

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОВЕДЕНИЯ

УДК 531.43; 621.891

Геометрия контакта при упругопластическом внедрении сферической неровности

П.М. Огар^{1*}, В.А. Тарасов¹, А.В. Турченко¹¹Братский государственный университет, Макаренко 40, Братск, Россия
Статья поступила 15.09.2011, принята 20.02.2012

Рассмотрено внедрение сферической неровности в упругопластическое полупространство, которое сопровождается эффектами «pile-up/sink-in», т. е. выдавливанием материала вокруг неровности (образованием навала) и упругим продавливанием материала. Показана эволюция исследований указанных эффектов. На основе подобия деформационных характеристик получены выражения для определения глубины вдавливания h и упругой части контактной глубины h_c^ в зависимости от степени нагруженности. При этом учтено влияние характеристик упрочняемого материала - предела текучести σ_y и экспоненты упрочнения n . Общая контактная глубина h_c^* определена с учетом глубины h_{pile}^* , образованной за счет навала. Радиальная граница навала определена из равенства вытесненного объема разгруженной лунки, находившегося ниже исходной поверхности, и объема навала выше исходной поверхности. Получены выражения для описания профиля навала для разгруженной лунки и деформации поверхности при упругом вдавливании. Они использованы для определения объема зазора, приходящегося на одну сферическую неровность шероховатой поверхности.*

Ключевые слова: упругопластический контакт, сферическая неровность, pile-up, sink-in, экспонента упрочнения, профиль деформируемой поверхности.

Contact geometry in the process of the elastic-plastic indentation of a spherical asperity

P.M. Ogar^{1*}, V.A. Tarasov¹, A.V. Turchenko¹¹Bratsk State University, 40, Makarenko str., Bratsk, Russia
Received 15.09.2011; Accepted 20.02.2012

The indentation of a spherical asperity into elastic-plastic half-space which is followed by «pile-up/sink-in» effects, i.e. material pressing-out round the asperity (pile-up formation) and its elastic forcing through, has been discussed. The development of the stated effects has been demonstrated. Based on the similarity of deformation characteristics, the expressions for the determination of the indentation depth h and the elastic member contact depth h_c^ depending on the loading have been obtained. The compactable material characteristics impact has been taken into consideration: yield strength σ_y and strain-hardening exponent n . The total contact depth h_{pile}^* formed as a result of piling-up has been estimated. The radial pile-up boundary has been estimated as an equality of the discharged indentation displaced volume below the reference surface and the pile-up volume above the reference surface. The expressions describing the pile-up profile for the discharged indentation and the surface deformation under the elastic indentation have been obtained. They have been used to determine clearance size per one spherical asperity of rough surface.*

Keywords: elastic-plastic contact, spherical asperity, pile-up, sink-in, strain-hardening exponent, deformable surface profile.

Создание конкурентоспособных уплотнительных соединений предполагает оптимальное сочетание их конструктивных параметров, чтобы основные требуемые свойства – прочность, герметичность и долговечность обеспечивались минимальным усилием герметизации, что обеспечит минимальные массогабаритные характеристики [1, 2]. Герметичность соединений определяется контактными характеристиками трибосопрежений – плотностью затворов в стыке, относитель-

ной площадью контакта, распределением пятен контакта по величине, возможностью их слияния [3, 4, 5, 6].

При определении контактных характеристик трибосопрежений широко используется дискретная модель шероховатости, в которой микронеровности (далее неровности) представлены в виде сферических сегментов, распределение которых по высоте соответствует опорной кривой профиля. Объем зазоров в стыке определяется суммарным объемом зазоров, приходящихся на одну неровность, который определяется геометрией контакта - глубиной внедрения неровности h , контактной глубиной h_c и профилем деформируемой поверхности. Если

* E-mail address: ogar@brstu.ru

для упругого контакта неровностей задача определения плотности зазоров решена, в том числе при взаимном влиянии неровностей [4, 5, 6, 7], то для упругопластического контакта такое решение отсутствует. Целью данной работы является определение геометрии контакта при внедрении жесткой сферической неровности в упругопластическое полупространство.

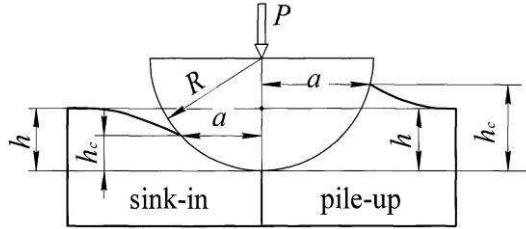


Рис. 1. Схема эффектов «pile-up/sink-in».

Внедрение сферической неровности связано с выдавливанием вокруг нее материала (образованием навала) и продавливанием материала за счет упругой деформации (рис. 1). В зарубежной литературе указанные явления называют эффектами «pile-up/sink-in».

Упругая область. При упругом контакте относительный радиус контакта a/R определяется из следующего выражения [8]:

$$\frac{P}{ER^2} = 0,5 \left(1 + (a/R)^2 \right) \ln \frac{1+a/R}{1-a/R} - a/R, \quad (1)$$

где P – усилие вдавливания; R – радиус сферы; $E^* = E/(1-\nu^2)$, E и ν соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Относительная величина внедрения h/R описывается выражением:

$$h/R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{R} \cdot \ln \frac{1+a/R}{1-a/R}. \quad (2)$$

Учитывая, что $h_c = R - \sqrt{R^2 - a^2}$, для h_c/h имеем

$$\frac{h_c}{h} = \frac{1 - \sqrt{1 - (a/R)^2}}{\frac{a}{2R} \ln \frac{1+a/R}{1-a/R}}. \quad (3)$$

Из представленной зависимости (3) следует, что для $a/R \leq 0,4$ $\frac{h_c}{h} \approx 0,5$, поэтому для определения параметров при упругом контакте, вместо сферы, удобно использовать выражение для параболоида вращения [9]:

$$\frac{P}{E^*R^2} = \frac{4}{3} \left(\frac{a}{R} \right)^3; \quad \frac{h}{R} = \left(\frac{a}{R} \right)^2; \quad \frac{h_c}{h} = 0,5. \quad (4)$$

Перемещение поверхности при упругом контакте для $r \geq a$, согласно [10], определяется из выражения

$$\frac{u_z E^*}{a p_m} = \frac{a}{r^2} F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{a^2}{r^2} \right), \quad (5)$$

где $p_m = \frac{P}{\pi a^2}$ – среднее давление на площадке контакта;

${}_2F_1(a, b; c; x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

В случае, когда на геометрию контакта оказывает взаимное влияние неровностей, следует использовать результаты работы [7].

Упругопластическая область. Первым описал поведение материала в упругопластической области Майер (1908 г.), который связал нагрузку P с диаметром отпечатка d законом [11]

$$P = Ad^m, \quad (6)$$

который часто представляемым в виде:

$$\frac{P}{\pi a^2} = A^* \left(\frac{d}{R} \right)^n, \quad (7)$$

где $n = m - 2$; m , A и A^* – константы, причем A^* имеет размерность напряжения.

Выражение в левой части представляет собой давление на площадке контакта, которое называют твердостью по Майеру.

$$\frac{P}{\pi a^2} = p_m = HM. \quad (8)$$

В дальнейшем Norbury и Samuel (1928 г.) впервые обратили внимание на эффекты «pile-up/sink-in» при измерении твердости по Бринеллю. Отношение величин s/h , где $s = h_c - h$, они связали со способностью материалов к упрочнению, т.е. со значением константы n из (7) [12].

Учитывая, что для широкого спектра материалов истинное напряжение при одноосной деформации описывается степенным законом

$$\sigma = k\varepsilon^n, \quad (9)$$

где k – коэффициент, ε – пластическая деформация, n – экспонента упрочнения, Matthews (1980 г.) предложил следующее выражение для $a/R = 0,4 \dots 0,8$ [13]:

$$\frac{s}{h} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{n}{2} \right)^{2 \left(\frac{1-n}{n} \right)}. \quad (10)$$

Теоретически изучая твердость по Бринеллю с помощью конечно-элементного анализа Hill. с соавторами (1989 г.) предложили новый параметр

$$c^2 = \frac{h_c}{h} = \frac{5}{2} \left(\frac{2-n}{n+4} \right), \quad (11)$$

включающий только экспоненту упрочнения [14].

Дальнейшее развитие исследований эффектов «pile-up/sink-in» было связано с совершенствованием метода измерения твердости и модуля упругости, разработанного в 1992 г. Оливером и Фарром [15] и адаптированного для определения характеристик на микро- и наноуровне. На его основе был разработан стандарт ISO 14577:2002 Материалы металлические. Определение твердости и других параметров материалов инструментальным методом вдавливания.

В основу метода положено выражение для контактной жесткости, полученное Бульчевым с соавторами (1975 г.), впервые предложившими кинетическое индентирование материалов (рис. 2) с целью определения их механических свойств. Согласно [16, 17], контактная жесткость

$$S = \frac{dP}{dh} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} E^* \sqrt{A}, \quad (12)$$

где A – площадь проекции контакта; E^* – контактный модуль упругости:

$$E^* = \left(\frac{1 - \nu_{ind}^2}{E_{ind}} + \frac{1 - \nu^2}{E} \right)^{-1},$$

ν_{ind} , E_{ind} и ν , E – соответственно упругие свойства индентора и материала.

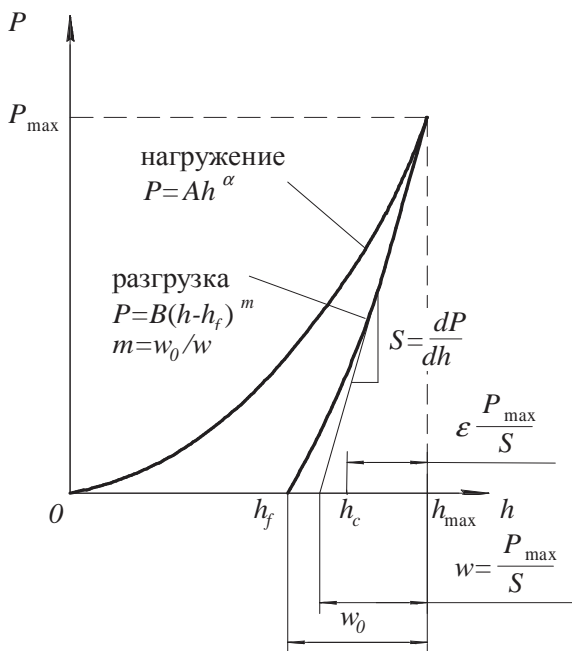


Рис. 2. Схема кинетического индентирования материала.

В предложенном [15] методе твердость и модуль упругости определялись выражениями:

$$H = \frac{P}{A}; \quad E^* = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \cdot \frac{S}{\sqrt{A}}, \quad (13)$$

где $\beta \approx 1,05$ – корректирующий коэффициент.

Как следует из выражений (13), особое внимание должно уделяться точности определения площади проекции отпечатка, так как пренебрежение эффектом «pile-up» приводит к недооцениванию площади контакта до 60%.

Дальнейшее уточнение параметра c^2 происходило для каких-либо конкретных условий. Так, используя результаты конечно-элементного моделирования, Taljat с соавторами (1998 г.) предложили для $\sigma_y/E = 0,002$, коэффициента трения $\mu = 0,2$ и $a/R = 0,5$ следующее выражение [18]:

$$\frac{h_c}{h} = c^2 = \frac{1}{4} (5 - 3n^{0,7}). \quad (14)$$

Alcala с соавторами (2000 г.) для $\sigma_y/E = 0,001..0,003$ получили [19]:

$$\frac{h_c}{h} = c^2 = 1,276 - 1,748n + 2,45 \ln^2 - 1,469n^3. \quad (15)$$

Для внедрения сферы в жестко-пластичный материал Kucharski и Mroz (2001 г.) предложили выражение [20]:

$$\frac{h_c}{h} = c^2 = 1,4 \exp(-0,97n). \quad (16)$$

Как видно из выражений (10), (11), (14) – (16) параметр c^2 зависит только от n , и не показано влияние на c^2 свойств материала σ_y и E .

В более поздней работе [21] Taljat и Pharr уделили внимание более детальному изучению эффекта «pile-up». Используя конечно-элементное моделирование они исследовали влияние упругой деформации в зависимости от соотношения E/σ_y , влияние относительной глубины внедрения h/R , экспоненты упрочнения и коэффициента трения, однако полученные результаты ими не были представлены в виде, удобном для инженерных расчетов.

В этом плане отличаются работы [22, 23], в которых c^2 представлены в виде $c^2 = c^2(\epsilon_y, n, \bar{h}_r)$. В работе [22] Lee с соавторами (2005) описывают характеристики упругопластического контакта полиномиальными функциями, полученными в результате конечно-элементного анализа:

$$c^2(\epsilon_y, n, \bar{h}_r) = \frac{h_c}{h} = \sum_{i=0}^1 f_{ci}(\epsilon_y, n) \cdot \ln(0,5\bar{h}_r)^i, \quad (17a)$$

$$f_{ci}(\epsilon_y, n) = \sum_{j=0}^4 \left[\sum_{k=0}^3 (a_{ijk} \epsilon_y^k) \cdot n^j \right],$$

где $\epsilon_y = \sigma_y/E$, $\bar{h}_r = h/R$.

Значения 40 коэффициентов a_{ijk} получены для $\epsilon_y = 0,001...0,004$, $n = 0...0,2$ и $\bar{h}_r = 0...0,12$.

В результате конечно-элементного моделирования Hertz с соавторами (2006 г.) для сферического индентирования получили [23]:

$$c^2 = \frac{h_c}{h} = M^{2/N} (2\bar{h}_r)^{(2-N)/N}, \quad (176)$$

$$\text{где } M = \frac{(1,45 + 28,55n + 1745\epsilon_y)(1 - 0,5n + 20\epsilon_y)}{(1 + 21,4n + 1020\epsilon_y)(1 + 0,4n + 60\epsilon_y)},$$

$$N = \frac{(1,9 + 12,5n + 5705\epsilon_y)(1 + 0,1n)}{(1 + 6,8n + 340\epsilon_y)}.$$

Вышеприведенные выражения справедливы для $\epsilon_y = 0,0005...0,03$, $n = 0...0,4$, $\bar{h}_r = 0...0,4$.

Метод отличающийся от двух предыдущих был представлен Kim с соавторами (2006 г.). Было указано, что контактную глубину h_c можно представить сложением двух независимых слагаемых [24]

$$h_c = h_c^* + h_{pile}^*, \quad (18)$$

где h_c^* – упругая контактная глубина, h_{pile}^* – глубина за счет пластического навала.

Упругие перемещения могут быть вычислены согласно [15]:

$$h_c^* = h_{max} - \epsilon \frac{P_{max}}{S}, \quad (19)$$

для сферического индентора $\epsilon = 0,75$.

Величина пластического навала получена в результате конечно-элементного анализа для предела текучести $\sigma_y = 100...800$ МПа, модуля упругости $E = 100...400$ ГПа, коэффициента Пуассона $\nu = 0,3$, экспоненты упрочнения $n = 0,05...0,5$, коэффициента трения $\mu = 0,2$:

$$\frac{h_{pile}^*}{h_c^*} = 0,13 \left(1 - 3,243n + 0,079n^2 \right) \left(1 + 6,258\bar{h}_r - 8,072\bar{h}_r^2 \right) \quad (20)$$

Ранее в работе [25] высказывалось соображение о том, что упругие деформации и пластический «навал» должны описываться отдельными уравнениями или функциями, однако это не было реализовано.

Заслуживает внимание работа [26], в которой параметры контакта сферического индентора для $\epsilon_y = 0,00143$ и $n = 0...0,5$ описываются выражениями

$$\frac{h_f}{h} = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij} \epsilon_y^i n^j,$$

$$c^2 = \frac{h_c}{h} = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij} (h_f/h) n^j. \quad (21)$$

Недостатком приведенных выражений является то, что коэффициенты a_{ij} приведены для конкретного значения \bar{h}_r , в данной работе для $\bar{h}_r = 0,06$.

Исходя из вышеприведенных данных и с учетом недавних работ авторов, посвященных взаимодействию жесткой сферы с упругопластическим полупространством [27 - 30], предлагается следующая концептуальная модель достижения поставленной цели. Упругопластический контакт происходит при $P > P_y$, где P_y – критическая нагрузка, при которой начинается пластическая деформация. Степень нагруженности характеризуется величиной $K = P/P_y$. При упругопластической деформации всегда одновременно происходят упругое продавливание материала и образование пластического навала. В нагруженном состоянии уравнение профиля не контактирующей неровности вокруг площадки контакта описывается уравнением $u_z(r)$, в разгруженном состоянии – $u_p(r)$. В зависимости от степени нагруженности K , не контактирующая поверхность может находиться либо ниже исходной поверхности (левая часть рис. 3), либо выше исходной поверхности (правая часть рис. 3), соответственно величина параметра $c^2 = h_c/h$ будет меньше или больше единицы. В разгруженном состоянии не контактирующая поверхность всегда будет выше исходной поверхности. Глубина остаточной лунки от исходной поверхности $h_f = h - w_0$, где w_0 – упругое восстановление центра лунки. Высота навала в разгруженном состоянии $u_p = h_c + w_c - h$, где w_c – упругое восстановление контура лунки (отпечатка).

Согласно данным [28, 29], процесс упругопластического взаимодействия (рис. 2) описывается выражением

$$\sqrt{h_c^*} (h - h_f) = \frac{mP}{2\sqrt{2RE^*}}, \quad (22)$$

где $m = w_0/w \approx 1,5$ – показатель степени кривой разгрузки $P = B(h - h_f)^m$.

Согласно [15],

$$h_c^* = h - \frac{\epsilon P}{S} = h - \frac{\epsilon}{m} (h - h_f) = h_f \left(\frac{h}{h_f} \left(1 - \frac{\epsilon}{m} \right) + \frac{\epsilon}{m} \right) \quad (23)$$

Подставляя выражение (23) в (22) и обозначая:

$$\frac{h}{h_f} \left(1 - \frac{\epsilon}{m} \right) + \frac{\epsilon}{m} = y^2, \quad (24)$$

получим

$$y^3 - y - \frac{P(m - \epsilon)}{2E^* \sqrt{2Rh_f^{1,5}}} = 0. \quad (25)$$

Используя подобие деформационных характеристик [27, 28], имеем

$$P = KP_y; \quad h_f = \frac{P_y(K-1)}{2\pi RK_h \cdot \sigma_y}; \quad (26)$$

критическая нагрузка P_y , при которой начинается пластическая деформация, определяется из выражения:

$$\frac{P_y}{E^*R^2} = \frac{\pi^3 K_y^3 \varepsilon_y^3}{6}, \quad (27)$$

где $K_y = p_0/\sigma_y$ – константа, p_0 – максимальное контактное давление при нагрузке P_y .

Подставляя выражения (26) и (27) в (25) получим уравнение

$$y^3 - y - \frac{6^{0.5} K(m-\varepsilon) \left(\frac{K_h}{K_y}\right)^{1.5}}{(K-1)^{1.5}} = 0, \quad (28)$$

свободный член, которого характеризуется безразмерными величинами: степенью нагружения K и константами для данного материала m , ε , K_y и параметром $K_h = K_h(\varepsilon_y, n)$, который учитывает характеристики упрочняемого материала и определяется согласно данным [30].

Имея решение y_k уравнения (28), находим из (24) глубину внедрения сферы

$$h = h_f \frac{y_k^2 - \varepsilon/m}{1 - \varepsilon/m}, \quad (29)$$

и глубину упруго контактирующей части

$$h_c^* = h_f \cdot y_k^2. \quad (30)$$

С учетом выражений (26) и (27),

$$h_f = \frac{\pi^2 K_y^3 \varepsilon_y^2 (K-1)}{12 K_h} \cdot R. \quad (31)$$

Общая глубина контактирующей части сферы

$$\bar{h}_c = \frac{h_c}{R} = \frac{\pi^2 K_y^3 \varepsilon_y^2 (K-1) y_k^2}{12 K_h} \times \left(1 + 0,131(1 - 3,243n + 0,079n^2) \left(1 + 6,258\bar{h}_r - 8,072\bar{h}_r^2\right)\right), \quad (32)$$

$$\bar{h}_r = \frac{h}{R} = \frac{\pi^2 K_y^3 \varepsilon_y^2 (K-1)}{12 K_h} \cdot \frac{y_k^2 - \varepsilon/m}{1 - \varepsilon/m}. \quad (33)$$

Высота навала в разгруженном состоянии

$$u_p = h_c - h + w_c,$$

где w_c – упругое восстановление контура отпечатка.

Согласно [10, 28], с учетом (27) и того, что $p_m = P_y K / (\pi a^2)$,

$$\bar{w}_c = \frac{w_c}{R} = \frac{\pi^2 K_y^3 \varepsilon_y^3 K K_{\beta c}}{6} \cdot \left(2\bar{h}_r - \bar{h}_r^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (34)$$

где

$$K_{\beta c} = (1 + \beta_e) 2^{2\beta_e + 1} B(\beta_e + 1, \beta_e + 1) \cdot B(0,5, \beta_e + 1), \quad (35)$$

$B(a, b)$ – бета-функция.

Если процесс нагружения сферического индентора можно аппроксимировать выражением

$$\frac{P}{ER^2} = A \bar{h}_r^{-\alpha},$$

то параметр β_e равен [31]

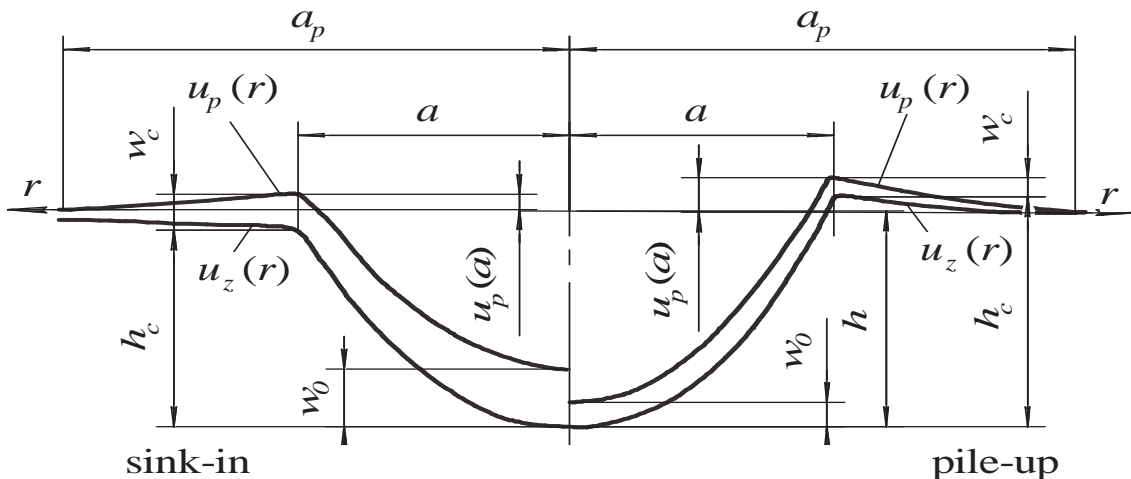


Рис. 3. Профили нагруженной и восстановленной лунки.

$$\beta_e = \alpha - 1.$$

Радиус сферы восстановленной лунки

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{R} = \frac{\bar{h}_{cr}^2 + 2\bar{h}_c - \bar{h}_c^2}{2\bar{h}_{cr}}, \quad (36)$$

где \bar{h}_{cr} – относительная глубина восстановленной лунки

$$\bar{h}_{cr} = \bar{h}_c - \bar{w}_0 + \bar{w}_c, \quad (37)$$

$$\bar{w}_0 = \frac{w_0}{R} = \frac{\pi K_y^3 \varepsilon_y^3 K K_{\beta 0}}{6} \cdot (2\bar{h}_r - \bar{h}_r^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (38)$$

$$K_{\beta 0} = (1 + \beta_e) 2^{2\beta_e + 1} B(\beta_e + 1, \beta_e + 1). \quad (39)$$

Исходя из анализа профилей разгруженных лунок, представленных в работах [21, 32, 33, 34], сделаем допущение: профиль навала разгруженной лунки для $r > a$ описывается выражением

$$u_p(r) = u_p(a) \left(\frac{a_p - r}{a_p - a} \right)^2, \quad r > a \quad (40)$$

или

$$u_p(\bar{r}) = u(1) \left(\frac{\bar{a}_p - \bar{r}}{\bar{a}_p - 1} \right)^2, \quad \bar{r} > 1, \quad (41)$$

где $\bar{r} = r/a$, $\bar{a}_p = a_p/r$.

Значение a_p (рис. 3) находим из равенства вытесненного объема разгруженной лунки, находившегося ниже исходной поверхности, и объема навала, находящегося выше исходной поверхности:

$$\bar{a}_p = -1 + \sqrt{1 + \frac{2\bar{h}_f^2(3\bar{R}_{cr} - \bar{h}_f)}{\bar{u}_p(1)\bar{a}} + \frac{6\bar{R}_{cr}\bar{h}_f - 3\bar{h}_f^2 + \bar{u}_p^2(1)}{\bar{a}^2}}. \quad (42)$$

Упругое перемещение $u_c(\bar{r})$ точек поверхности вне площадки контакта описывается выражением [10]

$$\frac{u_c(\bar{r})}{R} = \frac{\pi K_y^3 \varepsilon_y^3 K 2^{2\beta_e + 1} (\beta_e + 1)}{6\bar{r} \sqrt{2\bar{h}_r - \bar{h}_r^2}} \cdot B(\beta_e + 1, \beta_e + 1) \times \\ \times B\left(\frac{1}{2}, \beta_e + \frac{3}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \beta_e + 2, \bar{r}^{-2}\right). \quad (43)$$

Тогда профиль неконтактирующей поверхности в нагруженном состоянии описывается уравнением

$$u_z(\bar{r}) = u_p(\bar{r}) + u_c(\bar{r}). \quad (44)$$

Объем зазора, приходящегося на одну неровность

$$V_i = 2\pi \int_a^{a_c} (z_i(r) - u_z(r)) r dr, \quad (45)$$

где $a_c = (A_c/\pi)^{0.5}$, A_c – площадь, приходящаяся на одну неровность; $z_i(r)$ – уравнение описывающее i -ю неровность.

Учитывая функцию распределения сферических неровностей по высоте шероховатого слоя можно определить плотность зазоров и относительную площадь контакта при внедрении жесткой шероховатой поверхности в упругопластическое полупространство в зависимости от приложенной нагрузки и свойств материала полупространства.

С целью проверки полученных выражений были рассмотрены профили для разных величин внедрения $\bar{h}_r = h/R$ (рис. 4а), полученные в работе [21] в результате конечно-элементного моделирования. Аналогичные профили были получены (рис. 4б) с использованием выражений (18) и (20) в работе [24], полученных также в результате конечно-элементного анализа при $\mu = 0,2$. Значения коэффициента $K_h(\varepsilon_y, n)$ рассчитывались согласно методике [30] по значениям h_{ri} и P_i из работы [35].

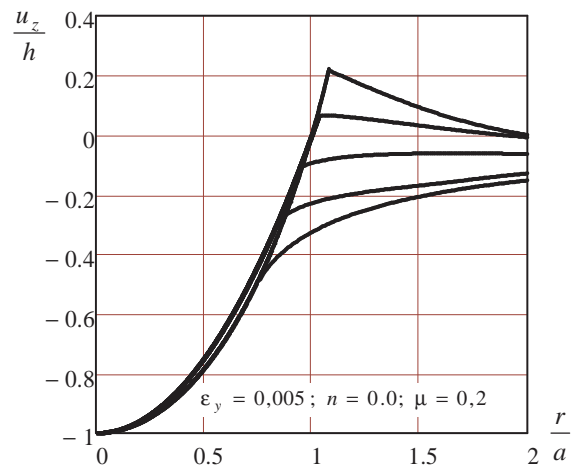
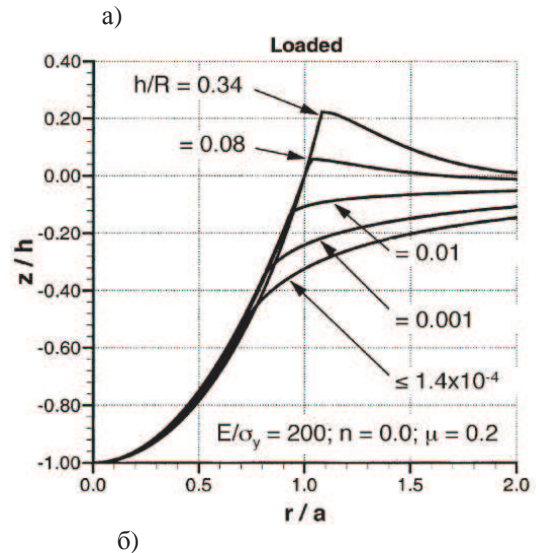


Рис. 4. Профили полупространства для разных величин внедрения сферы: а) – по данным [21]; б) – по выражению (44) для аналогичных значений h/R .

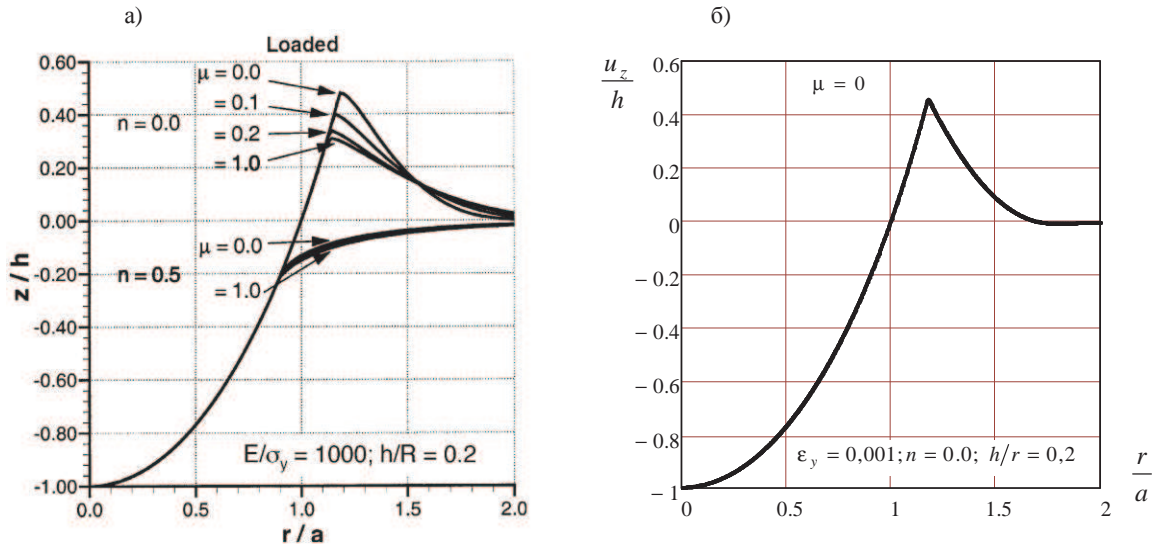


Рис. 5. Профили полупространства: а) – при разных значениях коэффициента трения по данным [21]; б) – по выражению (44) для $\mu = 0$

Как следует из рис. 4 имеет место достаточно хорошее качественное и количественное совпадение результатов.

С этой же целью был рассчитан профиль для $\epsilon_y = 0,001$, $h/R = 0,2$, $\mu = 0$ (рис. 5б) который сравнивался также с данными работы [21], представленными на рис. 5а. При этом значения c^2 были рассчитаны с учетом данных [23]. Относительная погрешность зна-

чений z/h , при $\mu = 0$, полученных двумя способами, составила около 3%. Для других значений коэффициента трения требуются дополнительные исследования.

Сравнение полученных результатов свидетельствует о приемлемости полученных выражений для инженерных расчетов профилей полупространства при внедрении сферической неровности, что позволяет отказаться от трудоемкого конечно-элементного моделирования.

Литература

1. Белокобыльский С.В., Огар П.М., Тарасов В.А. Многокритериальный подход к проектированию затворов трубопроводной арматуры // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 3 (15). С. 6-10.
2. Белокобыльский С.В., Огар П.М., Тарасов В.А. Оптимальное проектирование затворов трубопроводной арматуры с уплотнением «метал – металл» // Системы. Методы. Технологии. 2009. № 3. С. 9-15.
3. Огар П.М. Контактные характеристики и герметичность неподвижных стыков пневмогидроуправляемых систем двигателей летательных аппаратов: дис. ... д-ра техн. наук. Братск, 1997. 345 с.
4. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Герметизирующая способность тяжело нагруженных уплотнительных стыков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. № 3 (23). С. 136-142.
5. Огар П.М., Горохов Д.Б., Ключев Е.А. Герметизирующая способность стыка фрактальных шероховатых поверхностей // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2007. № 2 (14). С. 63-65.
6. Огар П.М., Тарасов В.А., Межецкий В.И. Расчет герметичности затворов трубопроводной арматуры и сосудов высокого давления // Системы. Методы. Технологии. 2011. № 1(9). С. 45-50.
7. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Плотность стыка при упругом контакте шероховатых поверхностей с учетом взаимного влияния неровностей // Системы. Методы. Технологии. 2011. № 4 (12). С. 35-40.
8. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы упругого дискретного контакта. СПб.: Политехника, 2003. 233 с.
9. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
10. Огар П.М., Тарасов В.А. Влияние формы осесимметричной нагрузки на напряженно-деформированное состояние упругопластического полупространства // Системы. Методы. Технологии. 2010. № 1(5). С. 14-20.
11. Meyer E., Untersuchen uber Hartepfung und Harte. Zeitschrift des Vereins Deutschen Ingenieure. 1908. 52.P. 645–654.
12. Norbury A., Samuel T. The recovery and sinking-in or piling-up of material in the Brinell test, and the effect of these factors on the correlation of the Brinell with certain other hardness tests // Journal of the Iron Steel Institute. 1928. V.117. P.673–687.

References

1. Belokobylsky S.V., Ogar P.M., Tarasov V.A. Multicriterion approach to the pipeline valves designing // Sovremennyye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovaniye. 2007. № 15. С. 6-10.
2. Belokobylsky S.V., Ogar P.M., Tarasov V.A. Optimal design of the pipeline valves with «metal-to-metal» seal // Sistemy. Metody. Tekhnologii. 2009. № 3. С. 9-15.
3. Ogar P.M. Contact specifications and tightness of the fixed joints of aircraft engines pneumatic-hydraulic fuel systems: dis. ... d-ra tekhn. nauk. Bratsk, 1997. 345s.
4. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Sealing ability of heavy loaded sealing joints // Sovremennyye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovaniye. 2009. № 3. С. 136-142.
5. Ogar P.M., Gorokhov D.B., Klyuchev E.A. Sealing ability of the fractal rough surfaces joint // Sovremennyye tekhnologii. Sistemy analiz. Modelirovaniye. 2007. № 14. С. 63-65.
6. Ogar P.M., Tarasov V.A., Mezhetzky V.I. Tightness calculation for the pipeline valves and pressure vessels // Sistemy. Metody. Tekhnologii. 2011. № 9. С. 45-50.
7. Ogar P.M., Tarasov V.A., Turchenko A.V. Joint density at the rough surfaces elastic contact taking into account asperities cross-effect // Sistemy. Metody. Tekhnologii. 2011. № 4. С. 35-40.
8. Argatov I.I., Dmitriev N.N. Fundamentals of elastic discrete contact. Spb.: Politekhnik, 2003. 233с.
9. Johnson K. Contact interaction mechanics. M.: Mir, 1989. 510 c.
10. Ogar P.M., Tarasov V.A. Effect of the axisymmetrical load shape on the loaded-strained state of elasticoplastic half-space // Sistemy. Metody. Tekhnologii. 2010. № 1. S. 14-20.
11. Meyer E. Untersuchen uber Hartepfung und Harte. Zeitschrift des Vereins Deutschen Ingenieure. 1908. V.52. P. 645–654.
12. Norbury A., Samuel T. The recovery and sinking-in or piling-up of material in the Brinell test, and the effect of these factors on the correlation of the Brinell with certain other hardness tests // Journal of the Iron Steel Institute. 1928. V.117. P.673–687.

13. Matthews J. R. Indentation Hardness and Hot Pressing // *Acta Materialia*. 1980. V.28. P.311-318.
14. Hill R., Storakers B., Zdunek A. B. A theoretical study of the Brinell hardness test // *Proceedings of the Royal Society of London*. 1989. V. A. № 423. P. 301–330.
15. Oliver W. C., Pharr G. M. An Improved Technique for Determining Hardness and Elastic Modulus using Load and Displacement Sensing Indentation Experiments // *Journal of Materials Research*. 1992. V. 7. № 6. P. 1564-1583.
16. Булычев С.И., Алехин В.П., Шорохов М.Х. и др. Определение модуля Юнга по диаграмме вдавливания индентора // *Заводская лаборатория*. 1975. 41. № 9. С.1137-1140.
17. Bulychev S.I., Alekhin V.P., Shorshorov M.K., Ternovskii A.P. Mechanical properties of materials studied from kinetic diagrams of load versus depth of impression during microimpression // *Strength Mater*. 1976. V.8. № 9. P. 1084-1089.
18. Taljat B., Zacharias T., Kosel T. New analytical procedure to determine stress–strain curve from spherical indentation data // *International Journal of Solids and Structures*. 1998. V.35. P.4411–4426.
19. Alcalá J., Barone A. C., Anglada M. The Influence of Plastic Hardening on Surface Deformation Modes Around Vickers and Spherical Indents // *Acta Materialia*. 2000. V.48. P. 3451-3464.
20. Kucharski S., Mroz Z. Indentation of plastic hardening parameters of metals from spherical indentation tests // *Materials Science and Engineering A*. 2001. №318. P. 65-76.
21. Taljat B., Pharr G. M. Development of pile-up during spherical indentation of elastic–plastic solids // *International Journal of Solids and Structures*. 2004. №41. P.3891–3904.
22. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // *J. Mech.Phys. Solids* 2005. №53, 2037–2069.
23. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., Mauvoisin G., El Abdi R. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. №43. p.4136–4153.
24. Kim S.H., Lee B.W., Choi Y., Kwon D. Quantitative determination of contact depth during spherical indentation of metallic materials—a FEM study // *Materials Science and Engineering*. 2006. A 415. p.59–65
25. Ahn J.H., Kwon D., Mater J. Res. Derivation of plastic stress–strain relationship from ball indentations: Examination of strain definition and pileup effect // 2001. V.16. №11. P.3170.
26. Cui H., Chen H., Chen J., Huang C., Wu C. FEA of evaluating material yield strength and strain hardening exponent using a spherical indentation // *Acta Metallurgica Sinica*. 2009. V.45. №2. P.189-194.
27. Огар П.М., Дайнеко А.А., Шур Д.Д. Контакт жесткой сферической неровности с упругопластическим полупространством // *Системы. Методы. Технологии*. 2009. № 4. С. 17-19.
28. Огар П.М., Тарасов В.А., Дайнеко А.А. О некоторых общих закономерностях упругопластического внедрения сферического индентора // *Системы. Методы. Технологии*. 2010. № 8. С. 38-43.
29. Огар П.М., Тарасов В.А., Дайнеко А.А. К вопросу упругопластического внедрения сферического индентора // *Системы. Методы. Технологии*. 2011. № 10. С.14-16.
30. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Влияние характеристик упрочняемого материала на упругопластическое внедрение сферической неровности // *Системы. Методы. Технологии*. 2011. № 4 (12). С.29-34.
31. Кузьменко А.Г. Пластический контакт тел двойной кривизны // *Проблемы трибологии*. 2009. №1. С.46-64.
32. Ai K., Dai L.H. Numerical study of pile-up in bulk metallic glass during spherical indentation // *Physics Mechanics and Astronomy*. 2008. V.51. №4. P. 379—386.
33. Cipriano G.L. Determinacao do coeficiente de encruamento de metais atraves da morfologia das impressoes de dureza na escala macrosco-pica [Электронный ресурс]. URL: <http://www.ppgem.ct.utfpr.edu.br/dissertacoes/CIPRIANO,%20Gustavo%20Luiz%20-20volume%201.pdf> (дата обращения: 03.11.2011).
34. Monelli B.D. Mechanical Characterization of Metallic Materials by Instrumented Spherical Indentation Testing [Электронный ресурс]. URL: http://eprints-hd.biblio.unitn.it/436/1/Bernardo-Monelli_PhD.pdf (дата обращения: 03.11.2011).
35. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // *Materials and Desing*. 2010. V. 31. P. 636 – 640.
13. Matthews J. R. Indentation Hardness and Hot Pressing // *Acta Materialia*. 1980. V.28. P.311-318.
14. Hill R., Storakers B., Zdunek A. B. A theoretical study of the Brinell hardness test // *Proceedings of the Royal Society of London*. 1989. V. A. № 423. P. 301–330.
15. Oliver W. C., Pharr G. M. An Improved Technique for Determining Hardness and Elastic Modulus using Load and Displacement Sensing Indentation Experiments // *Journal of Materials Research*. 1992. V. 7. № 6. P. 1564-1583.
16. Bulychev S.I., Alekhin V.P., Shorshorov, M.Kh. et. al , Determining Young's modulus from the indenter penetration diagram // *Zavodskaya laboratoriya*. 1975. T. 41, №9. S.1137-1140.
17. Mechanical properties of materials studied from kinetic diagrams of load versus depth of impression during microimpression/S.I. Bulychev, V.P. Alekhin, M.K. Shorshorov, A.P. Ternovskii // *Strength Mater*. 1976. V.8, № 9. P. 1084-1089.
18. Taljat B., Zacharias T., Kosel T. New analytical procedure to determine stress–strain curve from spherical indentation data // *International Journal of Solids and Structures*. 1998. V.35. P.4411–4426.
19. Alcalá J., Barone A. C., Anglada M. The Influence of Plastic Hardening on Surface Deformation Modes Around Vickers and Spherical Indents // *Acta Materialia*. 2000. V.48. P. 3451-3464.
20. Kucharski S., Mroz Z. Indentation of plastic hardening parameters of metals from spherical indentation tests // *Materials Science and Engineering A*. 2001. №318. P. 65-76.
21. Taljat B., Pharr G. M. Development of pile-up during spherical indentation of elastic–plastic solids // *International Journal of Solids and Structures*. 2004. № 41. P.3891–3904.
22. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // *J. Mech.Phys. Solids* 2005. №53, P. 2037–2069.
23. Hernot X., Bartier O., Bekouche Y., Mauvoisin G., El Abdi R. Influence of penetration depth and mechanical properties on contact radius determination for spherical indentation // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. №43. p.4136–4153..
24. Kim S.H., Lee B.W., Choi Y., Kwon D. Quantitative determination of contact depth during spherical indentation of metallic materials—a FEM study // *Materials Science and Engineering*. 2006. A 415. p.59–65
25. Ahn J.H., Kwon D., Mater J. Res. Derivation of plastic stress–strain relationship from ball indentations// Examination of strain definition and pileup effect. 2001. V.16. №11. P.3170.
26. Cui H., Chen H., Chen J., Huang C., Wu C. FEA of evaluating material yield strength and strain hardening exponent using a spherical indentation // *Acta Metallurgica Sinica*. 2009. v.45. №2. p.189-194.
27. Огар П.М., Дайнеко А.А., Шчур Д.Д. Contact of a rigid spherical asperity and elasticoplastic half-space // *Sistemy. Metody. Tekhnologii*. 2009. № 4. S. 17-19.
28. Огар П.М., Тарасов В.А., Дайнеко А.А. On some general regularities of a spherical indenter elastoplastic indentation // *Tam zhe*. 2010. № 8. S. 38-43.
29. Огар П.М., Тарасов В.А., Дайнеко А.А. On the issue of the elastic-plastic introduction of a spherical indenter // *Tam zhe*. 2011. № 10. S.14-16.
30. Огар П.М., Тарасов В.А., Турченко А.В. Effect of the hardenable material characteristics on a spherical asperity elastoplastic indentation // *Tam zhe*. 2011. № 11. S.29-34.
31. Kuz'menko A.G. Plastic contact of bicurved bodies // *Problemy tribologii*. 2009. №1. S.46-64.
32. Ai K., Dai L.H. Numerical study of pile-up in bulk metallic glass during spherical indentation // *Physics Mechanics and Astronomy*. 2008. V.51, №4. P. 379—386.
33. Cipriano G.L. Determinacao do coeficiente de encruamento de metais atraves da morfologia das impressoes de dureza na escala macrosco-pica [Электронный ресурс]: дис.2008. URL: <http://www.ppgem.ct.utfpr.edu.br/dissertacoes/CIPRIANO,%20Gustavo%20Luiz%20-20volume%201.pdf> (last accessed data: 03.11.2011).
34. Monelli B.D. Mechanical Characterization of Metallic Materials by Instrumented Spherical Indentation Testing // URL: http://eprints-hd.biblio.unitn.it/436/1/Bernardo-Monelli_PhD.pdf (дата обращения: 03.11.2011).
35. Collin J.-M., Mauvoisin G., Pilvin P. Materials characterization by instrumented indentation using two different approaches // *Materials and Desing*. 2010. v. 31. p. 636 – 640.