуации по сравнению с отсутствием стержня. Если  $i \neq 0$  и  $i \neq 1$ , то имеет смысл вернуться к выражению (13), из которого можно найти и оценить топологические изменения при иных значениях  $i$  (исключая случай  $i = 0, i = 1$  и  $i = \infty$ ). Отметим, что

случай  $i = \infty$  соответствует  $l_2 = 0$ , что аналогично по физической сущности случаю  $l_1 = 0$ . Приведем (13) к виду:

$$R = \frac{(K_1 K_2) [i^2 (K_1 + K_2) - K_1 i^2 - K_2]}{(K_1 + K_2)(K_1 i^2 + K_2)}. \quad (14)$$

Из числителя (14) можно выделить уравнение относительно  $i$

$$i^2 - \frac{(K_1 + K_2)i}{K_1} + \frac{K_2}{K_1} = 0, \quad (15)$$

решая которое, можно найти

$$i_{1,2} = \frac{K_1 + K_2}{2K_1} \pm \frac{K_1 - K_2}{2K_1}. \quad (16)$$

Тогда  $i_1 = 1$ , а  $i_2 = \frac{K_2}{K_1}$ , откуда следует, что  $R$  может принимать значение  $R = 0$  не только при  $l = 1$ , но и при  $i = \frac{K_2}{K_1}$ .

Если исключить из рассмотрения значение  $i = 0, i = 1$  и  $i = \infty, i = \frac{K_2}{K_1}$ , то можно построить график  $R(i)$ , приняв для примера, что  $K_1 = 2K, K_2 = K$ , тогда

$$R = \frac{2K^2 [i^2 3K - 2Ki^2 - K]}{3K(2Ki^2 + K)} = \frac{2 \cdot 2K(-2i^2 + 3i - 1)}{3 \cdot 2i^2 + 1}. \quad (17)$$

На рис. 10 показан график зависимости  $R(i)$ , из которого следует (при исключении точек  $i = 0$  и  $i = \infty$ ), что при  $i = 0,5$  и  $i = 1$   $R$  принимает нулевое значение, а при возрастании  $i$  значение  $R$  стремится к некоторому пределу  $R = \frac{4}{3}K$  в отрицательной области.

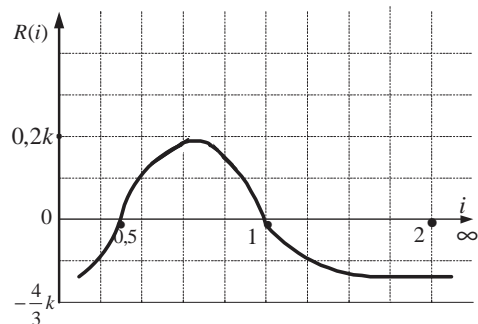


Рис. 10. График зависимости  $R(i)$ .

Но если  $i = 1$ , то при  $J = 0$  (невесомый рычаг) не реализуется такая функция, как разнесение взаимодействий по параллельным линиям, или формирование некоторого пространства взаимодействий.

**VII. Свойства приведенной жесткости с учетом приведенного отношения рычага.** Рассмотрим пример зависимости  $K_{пр}$ , когда

$$K_{np} = \frac{iK^2}{i^2K + K} = \frac{Ki}{i^2 + 1}. \quad (18)$$

Из рис. 11 следует, что если увеличить  $i$ , то возрастает разность между  $l_1$  и  $l_2$ . При этом  $y_2'' = y_2' \frac{1}{i}$ , то есть смещение  $y_2''$  становится меньше. При  $i = \infty$  точка (2'') будет связана с неподвижным центром, и на элемент  $k_2$  ничего не будет передаваться, что можно трактовать как превращение его в элемент с бесконечно большой жесткостью, тогда  $K_{np} = \frac{K_1 i K_2}{K_1 i^2 + K_2} = 0$ , что характерно для рассматриваемых условий закрепления.

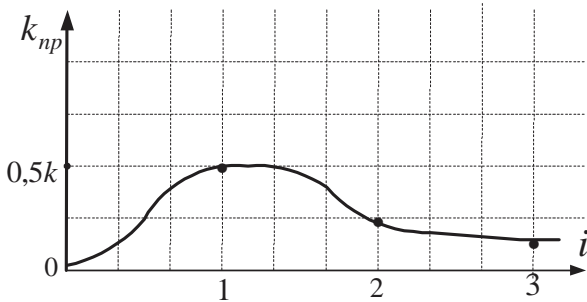


Рис. 11. График зависимости приведенной жесткости от  $i$ .

В свою очередь, если  $i = 0$ , то это возможно при  $l_1 = 0$ , когда элемент  $K_1$  упирается в неподвижную точку (центр вращения рычага, или такой точкой является мгновенный центр скоростей). В этом случае  $K_{np} = 0$ , а элемент  $S_2$  беспрепятственно движется. Цепь разрывается – приведенная жесткость равна нулю. Аналогичная ситуация происходит, если  $i = \infty$ , например  $l_2 = 0$ , – элемент  $S_2$  упирается в неподвижную точку, а элемент  $S_1$  начинает двигаться беспрепятственно. Рассматриваемые частные случаи реализуются только при  $J = 0$ ,  $m_0 = 0$ , при этом не учитывается и частота динамического процесса. Передаточное отношение в диапазоне  $0 < i < \infty$  выступает своеобразным регулятором приведенной жесткости, как это было показано на рис. 11 при  $K_1 = K = K_2$ . Если это условие нарушается, к примеру,  $K_1 = 10K$ ,  $K_2 = K$ , то  $K_{np} \approx 0,9K$ , то есть  $K_{np}$  изменяется от малых значений до практического совпадения с жесткостью одного из элементов, но не превышает его.

**VIII. Последовательное соединение с промежуточным твердым телом в виде рычага первого рода.** Будем предполагать, что в данном случае имеется аналогия в динамических процессах материальной точки на упругом подвесе с системой вращательного типа. Рассмотрим случай, в котором мгновенный центр скоростей расположен между точками (2') и (2'') по схеме, соответствующей рычагу первого рода (рис. 12). Как и ранее, будем полагать, что рычаг обладает моментом инерции  $J$ , а  $z$  – кинематическое возмущение. Найдем выражение для кинетической и потенциальной энергий:

$T = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2$ ;  $\Pi = \frac{1}{2} K_1 (y_2' - z)^2 + \frac{1}{2} K_2 y_2''^2$ , где выполняется ряд соотношений  $\varphi = \frac{y_2'}{l_1}$ ;  $\varphi = \frac{y_2''}{l_2}$ ;  $y_2' = \varphi \frac{l_1}{i}$ ;

$$y_2'' = y_2' i; \quad i = \frac{l_2}{l_1}.$$

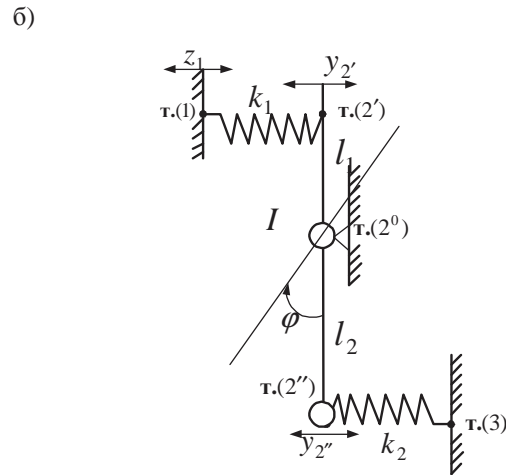
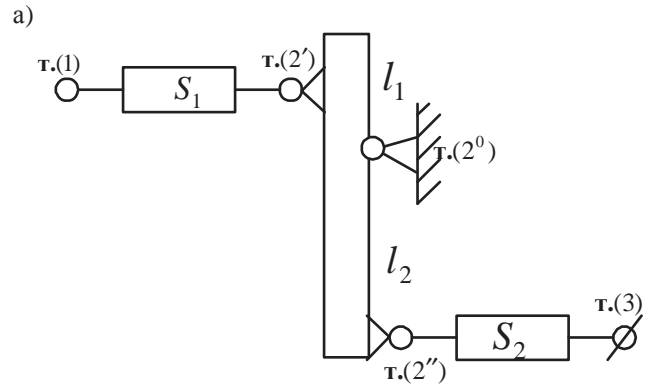


Рис. 12. Принципиальная схема последовательного соединения элементов  $S_1$  и  $S_2$  по схеме рычага 1-го рода: а) общая схема; б) упругие элементы.

Однако в данном случае имеется существенное отличие от предыдущего случая, так как скорости  $\dot{y}_2''$  и  $\dot{y}_2'$  имеют разные знаки. В общем случае можно полагать, что  $i = -\frac{l_2}{l_1}$  (и это имеет свои особенности и учитывается при динамических взаимодействиях в случае необходимости).

Пусть

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} K_1 \left( \frac{y_2''}{i} - z \right)^2 + \frac{1}{2} K_2 (-y_2'')^2 = \\ &= \frac{1}{2} K_1 \left( \frac{\varphi l_2}{i} - z \right)^2 + \frac{1}{2} K_2 (-\varphi l_2)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Для вывода уравнения движения учтем:

$$y_2 = \phi l_1; \quad y_2'' = \phi l_2; \quad y_2' = \frac{l_1}{l_2} y_2'; \quad i = \frac{l_1}{l_2}, \text{ тогда}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} K_1 (\phi l_2 i - z)^2 + \frac{1}{2} K_2 (\phi l_2)^2,$$

откуда

$$J \ddot{\phi} + \phi (K_1 l_2^2 i^2 + K_2 l_2^2) = z K_1 l_2 i. \quad (20)$$

Отметим, что  $\phi = \frac{y_2''}{l_2}$ , а  $m_0 = \frac{J}{l_2^2}$ , тогда (20) преоб-

разуется:

$$m_0 \ddot{y}_2'' + \ddot{y}_2 (K_1 i^2 + K_2) = z K_1 i. \quad (21)$$

Структурные схемы рассматриваемой системы представлены на рис. 13 (а, б).

Передаточная функция системы, полученная на основе схемы (рис. 13а), имеет вид:

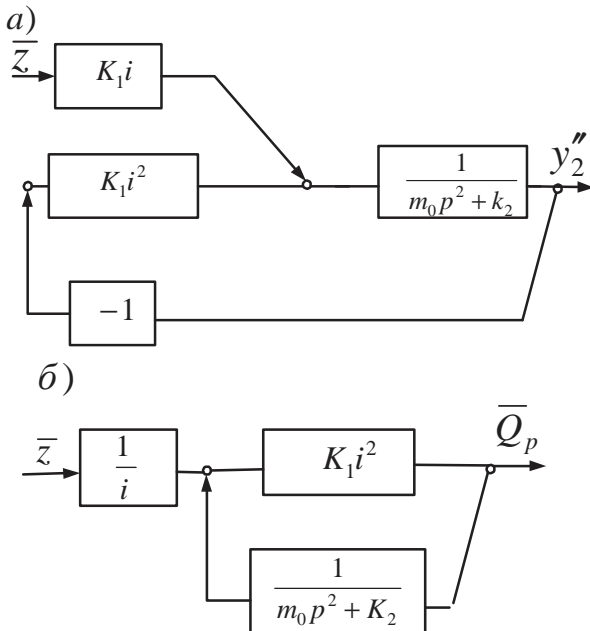


Рис. 13. Структурная схема системы:

а) координата  $y_2''$ ; б) для определения динамической реакции  $\bar{Q}_p$ .

$$W(p) = \frac{K_1 i (m_0 p^2 + K_2)}{m_0 p^2 + K_2 + K_1 i^2}. \quad (22)$$

Поскольку выражение (22) совпадает со структурой выражения (9'), то исследования возможных ситуаций будут иметь аналогичный характер, как для рычага 2-го рода. Рассмотрим частные случаи движения промежуточного твердого тела.

1) Поступательное прямолинейное движение.

В этом случае мгновенный центр скоростей находится в бесконечности. Поэтому коэффициент передачи смещения, ранее обозначенный как  $i$ , будет равен 1. При  $i = 1$  никаких изменений в характере взаимодействия элементов не происходит. Но если учитывается масса твердого тела (или рычага), то этот случай сводится к ранее рассмотренному

случаю взаимодействия через материальную точку.

2) Твердое тело совершает вращательное движение вокруг неподвижной точки, а поступательное движение отсутствует. В этом случае задача сводится к ранее рассматриваемым случаям весомого (или невесомого) рычагов первого и второго родов.

**IX. Заключение.**

1. В механических цепях соединения элементов (типовых элементарных звеньев) при реализации последовательных соединений могут использоваться некоторые промежуточные устройства; аналогичным образом в электрических цепях такими устройствами могут выступать, например, идеальные трансформаторы напряжения. Такие трансформаторы приводят к нарушению гальванической цепи, поскольку связь между напряжениями обмоток трансформатора осуществляется через электромагнитное поле. В трансформаторах это обеспечивается с помощью сердечников. То же самое происходит и в механических цепях, в частности, при последовательном соединении элементов типового расширенного набора звеньев. Физической формой такого устройства может выступать невесомый (или весомый) стержень, имеющий точку вращения. Использование подобных устройств в реализации последовательных соединений в приложении к механическим цепям позволяет изменить метрику системы, то есть формировать систему сил как минимум в плоскости.

2. В механических цепях устройства промежуточной связи при малых массоинерционных параметрах (невесомые стержни) выполняют кинематические функции, что позволяет изменить приведенные параметры механических цепей. Последнее может распространяться и на другие комбинации последовательных соединений из разных типов однородных элементов [2, 3].

3. Рычажные соединения позволяют ввести в рассмотрение обобщенную процедуру определения параметров последовательного соединения двух элементов. В общей форме обеспечения кинематического взаимодействия управляющим параметром является передаточное отношение рычага; при  $i = 1$  обобщенная процедура сводится к обычной.

4. Предлагаемый подход может рассматриваться как методологическая основа учета в динамических расчетах свойств реальных узлов, агрегатов и передач различных машин, поскольку любые виды подвижных соединений в конструктивных реализациях часто являются достаточно сложными, многозвенными механизмами и устройствами.

5. Наличие в развитых механических системах звеньев в виде твердых тел, имеющих соединения, делает перспективным направление исследований особенностей рычажных связей, рассмотренных выше, но при наличии точки опоры, принадлежащей движущему звену.

Литература



## References

1. Дружинский И.А. Механические цепи. М.: Машиностроение, 1977. 238 с.
2. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П. Мехатронные подходы в динамике механических колебательных систем. Новосибирск: Наука, 2011. 394 с.
3. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядько А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов: сборник статей Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2008. 523 с.
4. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Упырь Р.Ю. Устройство для гашения колебаний: пат. 84487 Рос. Федерация. опубл. 10.07.09, Бюл. № 19.
5. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1980. 640 с.
6. Крайнев А.Ф. Справочник – словарь по механизмам. М.: Машиностроение, 1988. 476 с.
7. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Фомина И.В. Задачи управляемости и наблюдаемости в системах вибрационной защиты // Информационные технологии в науке и управлении: тр. XIV Байкальской Всерос. конф. Иркутск, 2009. Т.1. С. 81–91.
8. Белокобыльский С.В., Ситов И.С. Способы и средства изменения динамического состояния технологического комплекса для вибрационного заглаживания // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 2 (13). С. 46-52.
1. Druzhinsky I.A. Mechanical chains. M.: Mashinostroeniye, 1977. 238 p.
2. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P. Mechatronic approaches to mechanical oscillation systems dynamics. Novosibirsk: Nauka. 2011. 394 p.
3. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Khomenko A.P., Zasyad'ko A.A. Dynamic synthesis in the generalized problems of technical objects vibroprotection and vibroinsulation: Irkutsk: Izd-vo Irk. gos. un-ta, 2008. – 523 p.
4. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Upyr' R.Yu. Device to damp oscillations: pat. 84487 Russian Federation.; opubl. 10.07.09, Byul. № 19..
5. Loityansky L.G., Lur'ye A.I. Course in theoretical mechanics. M.: Nauka, 1980. 640 p.
6. Kraynev A.F. Reference-book on machinery. M.: Mashinostroeniye, 1988. 476 p.
7. Eliseev S.V., Reznik Yu.N., Fomina I.V. Controllability and observability in vibroprotection systems. // Informatsyonnye tekhnologii v nauke i upravlenii: Trudy XIV Baikal'skoy Vserossiyskoy konferentsii. Irkutsk. T. 1. 2009. P. 81-91.
8. Belokobyl'sky S.V., Sitov I.S. Ways and means to change the dynamic state of the technological complex for vibration smoothing // Sovremennye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. IrGUPS. Vyp. №2 (13). - Irkutsk. IrGUPS. 2007. P. 46-52.

УДК 62.752

## Особенности оценки устойчивости системы с электродинамической связью при внутреннем сопротивлении, стремящемся к нулю

С.В. Белокобыльский<sup>1</sup>, С.В. Елисеев<sup>2</sup>, В.Б. Кашуба<sup>1</sup>, А.А. Савченко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Братский государственный университет, Макаренко 40, Братск, Россия. E-mail: plemja@rambler.ru

<sup>2</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения, Чернышевского 15, Иркутск, Россия.

Статья поступила 15.01.2012, принята 04.05.2012

*В статье представлены результаты исследования особенностей устойчивости систем с обратной отрицательной и положительной связью. Рассмотрен метод оценки устойчивости конкретных классов передаточных функций. Определены варианты последовательностей режимов работы системы при непрерывном изменении внутреннего сопротивления. Рассмотрены вопросы оценки устойчивости системы при стремлении параметра внутреннего сопротивления к нулю для определенных типов передаточных функций, где в качестве объекта исследования выступает электродинамическая опора. Определены несколько пороговых значений вязкого сопротивления, которые будут гарантировать устойчивость системы с учетом различного набора параметров, характеризующих систему. Доказано, что устойчивость системы может быть оценена без учета коэффициента приведенной жесткости. Для некоторых систем при стремлении коэффициента вязкого сопротивления к нулю происходит переход в неустойчивое состояние, либо изменение коэффициента вязкого сопротивления не может привести систему в неустойчивое состояние. При непрерывном изменении коэффициента вязкого сопротивления системы с передаточными функциями проходят различные режимы работы. Последовательность прохождения различных режимов определяется параметрами системы.*

**Ключевые слова:** электродинамическая связь, отрицательная обратная связь, положительная обратная связь, устойчивость системы, передаточная функция системы.

## Stability estimation characteristics of the system with electrodynamic link under vanishing internal resistance parameter

S.V. Belokobyl'sky<sup>1</sup>, S.V. Eliseev<sup>2</sup>, V.B. Kashuba<sup>1</sup>, A.A. Savchenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Bratsk State University, 40, Makarenko str., Bratsk, Russia. E-mail: plemja@rambler.ru

<sup>2</sup>Irkutsk State University of Railway Engineering, 15, Chernyshevskogo str., Irkutsk, Russia.

Received 15.01.2012; Accepted 4.05.2012