

12. Зеленин А.Н. Основы разрушения грунтов механическими способами. М.: Машиностроение, 1968. 375 с.
13. Цитович Н.А. Механика грунтов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. школа, 1963. 247 с.

14. Ветров Ю.А., Станевский В.П. Исследование фактора скорости резания грунтов // Горные, строительные и дорожные машины. 1969. № 8. С.21-26.

УДК 621.752

А.А. Ахмадеева, В.Е. Гозбенко\*

### РАЦИОНАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГРУЗОВОГО ВАГОНА

*В статье рассмотрена математическая модель вагона с двойным рессорным подвешиванием, имеющим шесть степеней свободы. Показано, что данную систему с достаточной точностью можно заменить системой с двумя степенями свободы.*

**Ключевые слова:** модель вагона, степень свободы, свободные колебания.

При построении моделей динамических систем желательно разрабатывать достаточно простые модели, которые адекватно учитывали бы динамические свойства системы, подлежащей исследованию. Простота модели определяется в большей мере числом степеней свободы.

Рассмотрим модель грузового вагона. В состав модели входит кузов вагона, опирающийся на две вагонные тележки, оснащенные двумя колесными парами каждая [2, 3]. Для исследования собственных колебаний вагонов с двойным рессорным подвешиванием принимаем расчетную схему грузового вагона, используемого при построении модели (рис. 1).

При выводе уравнений колебаний модели вагонов с двойным рессорным подвешиванием используются следующие обозначения:

$m_K, m_{T1}, m_{T2}$  – масса кузова и тележек соответственно;  $I_K, I_{T1}, I_{T2}$  – момент инерции кузова и тележек при галопировании соответственно;  $c_{11}, c_{12}$  – вертикальная жесткость центрального подвешивания тележки;  $c_{21}, c_{22}, c_{31}, c_{32}$  – вертикальная жесткость буксового подвешивания колесной пары;  $\beta_{11}, \beta_{12}$  – сопротивление демпферов центрального подвешивания первой и второй тележки;  $\beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{31}, \beta_{32}$  – сопротивление демпферов комплектов буксового подвешивания колесной пары;  $z_K, z_{T1}, z_{T2}$  – текущие вертикаль-

ные перемещения центра тяжести соответственно кузова, первой и второй тележек;  $\varphi_K, \varphi_{T1}, \varphi_{T2}$  – текущие угловые перемещения кузова, первой и второй тележек соответственно;  $L_1 + L_2$  – база кузова.

Введем следующие допущения. Положим, что кузов, рамы тележек и колесные пары грузового вагона – твердые тела. Систему рассматриваем как консервативную, т. е. не принимаем во внимание сопротивления колебаниям.

Вагон движется по прямому ровному пути так, что плоскости симметрии пути и вагона совпадают. Радиусы кругов катания колес, катящихся без проскальзываний, одинаковы. Исследуем движение такой механической системы в продольной вертикальной плоскости, проходящей через центр масс.

При принятых допущениях конфигурацию системы можно определить при помощи шести независимых между собой величин, например, трех вертикальных перемещений  $z_K, z_{T1},$  и  $z_{T2}$  кузова и обрессоренных частей тележек; тремя углами  $\varphi_K, \varphi_{T1}, \varphi_{T2}$  поворота кузова и обрессоренных частей тележек относительно их главных центральных осей инерции, перпендикулярных продольной плоскости, в которой исследуется движение.

Составив кинетическую и потенциальную энергию и используя уравнения Лагранжа II

\* - автор, с которым следует вести переписку.

рода [1, 4], получим систему дифференциальных уравнений.

Исследуем свободные колебания подпрыгивания и галопирования кузова, подпрыгивания и галопирования тележек экипажа на прямолинейном участке пути без учета сил трения.

В качестве примера возьмем параметры системы 4-осного цельнометаллического полувагона с глухими торцевыми стенами, модель 12-132-02. Положим, что конструкция кузова исследуемого вагона и расположение груза в нем несимметричны относительно главных центральных осей инерции. Рассмотрим случай, когда полувагон загружен до полной грузоподъемности так, что весь объем кузова заполнен грузом и центр тяжести обрессоренной части, т. е. кузова с наддресоренными балками и грузом, смещен в продольной плоскости от центра симметрии на 0,33 м и, следовательно,  $L_1 = 4,00$  м,  $L_2 = 4,65$  м. Вес обрессоренной части полувагона, загруженного до полной грузоподъемности,  $m_K = 69,7 \cdot 10^3$  кг; массы тележек –  $m_{T1} = m_{T2} = 4060$  кг. Момент инерции обрессоренной части вагона относительно главной центральной оси, проходящей через центр симметрии, равен  $I_K = 1275 \cdot 10^3$  кгм<sup>2</sup>. В нашем случае центр тяжести смещен от центра симметрии на  $a = 0,33$  м, поэтому  $\tilde{I}_K = 1267 \cdot 10^3$  кгм<sup>2</sup>. При решении использовались соответствующие начальные условия.

В результате расчетов получили, что период, амплитуда и частота колебаний подпрыги-

вания кузова равны  $T_1 \approx 0,458$  (сек.),  $\lambda_1 \approx 1,47 \cdot 10^{-3}$  (м) и  $n_1 \approx 2,183$  (Гц) соответственно. Характеристики собственных колебаний галопирования кузова, исходя из полученного решения, следующие:  $T_2 \approx 0,4585$  (сек.),  $\lambda_2 \approx 0,025^0$ ,  $n_2 \approx 2,181$  (Гц).

$$\left\{ \begin{aligned} & m_K \ddot{z}_K + (\beta_{11} + \beta_{12}) \dot{z}_K - \beta_{11} \dot{z}_{T1} - \beta_{12} \dot{z}_{T2} + \\ & + (\beta_{11} L_1 - \beta_{12} L_2) \dot{\varphi}_K + (c_{11} + c_{12}) z_K - \\ & - c_{11} z_{T1} - c_{12} z_{T2} + (c_{11} L_1 - c_{12} L_2) \varphi_K = 0; \\ & m_{T1} \ddot{z}_{T1} - \beta_{11} \dot{z}_K + (\beta_{11} + \beta_{21} + \beta_{22}) \dot{z}_{T1} - \beta_{11} L_1 \dot{\varphi}_K + \\ & + (\beta_{21} a_{21} - \beta_{22} a_{22}) \dot{\varphi}_{T1} - c_{11} z_K + (c_{11} + c_{21} + c_{22}) z_{T1} - \\ & - c_{11} L_1 \varphi_K + (c_{21} a_{21} - c_{22} a_{22}) \varphi_{T1} = 0; \\ & m_{T2} \ddot{z}_{T2} - \beta_{12} \dot{z}_K + (\beta_{12} + \beta_{31} + \beta_{32}) \dot{z}_{T2} + \beta_{12} L_2 \dot{\varphi}_K + \\ & + (\beta_{31} a_{31} - \beta_{32} a_{32}) \dot{\varphi}_{T2} - c_{12} z_K + (c_{12} + c_{31} + c_{32}) z_{T2} + \\ & + c_{12} L_2 \varphi_K + (c_{31} a_{31} - c_{32} a_{32}) \varphi_{T2} = 0; \\ & I_K \ddot{\varphi}_K + (\beta_{11} L_1 - \beta_{12} L_2) \dot{z}_K - \beta_{11} L_1 \dot{z}_{T1} + \beta_{12} L_2 \dot{z}_{T2} + \\ & + (\beta_{11} L_1^2 + \beta_{12} L_2^2) \dot{\varphi}_K + (c_{11} L_1 - c_{12} L_2) z_K - \\ & - c_{11} L_1 z_{T1} + c_{12} L_2 z_{T2} + (c_{11} L_1^2 + c_{12} L_2^2) \varphi_K = 0; \\ & I_{T1} \ddot{\varphi}_{T1} + (\beta_{21} a_{21} - \beta_{22} a_{22}) \dot{z}_{T1} + (\beta_{21} a_{21}^2 + \beta_{22} a_{22}^2) \dot{\varphi}_{T1} + \\ & + (c_{21} a_{21} - c_{22} a_{22}) z_{T1} + (c_{21} a_{21}^2 + c_{22} a_{22}^2) \varphi_{T1} = 0; \\ & I_{T2} \ddot{\varphi}_{T2} + (\beta_{31} a_{31} - \beta_{32} a_{32}) \dot{z}_{T2} + (\beta_{31} a_{31}^2 + \beta_{32} a_{32}^2) \dot{\varphi}_{T2} + \\ & + (c_{31} a_{31} - c_{32} a_{32}) z_{T2} + (c_{31} a_{31}^2 + c_{32} a_{32}^2) \varphi_{T2} = 0. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Рассмотрим возможность снижения числа степеней свободы рассматриваемой системы до двух. Так как масса тележек  $m_{T1}$  и  $m_{T2}$  мала по сравнению с массой кузова  $m_K$ , то исследуем упрощенную модель грузового вагона.

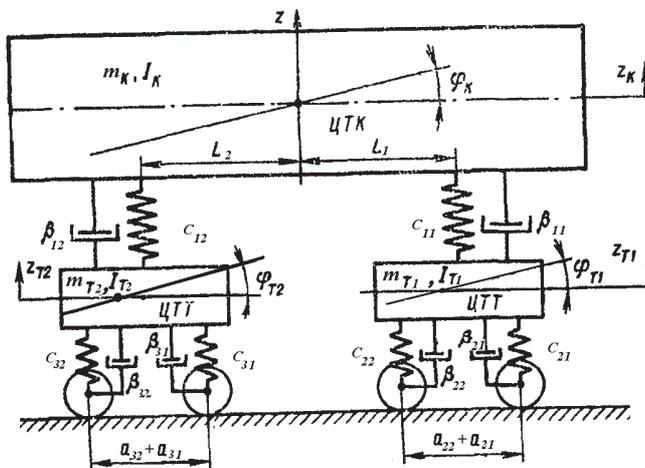


Рис. 1. Расчетная схема колебаний вагона с двухступенчатым рессорным подвешиванием.

Рассмотрим кузов, как твердое тело, опертое в двух точках на последовательно поставленные пружины жесткости  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{21}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{31}$ ,  $c_{32}$  (рис. 2).

а приведенная жесткость

$$\tilde{c}_{11} = \frac{c_{11}(c_{21} + c_{22})}{c_{11} + c_{21} + c_{22}}, \quad \tilde{c}_{12} = \frac{c_{12}(c_{31} + c_{32})}{c_{12} + c_{31} + c_{32}}.$$

Гибкость таких опор равна

$$\frac{1}{\tilde{c}_{11}} = \frac{1}{c_{11}} + \frac{1}{c_{21} + c_{22}}, \quad \frac{1}{\tilde{c}_{12}} = \frac{1}{c_{12}} + \frac{1}{c_{31} + c_{32}},$$

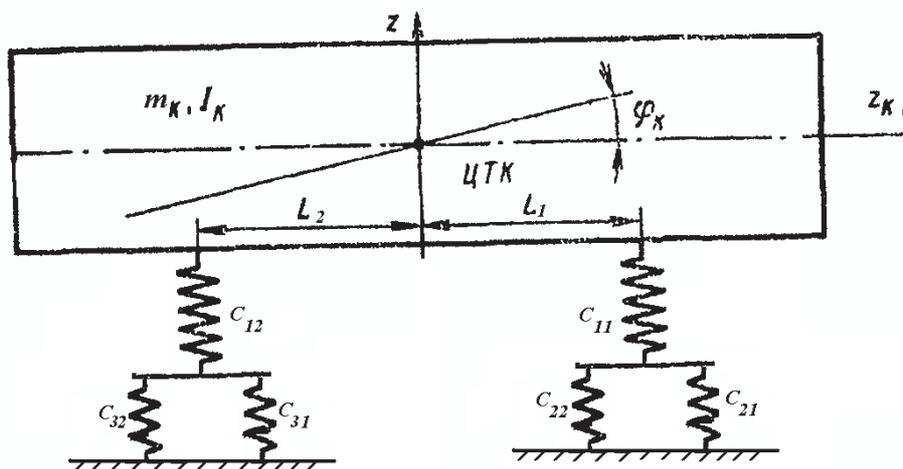


Рис. 2. Расчетная схема колебаний вагона с двумя степенями свободы.

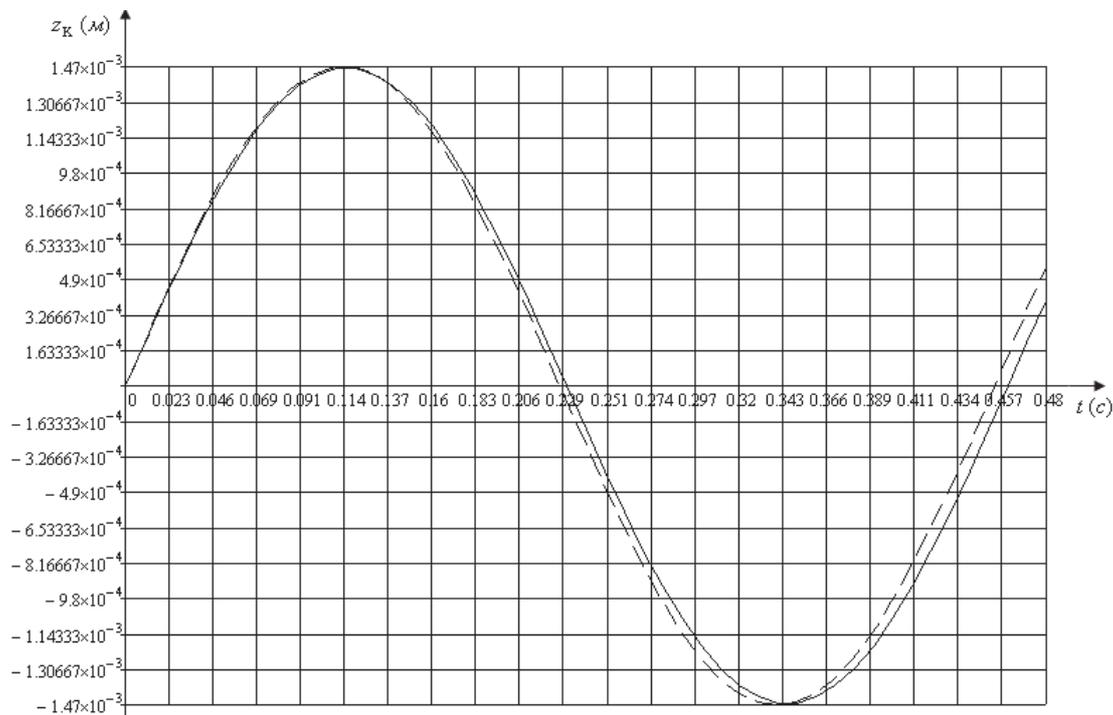


Рис. 3. Перемещение кузова с шестью и двумя степенями свободы.

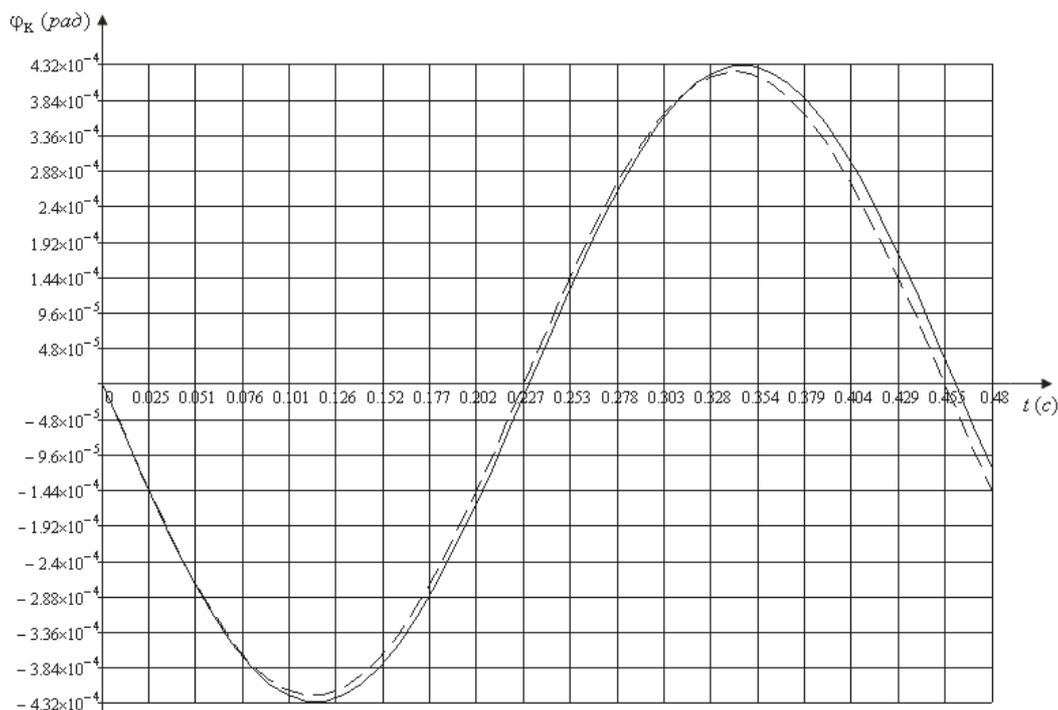


Рис. 4. Угловое перемещение кузова с шестью и двумя степенями свободы.

При принятых допущениях конфигурацию системы можно определить при помощи двух независимых между собой величин. Принимается, что кузов вагона обладает двумя степенями свободы; боковым отсосом и вилянием, подпрыгиванием и галопированием тележек будем пренебрегать. Общее число степеней свободы модели равно двум (рис. 2).

Определив кинетическую и потенциальную энергию для рассматриваемой системы и используя уравнения Лагранжа II рода, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} m_K \ddot{z}_K + (\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{12})z_K + (\tilde{c}_{11}L_1 - \tilde{c}_{12}L_2)\varphi_K = 0; \\ I_K \ddot{\varphi}_K + (\tilde{c}_{11}L_1^2 + \tilde{c}_{12}L_2^2)\varphi_K + (\tilde{c}_{11}L_1 - \tilde{c}_{12}L_2)z_K = 0. \end{cases}$$

При решении использовались начальные условия при  $t = t_0$ :  $z_K = z_{K0}$ ;  $\dot{z}_K = \dot{z}_{K0}$ ;  $\varphi_K = \varphi_{K0}$ ,  $\dot{\varphi}_K = \dot{\varphi}_{K0}$ . Используя вышеприведенные параметры системы, получим следующие характеристики собственных колебаний подпрыгивания и галопирования кузова: период, амплитуда и частота колебаний кузова равны  $T_1 \approx 0,459$  (сек.),  $\lambda_1 \approx 1,47 \cdot 10^{-3}$  (м) и  $n_1 \approx 2,179$  (Гц) соответственно; период, амплитуда и частота галопирования кузова следующие:  $T_2 \approx 0,459$  (сек.),  $\lambda_2 \approx 0,025^0$ ,

$n_2 \approx 2,179$  (Гц). Результаты сравнения линейных и угловых смещений кузова приведены на рис. 3, 4.

На рис. 3 и 4 сплошной линией обозначены перемещения кузова системы с шестью степенями свободы, а пунктирной – с двумя.

Согласно расчетам, линейные и угловые отклонения кузова, имеющего шесть и две степени свободы, отличаются не более чем на 10 %, что говорит о том, что можно заменить исследование системы с шестью степенями свободы системой с двумя степенями свободы.

#### Литература

1. Булгаков Б.В. Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. 891 с.
2. Вершинский С.В., Данилов В.Н., Хусидов В.Д. Динамика вагона. М.: Транспорт, 1991. 360 с.
3. Гарг, В.К., Дуккипати Р.В. Динамика подвижного состава: пер. с англ. М.: Транспорт, 1988. 391 с.
4. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М.: Машиностроение, 1967. 316 с.