УДК 531.43; 621.891

Изменение экспоненты кривой разгрузки при сферическом индентировании

П.М. Огар[1], В.А. Тарасов[1], А.В. Турченко[1]

[1]Братский государственный университет, Макаренко 40, Братск, Россия, E-mail: ogar@brstu.ru
Статья поступила 10.01 2012, принята 1.05.2012

На основании математического описания кинетического индентирования упругопластического полупространства сферой радиусом R определен показатель степени m *кривой разгрузки. Показано, что значение* m *определяется соотношением* h/R, *где* h *– величина внедрения от исходной поверхности, и параметром* $c^2 = h_c/h$, *где* h_c *– контактная глубина. Используя результаты конечно-элементного моделирования, параметр* m *представлен в виде функционала* $m(\varepsilon_y, n, h/R)$, *зависящего от свойств материала: предела текучести, контактного модуля упругости, экспоненты упрочнения и относительной глубины внедрения* h/R. *Значение* $m = 1{,}5$ *при* $h/R = 0$ *и с ростом* h/R *монотонно уменьшается, на 15 % при* $h/R = 0{,}4$. *Полученные результаты были использованы при расчетах упругопластического контактного взаимодействия. Проведено сравнение кривых нагрузки-перемещения, рассчитанных для* $m = 1{,}5$ *и* $m = m(\varepsilon_y, n, h/R)$.

Ключевые слова: сферический индентор, упругопластический контакт, кинетическое индентирование, кривая разгрузки, механика контактного взаимодействия.

Changes of unloading curve exponent under a spherical indentation

P.M. Ogar[1], V.A. Tarasov[1], A.V. Turchenko[1]

[1]Bratsk State University, 40, Makarenko str., Bratsk, Russia. E-mail: ogar@brstu.ru
Received 10.01.2012; Accepted 1.05.2012

Based on the mathematical description of an elastic-plastic half-space kinetic indentation with a sphere having radius R, the unloading curve index m has been determined. It has been demonstrated that the value of m is determined by the h/R ratio, where h is the penetration value relative to the reference surface, and by the $c^2 = h_c/h$ *parameter, where* h_c *is the contact depth. Using the results of the finite-element modeling, the parameter m has been presented in the form of a functional m* $(\varepsilon_y$*, n, h/R) depending on the properties of the material: yield point, contact modulus of elasticity, hardening exponent and relative depth of indentation h/R. The value of m is 1.5 when h/R=0, and when h/R rises, it is steadily decreasing by 15% when h/R=0.4. The obtained results were used to calculate the elastic-plastic contact interaction. The comparison of the load-travel curves calculated for m=1.5 and m= m* $(\varepsilon_y$*, n, h/R) has been carried out.*

Keywords: spherical indenter, elastic-plastic contact, kinetic indentation, unloading curve, contact interaction mechanics.

Вопросы контактного взаимодействия сферы с упругопластическим полупространством весьма актуальны и находят применение в областях трибомеханики, поверхностно-пластического деформирования, определения механических свойств и др. Инженерные методы определения характеристик контакта и их развитие подробно изложены авторами в работе [1]. В последнее время для описания контактного взаимодействия сферы с упругопластическим полупространством используется диаграмма кинетического индентирования [1], для построения которой фиксируются кривые нагрузки-перемещения при нагружении и разгрузке индентора (рис. 1). При этом снимаются четыре важных параметра: максимальная нагрузка $P_{\max}$, максимальное перемещение $h_{\max}$, контактная жесткость на начальном участке ветви разгружения $S = dP/dh$ и остаточная глубинна h_f проникновения индентора после того, как он полностью разгружен.

Максимальное контактное давление, при котором начинается пластическая деформация, можно представить в виде:

$$p_0 = K_y \sigma_y ,$$

где K_y – константа, σ_y – предел текучести.

При использовании критерия максимального касательного напряжения Треска, когда пластические деформации зарождаются в приповерхностной области, для значения коэффициента Пуассона $\mu = 0{,}3$.

Используя соотношение теории Герца для критической нагрузки P_y и соответствующей ей деформации h_y, в [1] получено:

$$\frac{P_y}{R^2 E^*} = \frac{K_y{}^3 \pi^3 \varepsilon_y{}^3}{6}\,; \tag{1}$$

$$\frac{h_y}{R} = \frac{K_y{}^2 \pi^2 \varepsilon_y{}^2}{4}\,, \tag{2}$$

где $\varepsilon_y = \sigma_y \big/ E^*$; $E^* = E \big/ \left(1 - \mu^2\right)$, E – модуль упругости; R – радиус индентора.

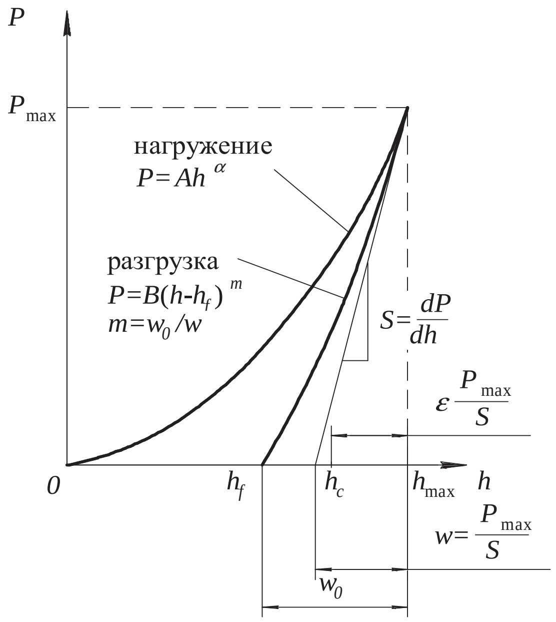

Рис. 1. Диаграмма кинетического индентирования материала.

Для большинства конструкционных металлов, применяемых в машиностроении, $\varepsilon_y = 0{,}0005\ldots0{,}005$, следовательно,

$$P_y\Big/\left(R^2E^*\right)= 2{,}7\cdot10^{-9}\ldots2{,}7\cdot10^{-6};$$

$$h_y\Big/R=1.6\cdot10^{-6}\ldots1.6\cdot10^{-4}.$$

Применительно к задачам трибомеханики приведенные данные свидетельствуют об упругопластическом деформировании неровностей шероховатых поверхностей.

При $P_{\max} >> P_y$ ветвь нагружения можно описать уравнением

$$P = Ah^{\alpha}, \qquad (3)$$

а ветвь разгрузки:

$$P = B\left(h - h_f\right)^m, \qquad (4)$$

где A, B – константы; α, m – показатели степени.

Процесс упругопластического взаимодействия описывается уравнением

$$\sqrt{h_c^*}\left(h-h_f\right)=\frac{mP}{2\sqrt{2R}E^*}, \qquad (5)$$

где h_c^* – контактная глубина за счет упругого продавливания, определяемая выражением [2]

$$h_c^* = h - \frac{\varepsilon P}{S} = h - \frac{\varepsilon}{m}\left(h - h_f\right), \qquad (6)$$

где $\varepsilon \approx 0{,}75$ для сферического индентора. Для более точных расчетов $\varepsilon = \varepsilon(m)$ и определяется согласно [2].

Представим выражение (6) в виде

$$h_c^* = h_f\left(\left(1-\frac{\varepsilon}{m}\right)\frac{h}{h_f}+\frac{\varepsilon}{m}\right). \qquad (7)$$

Тогда из (5) получим

$$\left(\left(1-\frac{\varepsilon}{m}\right)\frac{h}{h_f}+\frac{\varepsilon}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{h}{h_f}-1\right)=\frac{m\theta P}{2\sqrt{2R}\,h_f^{1,5}}. \qquad (8)$$

Обозначим

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{m}\right)\frac{h}{h_f}+\frac{\varepsilon}{m}=y^2, \qquad (9)$$

откуда

$$\frac{h}{h_f}=\frac{y^2-\varepsilon/m}{1-\varepsilon/m}, \qquad (10)$$

$$\frac{h}{h_f}-1=\frac{y^2-1}{1-\varepsilon/m}. \qquad (11)$$

Подставляя выражения (9) и (11) в (8), имеем

$$y^3-y-\frac{\theta P(m-\varepsilon)}{2\sqrt{2R}h_f^{1.5}}=0. \qquad (12)$$

Для анализа выражения (12) используем подобие деформационных характеристик [1]

$$P = KP_y,\ \ h_f = h_0 = \frac{P_y(K-1)}{2\pi RK_h\sigma_y}. \qquad (13)$$

Подставляя выражения (1) и (13) в (12), имеем

$$y^3-y-\frac{6^{0,5}K(m-\varepsilon)}{(K-1)^{1,5}}\left(\frac{K_h}{K_y}\right)^{1,5}=0. \qquad (14)$$

Полученное выражение характеризуется степенью нагружения K и безразмерными параметрами: m, ε, K_y и K_h. Решение данного уравнения:

$$y_k = \sqrt[3]{-\frac{p}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{p}{2}-\sqrt{D}}; \qquad (15)$$

$$D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3; \qquad (16)$$

$$p=-1,\ q=-\frac{6^{0,5}k(m-\varepsilon)}{(k-1)^{1,5}}\left(\frac{K_h}{K_y}\right)^{1,5}. \qquad (17)$$

Имея решение y_k уравнения (13), находим глубину внедрения индентора

$$h=h_0\,\frac{y_k^2-\varepsilon/m}{1-\varepsilon/m}. \qquad (18)$$

Практический интерес для описания упругопластического взаимодействия вызывает определение параметра m. Согласно работе [3],

$$m = \frac{w_0}{w}. \qquad (19)$$

Значение m можно определить экспериментальным путем, имея диаграмму кинетического индентирования, или аналитически, используя математические выражения, описывающие кривые нагружения и разгрузки, и опубликованные результаты конечно-элементного анализа для внедрения сферы в упрочняемое упругопластическое полупространство.

Допустим, что нагружение индентора описывается уравнением (3). В этом случае, согласно работе [1], распределение давления на площадке контакта радиусом a описывается выражением

$$p(r) = p_m(1+\beta)\left(1 - r^2/a^2\right)^{\beta}, \qquad (20)$$

где $\beta = \alpha - 1$, p_m – среднее давление на площадке контакта, $p_m = P/\left(\pi a^2\right)$.

При повторном нагружении разгруженной лунки нагрузкой вида (20) величина перемещения

$$h = w_0 = \frac{PK_{\beta 0}}{\pi a E^*}, \qquad (21)$$

где $K_{\beta 0} = (1+\beta)2^{2\beta+1}\mathrm{B}(1+\beta, 1+\beta)$, $\mathrm{B}(1+\beta, 1+\beta)$ – бета функция.

С учетом того, что $h_c = c^2 h$, радиус площадки контакта равен

$$a = \sqrt{2Rc^2h - c^4h^2}. \qquad (22)$$

Из выражения (21) с учетом (22)

$$\frac{dP}{dh} = \frac{\pi E^*}{K_{\beta 0}} \cdot \frac{ch\left(3R - 2c^2h\right)}{\left(2Rh - c^2h^2\right)^{0,5}}. \qquad (23)$$

Учитывая, что $w = P/S$, из выражения (19) имеем

$$m = \frac{w_0}{P} \cdot \frac{dP}{dh} = \frac{K_{\beta 0}}{\pi E^* c\left(2Rh - c^2h^2\right)^{0,5}} \cdot \frac{\pi E^*}{K_{\beta 0}} \cdot \frac{ch\left(3R - 2c^2h\right)}{\left(2Rh - c^2h^2\right)^{0,5}},$$

$$m = \frac{3 - 2c^2\, h/R}{2 - c^2\, h/R}. \qquad (24)$$

Следовательно, параметр m при кинетическом идентировании сферой не зависит от распределения нагрузки на площадке контакта, а зависит от параметра c^2 и относительной величины $h/$R.

В работе [4] параметр c^2 описывается полиномиальными функциями, полученными в результате конечно-элементного анализа

$$c^2\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}\right) = \frac{h_c}{h} = \sum_{i=0}^{1} f_{ci}\left(\varepsilon_y, n\right) \cdot \ln\left(0,5\bar{h}\right)^{\,i}, \qquad (25)$$

$$f_{ci}\left(\varepsilon_y, n\right) = \sum_{j=0}^{4}\left[\sum_{k=0}^{3}\left(a_{ijk}\varepsilon_y^k\right) \cdot n^j\right],$$

где $\varepsilon_y = \sigma_y/E$, $\bar{h} = h/R$.

Значения 40 коэффициентов a_{ijk} получены для $\varepsilon_y = 0,001...0,004$, $n = 0...0,2$ и $\bar{h} = 0...0,12$.

Авторы [5] в результате конечно-элементного моделирования для сферического индентирования получили

$$c^2 = \frac{h_c}{h} = M^{2/N}\left(2\bar{h}\right)^{(2-N)/N}, \qquad (26)$$

где $M = \dfrac{\left(1,45 + 28,55n + 1745\varepsilon_y\right)\left(1 - 0,5n + 20\varepsilon_y\right)}{\left(1 + 21,4n + 1020\varepsilon_y\right)\left(1 + 0,4n + 60\varepsilon_y\right)}$,

$$N = \frac{\left(1,9 + 12,5n + 5705\varepsilon_y\right)\left(1 + 0,1n\right)}{\left(1 + 6,8n + 340\varepsilon_y\right)}.$$

Вышеприведенные выражения справедливы для $\varepsilon_y = 0,0005...0,03$, $n = 0...0,4$, $\bar{h} = 0...0,4$.

Как следует из выражений (25) и (26), параметр m также может быть представлен в виде функционала

$$m\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}\right) = \frac{3 - 2c^2\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}\right)\bar{h}}{2 - c^2\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}\right)\bar{h}}. \qquad (27)$$

На рис. 2 показано влияние параметров ε_y, n, $\bar{h}$ на величину m при использовании зависимости (27).

Как следует из рис. 2, при h/R = 0 значение m = 1,5. С ростом h/R значение m монотонно уменьшается. При h/R = 0,3 уменьшение составляет до 10 %, при h/R = 0,4 – до 15 %. Возникает вопрос – как влияет уменьшение значения m на величину h в сравнении с постоянным значением m = 1,5?

При постоянном значении m величина h определяется выражением (18) после решения уравнения (14). При этом величина усилия $P = P_yK$.

В случае, когда $m = m\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}\right)$, определение зависимости P–h затруднительно, так как m зависит от h. Тогда используем следующее уравнение, полученное из выражения (18) с учетом (13):

$$\bar{P}_y \frac{K-1}{2\pi\varepsilon_y K_h\left(\varepsilon_y, n\right)} \cdot \frac{Y_k\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}, K\right)^2 - Em\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}\right)}{1 - Em\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}\right)} = \bar{h}, \qquad (28)$$

где $\bar{P}_y = \dfrac{P_y}{R^2E^*}$, $Em\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}\right) = \dfrac{\varepsilon\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}\right)}{m\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}\right)}$.

Далее используем следующий алгоритм:

– с определенным шагом $\Delta\bar{h}$ задаемся значениями $\bar{h}_i$;

– по выражениям (17), (16) и (15) последовательно определяем функционалы $q = q\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}_i, K_i\right)$, $D = D\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}_i, K_i\right)$ и $Y_k = Y_k\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}_i, K_i\right)$;

– $Y_k = Y_k\left(\varepsilon_y, n, \bar{h}_i, K_i\right)$ подставляем в (28);

– при данном $\bar{h}_i$ решаем уравнение (28) относительно K_i;

– находим $\overline{P}_i = \overline{P}_y \cdot K_i$;

– строим зависимость $\overline{P} - \overline{h}$.

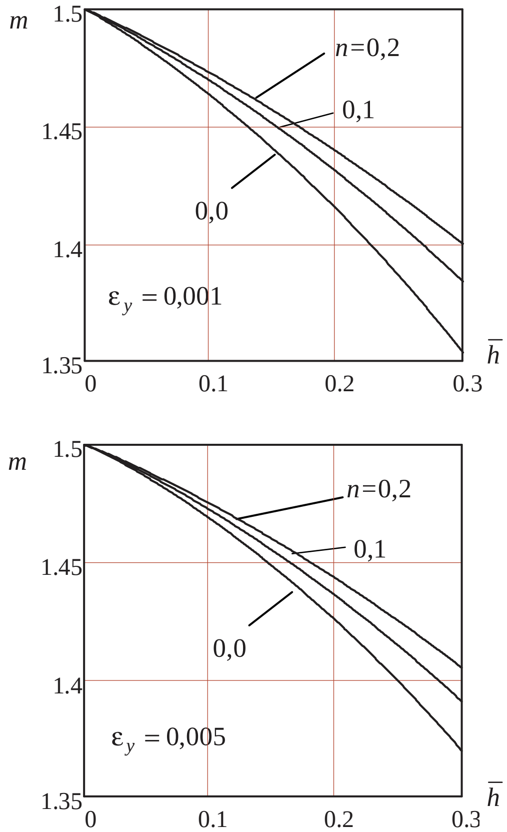

Рис. 2. Зависимости $m(\overline{h})$ при разных значениях ε_y, n.

Как показал анализ полученных зависимостей $\overline{P} - \overline{h}$ для $m = 1,5$ и $m(\varepsilon_y, n, \overline{h})$ для $\overline{h} < 0,4$, они практически совпадают (отличия составляют около 2 %), несмотря на снижение значений m на 15 %. Это можно объяснить тем, что в области ограниченной упругопластичности при $\overline{h}$, близких к $\overline{h}_y$, значения m близки к 1,5. В области развитой упругопластичности значения m уменьшаются на 15 %, однако в этой области доля упругой деформации составляет незначительную часть от общей деформации, а параметр m – показатель степени кривой разгрузки – характеризует именно упругую деформацию.

Таким образом, при расчетах контактных характеристик для упругопластического внедрения сферы целесообразно, без особой потери точности расчетов, использовать постоянное значение $m = 1,5$.

Литература

1. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Развитие инженерных расчетов характеристик контакта жесткой сферы с упругопластическим полупространством // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 1(23). С.80–87.

2. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // Journal of Materials Research. 2004. Vol. 19, № 1. P. 3–20.

3. Булычев С.И. Переход от диаграмм вдавливания к диаграммам растяжения с учетом упрочненного поверхностного слоя // Деформация и разрушение материалов. 2010. №2. С.43–48.

4. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to sphericalindentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids 2005. №53. P. 2037–2069.

5. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., Mauvoisin G., El Abdi R. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. №43. P. 4136–4153.

References

1. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Elaboration on engineering calculation for contact characteristics of a rigid sphere and elastic-plastic half-space // Sovremennye tekhnologii. Sistemny analiz. Modelirovaniye. 2012. № 1(23).P.80–87.

2. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // Journal of Materials Research. 2004. Vol. 19, № 1. P. 3–20.

3. Bulychev S.I. Transition from indentation diagrams to stress-strain diagrams taking into consideration hardened surface layer // Deformatsiya i razrusheniye materialov. 2010. №2. P. 43–48.

4. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to sphericalindentation techniques for material property evaluation // J. Mech. Phys. Solids 2005. №53. P. 2037–2069.

5.Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., Mauvoisin G., El Abdi R. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // International Journal of Solids and Structures. 2006. №43. P. 4136–4153.