корни исходного многочлена, то необходимо разделить исходный многочлен на этот остаток с целью выделения многочлена $f(z)$, содержащего все корни исходного многочлена, кроме кососимметрических. В результате будет получен сам многочлен $f(z)$.

С помощью алгоритма Евклида (АЕ) эти многочлены необходимо разбить на произведение «простых» многочленов, содержащих все корни исходных многочленов, имеющих одинаковую кратность и взятых по одному.

Найти расположение корней «простых» многочленов, имеющих только кососимметричные корни относительно мнимой оси, с помощью квадрирования корней и теоремы Штурма, как это показано выше.

Найти количество отрицательных и положительных действительных корней «простых» многочленов, не имеющих кососимметричных корней, с помощью теоремы Штурма.

Сопоставляя результаты, можно вычислить число комплексных корней многочлена $f(z)$, лежащих в левой и правой полуплоскостях.

Замечание 3. Для того, чтобы доказать абсолютную устойчивость исходного многочлена, достаточно показать, что все его корни лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Для того, чтобы доказать устойчивость исходного многочлена, имеющего, кроме корней, лежащих в левой полуплоскости, еще и чисто мнимые корни, достаточно показать, что эти корни не являются кратными.

Выводы. Метод дает вычисление числа чисто мнимых корней.

Литература

1. Метод понижения порядка при исследовании динамических свойств систем автоматического регулирования / Л.Д. Блистанова [и др.] // Автоматика и телемеханика. 2005. № 2. С. 17-22.

2. Зубов А.В., ЗубовН.В., Лаптинский В.Н. Динамика управляемых систем. СПб.: ВВМ, 2008. 336 с.

3. Зубов И.В., Зубов Н.В., Стрекопытова М.В. Анализ управляемых систем и равновесных движений. СПб.: СПбГУ, 2009. 326 с.

4. Зубов А.В., Зубов Н.В. Динамическая безопасность управляемых систем. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2009. 172 с.

УДК 517.929

М.Б. Авдеева, А.В. Зубов*, О.А. Зубова, В.А. Петрова

УСТОЙЧИВОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

При изучении динамики управляемых систем важнейшим вопросом является характер предельного поведения решений. Существование предельного режима в виде инвариантного множества является основой для построения управляемых систем, обладающих целевым множеством фазовых состояний. Обеспечение существования ограниченного предельного режима является основной задачей конструирования инженерных систем.

Ключевые слова: устойчивость движения, условие оптимальности, траектория, функция, пространство, инвариантное множество, допустимое управление, время, алгебраическое уравнение.

Основатель современной теории устойчивости А.М. Ляпунов неоднократно отмечал, что устойчивость движения нужно понимать в определенном смысле. И ясно, что распространение представлений о ненаблюдаемости неустойчивых положений равновесия на понятие об устойчивости движения можно делать только с большой осторожностью.

Важнейшим аспектом является рассмотрение широкого класса уравнений динамики с достаточно простой структурой, так как именно структура уравнений определяет возможность их инженерной реализации.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}_s = f_s(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_r,t), \quad s=1,\ldots,n. \qquad (1)$$

* - автор, с которым следует вести переписку.

Считаем, что вектор управлений $U=(u_1,...,u_r)$ принадлежит множеству вектор-функций G, которое называется множеством допустимых управлений. Вектор фазовых переменных $X=(x_1,...,x_n)$ принадлежит вещественному евклидову пространству E_n, функции f_s обеспечивают существование и единственность решений системы (1). Задачи управления весьма разнообразны [1].

На практике применяются последовательности случайных чисел, равномерно распределенные на интервале (0, 1) или последовательности целых чисел из множества $1,...,L$, получаемые с помощью чисел из интервала (0, 1) по формуле

$$N=[\alpha L]+1,$$

где $[\mu]$ – целая часть μ.

При получении последовательности случайных чисел используются рекуррентные соотношения, позволяющие получать целые числа из множества $0,...,m-1$, где m – число, обычно равное или на единицу большее, чем число, которое можно разместить в машинном слове. Числа, равномерно распределенные на интервале (0, 1), получают делением элементов полученной последовательности на число m.

Наилучшие из известных программных генераторов случайных чисел (ПГСЧ) основаны на применении рекуррентного соотношения

$$x_{n+1}=ax_n+c\,(\mathrm{mod}\,m), \tag{2}$$

где $x_0,x_1,...$ – целые числа из множества $0,...,m-1,a$ – множитель, c – слагаемое или приращение, m – модуль сравнения. Последовательность целых чисел $x_0,x_1,x_2,...$, полученная с помощью соотношения (2), называется линейной конгруэнтной последовательностью. Как было указано выше, случайные числа из интервала (0, 1) могут быть получены по формуле

$$x_i=\frac{x_i}{m}.$$

Можно рассматривать числовые последовательности, связанные с линейной конгруэнтной последовательностью и другими соотношениями. Рассмотрим последовательность чисел $y_0,y_1,...$ из интервала $(0,2\pi)$, связанную с линейной конгруэнтной последовательностью соотношением [2]

$$y_i=\frac{x_i}{m}2\pi. \tag{3}$$

Свяжем последовательность $y_0,y_1,...$ с последовательностью значений некоторой комплекснозначной функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t_i)=\cos y_i+i\sin y_i,\quad i=0,1,...,$$

где $t_i=i$.

Исследуем вид функции $\varphi(t)$. Преобразуем рекуррентное соотношение (2) с тем, чтобы получить представление X_n в явном виде

$$X_n=\frac{1}{b}a^n(x_0b+c)+\frac{c}{b}\quad(\mathrm{mod}\,m),$$

или

$$X_n=a^nx_0+\frac{a^n-1}{a-1}c\quad(\mathrm{mod}\,m),$$

где $b=a-1$.

Операцию $y=x\,(\mathrm{mod}\,m)$ аналитически можно выразить следующим образом:

$$y=\frac{m}{2\pi}\arg\exp(i\frac{2\pi}{m}x).$$

Рассмотрим комплекснозначную функцию действительного аргумента

$$\varphi(t)=e^{i2\pi/m}(\frac{1}{b}a+(bx_0+c)-\frac{c}{b}).$$

Рассмотрим также связанную с ней действительную функцию

$$f(t)=\frac{m}{2\pi}\arg\varphi(t).$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Значения функции $\varphi(t)$ в целочисленных точках $t_0=0,t_1=1,...$ связаны с последовательностью (3), полученной с помощью линейной конгруэнтной последовательности, следующим образом:

$$\varphi(t_i)=\cos y_i+i\sin y_i.$$

Последовательность значений функции $f(t)$ в целочисленных точках $0,1,2,...$ совпадает с линейной конгруэнтной последовательностью $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Таким образом, построена в явном аналитическом виде функция, порождающая те же значения, что и линейная конгруэнтная последовательность. Рассмотрим основные свойства этой функции.

Определение 1. Функция $f(t)$, заданная и непрерывная при $t \in (-\infty, +\infty)$, называется рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $L_\varepsilon > 0$ такое, что в каждом интервале $(\alpha, \alpha + L_\varepsilon)$ действительной оси $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ для любого действительного числа t существует число τ_t, удовлетворяющее условию [3]

$$| f(t+\tau_t) - f(t) | < \varepsilon .$$

Если число τ можно при любом $\varepsilon > 0$ выбрать не зависящим от t, то $f(t)$ является почти периодической функцией по Бору.

Теорема 2. Если $f(t) \in R_f$, то функция $f(t)$ ограничена.

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Выберем L_ε в соответствии с определением 1. Положим $c = \sup\limits_{t \in [0, L_\varepsilon]} | f(t) |$. Тогда $c < +\infty$ ввиду непрерывности функции $f(t)$. Пусть t – любое конечное действительное число. Выберем в интервале $(-t, -t + L_\varepsilon)$ число t_τ согласно определению 1. Тогда будем иметь, с одной стороны, $t + \tau_t \in [0, L_\varepsilon]$, а с другой стороны, $| f(t+\tau_t) - f(t) | < \varepsilon$. Отсюда найдем, что $| f(t) | < c + \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. Множество R_f есть полное пространство в смысле равномерной сходимости на действительной оси.

Доказательство. Пусть дана такая последовательность функций $f_n(t) \in R_f$, что $f_n(t)$ равномерно сходится к функции $f(t)$ при $t \in (-\infty, +\infty)$. Покажем, что $f(t) \in R_f$. По числу $\varepsilon / 3$ в силу равномерной сходимости можно указать такое n_0, что

$$| f(t) - f_{n_0}(t) | < \varepsilon / 3 \quad \forall t \in (-\infty, +\infty) \text{ [4].}$$

По определению 1 для числа $\varepsilon / 3$ можно указать такую величину L_ε, что будет $| f_{n_0}(t+\tau_t) - f_{n_0}(t) | < \varepsilon / 3$, где τ_t – некоторая величина из интервала $(\alpha, \alpha + L_\varepsilon)$, соответствующая данному t. Оценим разность:

$$| f(t+\tau_t) - f(t) | \le | f(t+\tau_t) - f_{n_0}(t+\tau_t) | +$$
$$+ | f(t) - f_{n_0}(t) | + | f_{n_0}(t+\tau_t) - f_{n_0}(t) | < \varepsilon.$$

Следовательно, $\tau, \varepsilon > 3$ – почти периоды функции $f_{n_0}(t)$ является τ, ε – почти периодами функции $f(t)$. Таким образом, $f(t) \in R_f$, , что и требовалось доказать.

Определение 3. Функция $f(t)$, заданная и непрерывная при $t \in (-\infty, +\infty)$, называется рекуррентной в положительном направлении, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать число L_ε такое, что в каждом интервале действительной оси $(\alpha, \alpha + L_\varepsilon)$, где $\alpha \in (\alpha_0, +\infty)$, для любого действительного числа существует число τ_t, удовлетворяющее условию $| f(t+\tau_t) - f(t) | < \varepsilon$.

Подобное определение можно ввести для функций, рекуррентных в отрицательном направлении.

Теорема 4. Функция $\varphi(t)$ является рекуррентной в положительном направлении, функция $f(t)$ является рекуррентной в положительном направлении [5].

Литература

1. Зубов В.И. Теория колебаний. М.: Высшая школа, 1979. 400 с.

2. Зубов И.В. Модели с несколькими неустойчивыми положениями равновесия в динамике пучков заряженных частиц, Ninth Intl. Workshop BDO2002, abstracts&program, Saint-Petersburg State Univ. 2002. P. 88.Зубов И.В. Устойчивость стационарных режимов процессов и аппаратов ЦБП. Конспект лекций. – Л.: Ленингр. Лесотех. Акад., 1983.

3. А.В. Зубов, Н.В. Зубов, А.В. Мухин. Релейно-импульсные управления и стабилизация динамических систем. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2002, 170 с.

4. А.В. Зубов, Н.В. Зубов. Динамическая безопасность управляемых систем. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2009. 172 с.