УДК 28.29

*Ю.Н. Алпатов, С.Б. Бурнашова**

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ХАРАКТЕРИСТИК УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Статья посвящена разработке математической модели учебного процесса по изучению дисциплины «Информационная безопасность и защита информации». Математическая модель получена в виде матричного уравнения, записанного на основе структурного графа системы. После проведения регрессионного анализа определены количественные характеристики аналитической зависимости параметров процесса. Проведена оценка адекватности модели. В результате разработана методика получения математической модели учебного процесса по изучению дисциплины.

Ключевые слова: учебный процесс, матричное уравнение, структурный граф, регрессионный анализ.

В результате исследования была получена топологическая модель учебного процесса в виде структурного графа (С-графа) [1]. С-граф системы является основой для записи уравнения в рациональной матричной форме [2]. Для получения математической модели представим С-граф в виде матричных уравнений.

В первую очередь, представим зависимость выходных и входных сигналов. Такая зависимость выражается уравнениями компонент графа. Уравнения записывают связь выходной и входной величин элементарного звена $X_i=W_i{\cdot}X_{i+1}$, $i=1,2,3…k$ и $x_j= x_{j+1}$, $j=1,2,3….m$, где k равно количеству взвешенных вершин, m – количеству узлов, и дополняются системой тождеств $X_i=1{\cdot}X_i$, $i=1,2,3, …t$, где t – общее число сигналов.

В матричном виде система уравнений компонент имеет запись

$$X=B{\cdot}X_{\text{вх}}, \tag{1}$$

где X – матрица-столбец сигналов графа, порядка n_1, n_1 – количество всех сигналов графа; B – матрица коэффициентов системы порядка $[n_1{\times}m_1]$;, m_1 – количество входных сигналов графа; $X_{вх}$ – матрица-столбец порядка $n_2=m_1$. Получаем в результате размерность уравнения

$$[n_1{\times}1]=[n_1{\times}m_1]{\cdot}[n_2{\times}1]. \tag{2}$$

Правило записи матрицы коэффициентов B_i следующее:

– на пересечении строки, соответствующей X_i, со столбцом, соответствующим $X_{\text{вх}}$, записываем величину B_i данного узла. Остальные элементы строки матрицы B равны нулю;

– выходные сигналы записываются в виде тождества $X_{\text{вых}.i}= X_{\text{вх}.i}{\cdot}1$.

Записываем матричное уравнение, отражающее структуру графа – уравнение узлов 1-го, 2-го и 3-го рода:

$$A{\cdot}X=0, \tag{3}$$

где X – матрица-столбец сигналов графа порядка n_1; A – матрица структуры графа размерностью $[n_3{\times}m_2]$; $m_2=n_1$, n_3 – количество строк, которые формируются по следующему правилу:

– для узлов 1-го рода ветви, входящей в узел, присваивается +1, выходящей из узла –1, а не инцидентной узлу – 0;

– для узлов 2-го рода записываем уравнения всех сочетаний пар входящей и выходящих дуг, обходя узел, например, по часовой стрелке. Входящей дуге 1 в строке матрицы узлов записываем +1, первой выходящей дуге 2 записываем –1, затем формируем вторую строку матрицы узлов, где следующей парой будет входящая дуга – присваиваем +1, вторая выходящая – записываем –1 и т. д. Для каждого узла формируем столько строк, сколько имеем сочетаний для пар входящей и выходящей дуг. Остальные столбцы в строке заполняем нулями;

– уравнение узлов 3-го рода формируются, как и уравнения узлов 2-го рода.

Размерность уравнения определяем по формуле:

$$[n_3{\times}m_2]{\cdot}[n_1{\times}1]. \tag{4}$$

Подставив в матричное уравнение структуры (3) из матричного уравнения компонент (1) значение X, получим матричное уравнение системы:

$$H{\cdot}X_{\text{вх}}=0, \tag{5}$$

где $H=A{\cdot}B$, $[H]=[n_3{\times}m_2]{\cdot}[n_1{\times}m_1]=[n_3{\times}m_1]$.

* - автор, с которым следует вести переписку.

Матричное обозначение позволяет записать уравнение в сжатой форме, делает удобным обращение с ним и облегчает получение некоторых групп неизвестных. Выполним преобразования матричного уравнения по выбранной методике [2].

Матричное уравнение (5) можно представить в виде блочных подматриц

$$\begin{bmatrix} H_1 H_2 \\ H_3 H_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Формулы умножения матриц показывают, что можно записать систему (6) в виде

$$\left.\begin{aligned} H_1 X_1 + H_2 X_2 = 0; \\ H_3 X_1 + H_4 X_2 = 0. \end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

Исключив из этой системы X_2, получим:

$$\left[H_3 - H_4 \cdot H_2^{-1} \cdot H_1 \right] \times \left[X_1 \right] = 0, \text{ или}$$
$$\left[H' \right] \times \left[X_1 \right] = 0, \qquad (8)$$

где $H'=H_3-H_4 \cdot H_2^{-1} \cdot H_1$, а H_2^{-1} – матрица, обратная H_2.

При таком формировании блочных подматриц должно выполняться условие $detH_2 \neq 0$, которое является условием существования решения уравнения (8).

Для полученной топологической модели в виде С-графа матрица-столбец X сигналов графа имеет размерность [96×1], для его составления записываем сверху вниз в порядке возрастания индекса все сигналы дуг графа. Матрица-столбец входных сигналов $X_{вх}$ имеет размерность [77×1], для его составления записываем входные сигналы компонент и входные сигналы каналов в порядке возрастания индексов. В результате можно записать соотношение, из которого определяем размерность матрицы B:

[96×1]= [96×77]· [77×1].

В итоге получили матрицу-компонент системы размерностью $[B]=[96 \times 77]$.

Определяем матричное уравнение структуры С-графа – матрица A имеет размерность $[A]=[71 \times 96]$.

Для матрицы $H=A \cdot B$ определяем размерность $[H]=[A] \cdot [B]=[n_2 \times n_1] \cdot [n_1 \times m_2]=[n_2 \times m_2]= [71 \times 96] \cdot [96 \times 77]= [71 \times 77]$.

В результате этой работы получили матричное уравнение системы $H \cdot X_{вх}=0$ (9), характеризующей изучаемый процесс в виде математической модели, где $X_{вх}$ – матрица-столбец входных сигналов размерностью [77×1]. Полученная матрица H изображена на рис. 1. Входными сигналами являются сигналы $X_{вх}$, где сигналы $X_0 \div X_{20}$ – это сигналы, определяющие протекающий процесс, а сигналы $X_{21} \div X_{24}$, $X_{27} \div X_{29}$, X_{31}, $X_{33} \div X_{38}$, $X_{40} \div X_{43}$, $X_{46} \div X_{48}$, X_{51}, X_{55}, X_{57}, $X_{59} \div X_{61}$, $X_{63} \div X_{69}$, X_{71}, $X_{73} \div X_{79}$, $X_{81} \div X_{87}$, $X_{89} \div X_{93}$, X_{95} введены согласно правилу приведения С-графа к виду, необходимому для строгой математической записи уравнения. Для уменьшения пространства состояний исключим параметры, которые являются взаимозависимыми. Для проведения дальнейших преобразований (8) сформируем матрицы-столбцы X_1 и X_2, произведя соответствующие перестановки столбцов в матрице H. В результате получим матричное уравнение, условием решения которого является $detH_2 \neq 0$. Для выполнения этого условия формируем матрицу H_2 в виде диагональной матрицы, где диагональ состоит из единичных значений, т. е. получаем диагональную единичную матрицу. При таком формировании матрицы H_2, согласно свойствам диагональных матриц, выполняется условие $detH_2 \neq 0$, т. к. определитель диагональной матрицы равен произведению диагональных элементов, и облегчается вычисление обратной матрицы, т. к. обратная матрица в этом случае совпадает с исходной.

Проведем последовательные вычисления по правилам умножения и линейных операций над матрицами для получения матрицы $H'=H_3-H_4 \cdot H_2^{-1} \cdot H_1$, где размерность матрицы $[H_1]=[51 \times 26]$, $[H_2]=[51 \times 51]$, $[H_3]=[20 \times 26]$, $[H_4]=[20 \times 51]$.

Размерность матрицы $[H']=[20 \times 26]$-
- $[20 \times 51] \cdot [51 \times 51] \cdot [51 \times 26]=[20 \times 26]$.

После выполнения преобразования получаем уравнение $H' \cdot X'_{вх}=0$ (10), где матрица H' имеет размерность [20×26], а матрица-столбец $X'_{вх}$ имеет размерность [26×1] (рис. 2).

После понижения порядка матрицы, чтобы провести идентификацию, необходимо обработать информацию о 26 сигналах вместо 77 исходных.

В результате дальнейших преобразований получаем однородное уравнение, определяющее зависимость выходного параметра от параметров системы.

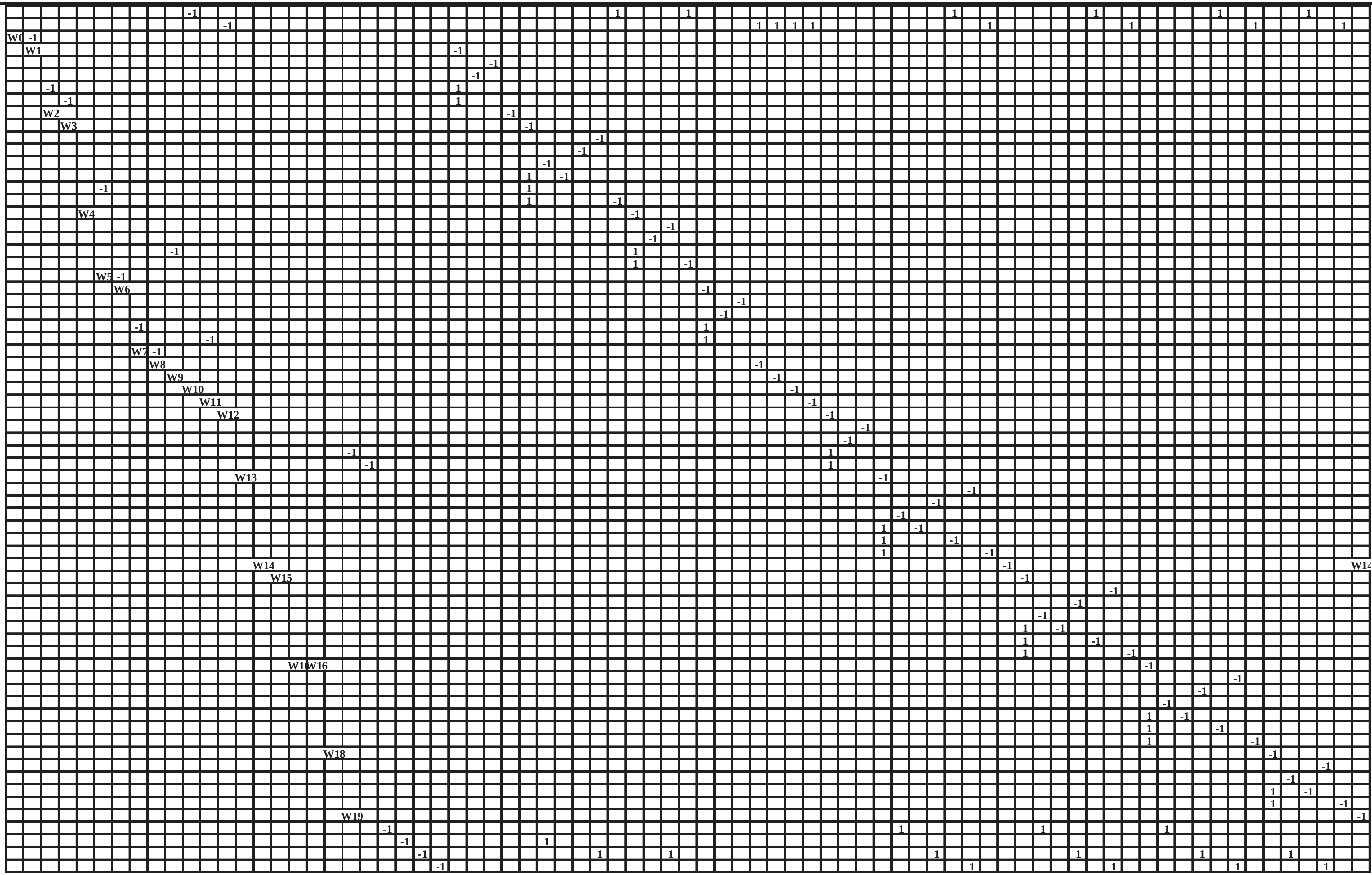

Рис. 1. Матрица H матричного уравнения C-графа $H \times X_{вх} = 0$.

	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X20	X27	X31	X33	X40	X46	X51	X53	X55	X57	X59	X63	X71	X73	X81	X89	X95	X8	X6	X1
1	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	W0	W0	W0	W0	.	.	.	.	-1
3	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	W1
4	.	.	.	.	.	.	.	W2	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
5	.	.	.	.	.	.	.	W3	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
6	.	.	.	.	.	.	.	.	W4	W4	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	W5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.
8	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	W6	.
9	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	W7	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.
10	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	W8	.	.
11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	W9	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	W10	W10	.	.	.	-1	.	.	W10	.	W10	W10	W10	.	.	.	.
13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	W11	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	W12	W12	W12	W12	-1	W12	.	W12	W12	W12	.	.	.	.
15	W13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.
16	.	W14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	W14	.	.	.
17	.	.	W15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.
18	.	.	.	W16	W16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.	.
19	.	.	.	.	.	W18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	-1	.	.	.	.
20	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	W19	.	.	.	.	.	-1	.	.	.

$$X \begin{vmatrix} X13 \\ X14 \\ X15 \\ X16 \\ X17 \\ X18 \\ X20 \\ X27 \\ X31 \\ X33 \\ X40 \\ X46 \\ X51 \\ X53 \\ X55 \\ X57 \\ X59 \\ X63 \\ X71 \\ X73 \\ X81 \\ X89 \\ X95 \\ X8 \\ X6 \\ X1 \end{vmatrix} =0 \qquad (10)$$

Рис. 2. Матричное уравнение *H′·X′*вх=0.

$X_{20}=(W_{l2}+W_{12}W_{10}+W_0W_{12}W_9W_4W_2W_l+$
$+W_0W_{l2}W_9W_4W_3W_1+W_0W_{12}W_{10}W_3W_1+$
$+W_0W_{12}W_{10}W_4W_2W_l+W_0W_{12}W_{10}W_4W_3W_l+$
$+W_0W_5W_3W_lW_{l2}W_{11}W_6+W_0W_5W_3W_lW_{l2}W_8W_7$
$W_6)W_{13}X_{13}+(W_0W_{l2}W_9W_4W_2W_l+$
$+W_0W_{l2}W_9W_4W_3W_l+W_0W_{12}W_{10}W_3W_l+W_0W_{12}W_{10}$
$W_4W_2W_l+W_0W_{12}W_{10}W_4W_3W_l+$
$+W_0W_5W_3W_lW_{12}W_{11}W_6+W_0W_5W_3W_lW_{12}W_8W_7W_6)$
$W_{14}X_{14}+(W_{12}+W_{12}W_{10}+W_0W_{12}W_9W_4W_2W_l+W_0W_{12}$
$W_9W_4W_3W_l+W_OW_{12}W_{10}W_3W_l+W_0W_{12}W_{10}W_4W_2W_l$
$+W_0W_{12}W_{10}W_4W_3W_l+W_0W_5W_3W_lW_{l2}W_{11}W_6+W_0W$
$_5W_3W_1W_{12}W_8W_7W_6)$
$W_{15}X_{15}+(W_{12}+W_{12}W_{10}+W_0W_{12}W_9W_4W_2W_l+$
$+W_0W_{12}W_9W_4W_3W_1+W_0W_{12}W_{10}W_3W_l+$
$+W_0W_{12}W_{10}W_4W_2W_l+W_0W_{12}W_{10}W_4W_3W_l+$
$+W_0W_5W_3W_lW_{l2}W_{11}W_6+W_0W_5W_3W_1W_{12}W_8$
$W_7W_6)W_{16}X_{16}+(W_{12}+W_{12}W_{10}+W_0W_{12}W_9W_4W_2W_l+$
$W_0W_{l2}W_9W_4W_3W_l+W_0W_{l2}W_{l0}W_3W_1+$
$+W_0W_{12}W_{10}W_4W_2W_1+W_0W_{12}W_{l0}W_4W_3W_1+$
$+W_0W_5W_3W_1W_{12}W_{11}W_6+W_0W_5W_3W_1W_{12}W_8W_7W_6)$
$W_{16}X_{17}+(W_{12}+W_{12}W_{10})W_{18}X_{l8}.$ (11)

Полученное выражение отражает сложную структуру взаимосвязи параметров и предоставляет широкие возможности для дальнейшего исследования.

Формула содержит коэффициенты передачи $W(S_i)$. Так как процесс изучения дисциплины протекает медленно, в течение длительного периода, его можно рассматривать в стационарном режиме.

Если $S_i=0$, тогда коэффициент передачи $W(S_i)=a_i$, что дает возможность полученную математическую модель формально представить в виде классической записи регрессионной модели вида:

$$Y=\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot x_i , \qquad (12)$$

где $Y=x_{20}$ – выходная величина, а a_i, $i=0,k$ – неизвестные коэффициенты регрессии, или

$$x_{20}=a_0x_0+a_1x_{13}+a_2x_{14}+a_3x_{15}+a_4x_{16}+ +a_5x_{17}+a_6x_{18}, \qquad (13)$$

где x_{13} – сознательность (пропуски занятий 0÷34); x_{14} – развитость мышления (средний балл вступительных испытаний 100÷200); x_{15} – социальный статус (усл. ед. 0÷4); x_{16} – возраст преподавателя (года 22÷80); x_{17} – стаж работы преподавателя (года 0÷58); x_{18} – ученые степень и звание преподавателя (усл. ед. 1÷8); x_{20} – результат изучения дисциплины (оценка 2÷5); a_i – коэффициенты уравнения.

Полученная математическая модель (13) является основой для проведения эксперимента с целью получения качественных значений ее видов, обоснования требований к точности модели.

В работе проведен регрессионный анализ модели учебного процесса по изучению дисциплины. Воспользовавшись методом наименьших квадратов, определены коэффициенты регрессии. Основным критерием отбора испытуемых, включенных в основную выборку, являлся факт обучения в БрГУ по специальности «Информационные системы и технологии» и изучение дисциплины «Информационная безопасность и защита информации» или сходных по характеристикам в учебном плане технических дисциплин. Уровень успешности обучения определялся с помощью средних значений по результатам сдачи экзамена по одной дисциплине. Данные формировались следующим образом: учебная группа разбивалась на три подгруппы обучающихся на «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно», все остальные параметры определялись как средние для данного уровня успешности обучения.

Вычисления проведены с использованием программного пакета MatLab.

В результате нахождения коэффициентов регрессии получили модель линейной регрессии, дающую минимальную среднеквадратическую ошибку аппроксимации в виде

$$x_{20}=-6.019x_0-0.0842x_{13}+0.0485x_{14}$$
$$+0.6723x_{15}+0.0311x_{16}-0.0278x_{17}+0.1386x_{18}.$$

Для проверки адекватности полученной модели рассчитаны показатели качества линейной модели множественной регрессии (таблица 1).

Значение множественного коэффициента детерминации 0.9816 показывает высокую тесноту связи всех факторов с результативным признаком. Используем F-статистику, чтобы определить статистическую значимость уравнения регрессии. Табличное критическое значение при вероятности нулевой гипотезы 0.05 составляет 3.58. Наблюдаемое F-значение равно 71.13. Следовательно, полученное регрессионное уравнение полезно для определения значения результата обучения по дисциплине.

Таблица 1

Коэффициент множественной детерминации	*R-squared*	0.9816
Корректированный коэффициент множественной детерминации	*R-squared*	0.9678
Коэффициент множественной корреляции	R	0.9838
Объясненная сумма квадратов отклонений при $df=8$	$D_{\text{объясн}}$	9.8159
Остаточная сумма квадратов отклонений при $df=3$	$D_{\text{ост}}$	0.1839
Средний квадрат отклонений $D_{\text{объясн}}$	S_1^2	1.636
Средний квадрат отклонений $D_{\text{ост}}$	S_2^2	0.0230
Критерий Фишера	*F*-критерий	71.13

Полученная количественная зависимость позволит решить задачу выбора оптимальных параметров учебного процесса для достижения максимального значения качества обучения.

Литература

1. Бурнашова С. Б. Модель технологического процесса изучения дисциплины «Информационная безопасность и защита информации» // Тр. Брат. гос. ун-та. Сер. Естественные и инженерные науки – развитию регионов Сибири. 2009. Т 1. 180 с.

2. Алпатов Ю.Н. Синтез систем управления методом структурных графов: моногр. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1988. 184 с.

3. Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики. М.: Финансы и статистика, 1999. 480 с.