УДК 517.929

*А.Ф. Зубова**, *И.В. Зубов, В.И. Зубов, И.С. Стрекопытов*

ВОПРОС ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

В данной статье рассматривается задача исследования уходящих движений на устойчивость по Ляпунову. Строится решение этой задачи методами теории устойчивости по части переменных. Приведены методы сведения задачи исследования на устойчивость по Ляпунову уходящего решения к задаче исследования нулевого решения некоторой преобразованной системы.

Ключевые слова: векторная функция, асимптотическая устойчивость, инвариантное множество, динамическая система, окрестность точки, евклидово пространство.

Определение 1. Решение $X=0$ системы

$$\dot{X}=P(X,t), \qquad (1)$$

где $X=(x_1,...,x_n), F$ – вещественная, непрерывная, удовлетворяющая условию Липшица векторная функция, называется *устойчивым относительно переменных* $x_1,...,x_m\ (m<n)$, если по любому $\varepsilon>0$ и любому $t_0\geq 0$ можно указать величину $\delta(t,\varepsilon)>0$ такую, что при условии $\|X_0\|<\delta$ выполняется условие $\|Y(t,X_0)\|<\varepsilon$ при $t_0\geq 0$, где $Y=(x_1,...,x_m)^*$. Решение $X=0$ называется асимптотически устойчивым относительно переменных $x_1,...,x_m$, если $\delta(t,\varepsilon)>0$ можно выбрать так, чтобы $\|Y(t,X_0)\|\underset{t\to+\infty}{\to}0$.

Определение 2. Множество $M\subset R$ называется *инвариантным по отношению к динамической системе* $f(p,t)$, если оно состоит из траекторий этой динамической системы, т. е. из $p\in M$ следует $f(p,I)\subset M$.

Определение 3. Множество $M\subset R$ называется *инвариантным по отношению к динамической системе* $f(p,t)$ *в положительном направлении* (Международный термин – forward invariant set.), если оно состоит из положительных полутраекторий этой динамической системы, т. е. из $p\in M$. Множество M называют также инвариантным для полупотока.

Ясно, что компактное инвариантное для полупотока множество состоит из полутраекторий, устойчивых по Лагранжу в положительном направлении.

Определение 4. *Аттрактором динамической системы* $f(p,t)$, *заданной в полном метрическом пространстве* R, называется асимптотически устойчивое компактное множество A.

Асимптотическая устойчивость A означает, что оно устойчиво по Ляпунову и обладает свойством $\rho(f(p,t),A)\underset{t\to+\infty}{\to}0$ при выполнении условия $\rho(p,A)<\delta$, где δ – некоторое положительное число. Если δ оказывается равным $+\infty$, то аттрактор A называется *глобальным.* [1]

Теорема. *Для того, чтобы динамическая система* $f(p,t)$ *в евклидовом пространстве* $R=E^n$ *имела аттрактор* A, *необходимо и достаточно, чтобы существовало множество* $M\subset R$ *со следующими свойствами:*

1) множество M *вместе со своей некоторой* $\delta-$*окрестностью является компактным и инвариантным для полупотока множеством;*

2) *при некотором* $\delta'<\delta$ *существует число* $0<T<+\infty$ *такое, что полутраектории, начинающиеся в множестве* $S(M,\delta)\setminus S(M,\delta')$, *покидают его за время* $t\leq T$.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует аттрактор A – устойчивое по Ляпунову асимптотически устойчивое компактное инвариантное множество. Тогда некоторая его окрестность является инвариантным для полупотока компактным открытым множеством. Действительно, $A-$ компактное множество, множество точек p, удовлетворяющих условию $\rho(p,A)<\delta$, является открытым компактным множеством. Любая траектория, начинающая в этой области, стремится к аттрактору A при $t\to+\infty$. В качестве искомого инвариантного для полупотока множества достаточно взять совокупность полутраекторий, начинающихся в $\delta-$окрестности множества A. Здесь число δ берется из определения асимптотической устойчивости. Из свойства асимптотической устойчивости сле-

* - автор, с которым следует вести переписку.

дует, что, во-первых, у множества A существует непустая окрестность, т. е. неравенство $0<\rho(A,x)<\delta$ совместно при $\delta<\delta_0$, и, во-вторых, число $\delta>0$ такое, что полутраектории, начинающиеся в $S(A,\delta)$ (окрестности множества A), за конечное время оказываются в $S(A,\delta')$ (окрестности этого множества), где $\delta'<\delta$. Из этого также следует, что полутраектории, начинающиеся во множестве $S(A,\delta)\setminus S(A,\delta')$, покидают его за конечное время [2].

Достаточность. Пусть M – инвариантное для полупотока открытое компактное множество. Тогда множество M состоит из устойчивых по Лагранжу в положительном направлении полутраекторий. Каждая индивидуальная полутраектория $f(p,I^+)$ этого множества имеет непустое $\omega-$предельное множество Ω_p. Причем, $\Omega_p\subseteq\overline{S(M,\delta')}$, кроме того, каждая индивидуальная траектория $f(p,t)$ обладает свойством $\rho(f(p,t),\Omega_p)\underset{t\to+\infty}{\to}0$. Каждое множество Ω_p является инвариантным замкнутым множеством.

Пусть в аттрактор A будет входить совокупность $\omega-$предельных множеств Ω_p, принадлежащих индивидуальным полутраекториям $f(p,I^+)$: $A\supseteq\bigcup\limits_{p\in S(M,\delta)}\Omega_p$. Докажем это. A – компактное множество, так как является объединением компактных множеств, лежащих в компактном множестве M. Свойство инвариантности A следует из инвариантности каждого $\omega-$предельного множества Ω_p. Докажем свойство устойчивости по Ляпунову этого множества. Согласно определению устойчивости по Ляпунову, зададимся величиной $\varepsilon>0$ и укажем $\delta>0$ такое, что при $\rho(p,A)<\delta$ будет выполняться $\rho(f(p,t),A)<\varepsilon$ при $t>0$. Все полутраектории $f(p,t)\underset{t\to+\infty}{\to}A$ при $p\in M$; это означает, что для выбранного ε для каждой индивидуальной полутраектории существует число T_p такое, что $\rho(f(p,t),A)<\varepsilon$ при $t>T_p$. [3]

По теореме Больцано–Вейерштрасса, в силу ограниченности множества M существует число $T=\sup\limits_{p\in M}T_p$. По теореме об интегральной непрерывности по числу T и выбранному нами ε можно указать такое число δ, что при $\rho(p,p_0)<\delta$, где $p_0\in A$, будет выполняться $\rho(f(p,t),f(p_0,t))<\varepsilon$ при $0<t\leq T$. В силу инвариантности A $f(p_0,t)\in A$, следовательно, выполняется $\rho(f(p,t),A)<\varepsilon$. Поскольку при данном δ будет выполнено $\rho(f(p,t),A)<\varepsilon$ и при $t>T$, то получаем, что найденное нами число δ отвечает определению устойчивости по Ляпунову.

Докажем свойство асимптотической устойчивости. Действительно, справедливо неравенство

$$\rho(f(p,t),A)\leq\rho(f(p,t),\Omega_p),$$

где $\Omega_p-\omega-$ предельное множество траектории $f(p,t)$. Однако $\rho(f(p,t),\Omega_p)\underset{t\to+\infty}{\to}0$. Отсюда следует, что $\rho(f(p,t),A)\underset{t\to+\infty}{\to}0$, причем, полутраектория $f(p,I^+)$ находится в компакте, что и доказывает асимптотическую устойчивость множества A [4].

Возникает вопрос о том, вся ли совокупность возможных предельных режимов состоит из $\omega-$предельных множеств индивидуальных траекторий. Ответ отрицательный, т. е. существуют инвариантные множества, не являющиеся $\omega-$предельными множествами никаких траекторий. Поэтому в аттрактор мы включаем и эти возможные режимы, хотя они и не влияют на свойство асимптотической устойчивости аттрактора.

Замечание 1. Условия теоремы могут показаться труднопроверяемыми, но это не так. Подобные условия дают функции Ляпунова, используемые в теореме Йошизавы о диссипативности [5].

Замечание 2. Доказанная теорема, по сути, является теоремой о неподвижной точке. Действительно, инвариантное множество является неподвижной точкой отображения замкнутой топологии компактного множества M в себя, индуцированного динамической системой $f(p,t)$. В отличие от принципа Шаудера, здесь не требуется выпуклость множества M, кроме того, указанное инвариантное множество – аттрактор, обладает свойством устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Существенным является характер поведения движений в окрестности границы множества M – требование существования «оболочки», которую покидают за конечное время все начинающиеся в ней движения. В этом смысле отображение, индуцированное динамической системой $f(p,t)$, является локально «сжимающимся», так как переводит за конечное время множество $S(M,\delta)$ в множество $S(M,\delta')$, где $\delta' < \delta$.

Литература

1. Зубов В.И. К управлению движением заряженных частиц в магнитном поле // Докл. АН СССР. 1977. Т.232, № 4. С. 798-799.
2. Зубов И.В. Устойчивость стационарных режимов нелинейных управляемых систем // Математические методы оптимизации и управления в сложных системах: межвуз. темат. сб. Калинин, 1981. С. 13-20.
3. Зубова А.Ф., Зубов И.В. Методы приближенных вычислений объектов ЦБП. Л., 1981. С. 16-79.
4. Проблемы устойчивости матриц и вычислительных алгоритмов / Л.Д. Блистанова, Г.А. Зеленков, И.В. Зубов, Н.В. Зубов. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2007. 150 с.
5. Зубов Н.В., Зубова А.Ф. Безопасность функционирования технических систем. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2010. 342 с.

УДК 621.311.004.12

В.А. Козлов, Г.А. Большанин *

СОГЛАСОВАННЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ОДНОРОДНОЙ ТРЕХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

Определены условия согласования однородной трехпроводной линии электропередачи (ЛЭП) напряжением 110кВ и выше с электрической нагрузкой, оценена ее пропускная способность. Рассмотрены различные варианты исполнения линий. Определены законы распространения напряжений и токов при согласовании линии электропередачи с электрической нагрузкой.

Ключевые слова: согласованный режим, трехпроводная линия электропередачи, электрическая нагрузка, падающая волна, отраженная волна, постоянная распространения, волновое сопротивление.

На современных промышленных предприятиях существенное распространение получили нагрузки с нелинейными вольтамперными характеристиками. К их числу относятся различного рода вентильные преобразователи, установки дуговой и контактной электросварки и т. д. Данные потребители являются источниками высших гармоник токов и напряжений, которые отрицательно сказываются на работе электрооборудования, систем релейной защиты, автоматики, телемеханики и связи. Низкое качество электрической энергии приводит к снижению надежности электроэнергетических объектов, к сокращению срока службы оборудования, негативно отражается на технологии производства.

Одним из методов улучшения качества электрической энергии в высоковольтных линиях электропередачи большой протяженности трехпроводного исполнения напряжением 110кВ и выше может быть ее согласование с электрической нагрузкой. В этом случае вследствие исключения отраженной волны электромагнитного поля заметно уменьшатся потери электрической энергии.

Известно условие согласования нагрузки с однопроводной линией электропередачи, которое отражено равенством [1]

$$\underline{Z}_{2n} = \underline{Z}_{cn}, \qquad (1)$$

где $\underline{Z}_{2n}$ – изображение полного сопротивления электрической нагрузки на комплексной плоскости для n-ой гармонической составляющей напряжения и тока, Ом; $\underline{Z}_{cn}$ – полное волновое сопротивление линии, Ом.

Условие согласования трехпроводной ЛЭП с электрической нагрузкой имеет другой вид. Своеобразие этого условия обусловлено тем, что передача электрической энергии по трехпроводным ЛЭП большой протяженности обеспечивается тремя парами волн электро-

* - автор, с которым следует вести переписку.