ставлены гиперболическими уравнениями (1) – (12).

4. Передача электрической энергии по каждому линейному проводу трехпроводной ЛЭП обеспечивается тремя парами волн электромагнитного поля, каждая из которых характеризуется своей постоянной распространения и своим комплектом собственных и взаимных волновых сопротивлений.

5. Закон распространения фазного напряжения и линейного тока по каждому линейному проводу трехпроводной ЛЭП есть результат суммирования законов распространения каждой из трех пар волн электромагнитного поля по этому проводу; причем, участие каждой пары волн практически равнозначно и не может быть игнорировано.

6. Количественная и качественная оценка распространения электрической энергии вдоль трехпроводной ЛЭП зависит от вторичных и, в конечном счете, от первичных параметров линии. В процессе исследования выявлено, что, например, при увеличении емкости между одним из линейных проводов и заземленными конструктивными элементами ЛЭП более 700 мкФ на частоте 15-й гармонической составляющей в линиях протяженностью более 800 км величины напряжений и токов заметно возрастают, а величина взаимной индуктивности между линейными проводами, оказывается, на оценку распространения напряжения и тока существенного влияния не оказывает.

Литература

1. Большанин Г.А. Распределение электрической энергии пониженного качества по участкам электроэнергетических систем. В 2 кн. Братск: БрГУ, 2006. Т. 2. 807 с.

2. Большанин Г.А., Марьясова Е.Г. Характеристическое уравнение однородного участка трехфазной трехпроводной ЛЭП // Системы. Методы. технологии. 2009. № 2. С. 60-62.

УДК 517.929

С.В. Зубов*, М.В. Стрекопытова, С.А. Дутов

ОПЕРАЦИЯ СДВИГА И ОБЩАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

На основе метода понижения порядка излагается алгоритм вычисления числа чисто мнимых корней у характеристического многочлена. Решение этой задачи позволит исследовать достаточно тонкий вопрос об устойчивости линейной системы в том случае, когда характеристический многочлен имеет, кроме корней, лежащих в левой полуплоскости, чисто мнимые, но не кратные корни. В статье приведена общая методика исследования качественной картины распределения корней произвольного многочлена на комплексной плоскости.

Ключевые слова: чисто мнимый корень, кратность, комплексная плоскость, многочлен, устойчивость, линейная система.

Статья актуальна в определении алгоритма вычисления числа чисто мнимых корней.

Покажем теперь, как использовать метод понижения порядка (МПП) в случае, когда при его применении встречается многочлен, у которого коэффициент при первой степени аргумента равен нулю $A_1 = 0$. Пусть задан многочлен $F(z)$ степени n, не имеющий нулевых корней, к которому МПП не применим

$$F(z) = a_0 + a_2 z^2 + \ldots + a_{2p+1} z^{2p+1} + \ldots + a_n z^n, \quad (1)$$

т. е. для общности положим, что не только $a_1 = 0$, но и

$$a_3 = \ldots = a_{2p-1} = 0, \ a_{2p+1} \neq 0, \ p \geq 1.$$

Перепишем этот многочлен в виде

$$F(z) = g(z) + z^{2p} h(z), \quad (2)$$

$$g(z) = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots, \ h(z) = a_{2p+1} z + a_{2p+3} z^3 + a_{2p+5} z^5 + \ldots$$

* - автор, с которым следует вести переписку.

Определение 1. [1] Операцией сдвига будем называть операцию, преобразующую многочлен (2) в многочлен вида

$$f(z) = g(z) + (-1)^p h(z). \qquad (3)$$

Справедливы теоремы.

Теорема 1. Операция сдвига оставляет множество кососимметричных корней произвольного многочлена без изменений, т. е. кососимметричные корни многочлена (2) совпадают с кососимметричными корнями многочлена (3) и наоборот. Если операция сдвига применена к многочлену, не имеющему нулевых корней, то получится многочлен, также не имеющий нулевых корней.

Доказательство. Очевидно, что все кососимметричные корни многочлена (3) являются общими корнями многочленов $g(z)$ и $z^{2p}h(z)$, и наоборот. Так как общие корни многочленов $g(z)$ и $(-1)^p h(z)$ совпадают с общими корнями многочленов $g(z)$ и $z^{2p}h(z)$, то кососимметричные корни многочлена (3) являются кососимметричными корнями многочлена (2) и наоборот. Это вытекает из того, что все кососимметричные корни многочлена (3) являются общими корнями многочленов $g(z)$ и $(-1)^p h(z)$ и наоборот.

Доказательство второй части теоремы вытекает из того, что свободный член исходного многочлена при операции сдвига остается без изменений. Теорема доказана.

Теорема 2. Для многочленов, не имеющих нулевых корней, ОС обладает следующими свойствами:

1) если ОС применить к многочлену (2) четной степени, то получившийся многочлен (3) имеет такое же число корней, лежащих в правой (левой) полуплоскости, что и исходный многочлен;

2) если в результате применения ОС к многочлену (2) нечетной степени n_F получился многочлен (3) также нечетной степени n_f, то у получившегося многочлена число корней, лежащих в левой (правой) полуплоскости, по сравнению с исходным многочленом (2) уменьшается на одну и ту же величину $(n_F - n_f)/2$;

3) если в результате применения ОС к многочлену (2) нечетной степени n_F получился многочлен (3) четной степени n_f, то число корней этого многочлена, лежащих в правой полуплоскости m_f, зависит от знаков коэффициентов при старших членах в многочленах (2), (3) и величины сдвига p следующим образом:

$$m_f = m_F - (n_F - n_f - 1)/2$$

при $sign(-1)^{p+(n_F-1)/2} a_{n_F} = sign(-1)^{n_f/2} a_{n_f}$;

$$m_f = m_F - (n_F - n_f + 1)/2$$

при $sign(-1)^{p+(n_F-1)/2} a_{n_F} \neq sign(-1)^{n_f/2} a_{n_f}$.

Доказательство. Если многочлен $F(z)$ имеет кососимметричные корни, в том числе и чисто мнимые, то его можно написать в виде

$$F(z) = r(z)F_0(z) = r(z)(g_0(z) + z^{2p}h_0(z)),$$

где $r(z)$ – многочлен, содержащий все кососимметричные корни многочлена $F(z)$, в том числе и чисто мнимые, а многочлен $F_0(z)$ не содержит таких корней. Если применить к этому многочлену ОС, то получим многочлен

$$f(z) = r(z) f_0(z) = r(z)(g_0(z) + (-1)^p h_0(z)).$$

Таким образом, результат применения ОС к многочлену $F(z)$ не изменится, если ОС применить вначале к многочлену $F_0(z)$, не имеющему чисто мнимых корней, а затем умножить результат на многочлен $r(z)$. Отсюда вытекает, что изменение числа корней многочлена $F(z)$, лежащих в левой (правой) полуплоскости в результате применения ОС, не зависит от того, есть ли у многочлена $F(z)$ чисто мнимые корни. Поэтому далее будем считать, что у многочлена $F(z)$ нет чисто мнимых корней для того, чтобы можно было использовать критерий Михайлова (КМ).

Дальнейшее доказательство теоремы основано на анализе годографов Михайлова многочленов (2) и (3)

$$\begin{aligned} F(i\omega) &= \bar{g}(\omega) + i(-1)^p \omega^{2p} \bar{h}(\omega), \\ f(i\omega) &= \bar{g}(\omega) + i(-1)^p \bar{h}(\omega), \\ \bar{g}(\omega) &= a_0 - a_2\omega^2 + \ldots \\ &\ldots + (-1)^k a_{2k}\omega^{2k} + \ldots, \\ \bar{h}(\omega) &= a_{2p+1}\omega - a_{2p+3}\omega^3 + \ldots \\ &\ldots + (-1)^k a_{2(p+k)+1}\omega^{2k+1} + \ldots . \end{aligned} \qquad (4)$$

Пусть $0=\omega_1<\ldots<\omega_s$ – вещественные корни многочленов $\bar{g}(\omega)$ и $(-1)^p\bar{h}(\omega)$, заданные в порядке их возрастания. Очевидно, что эти корни совпадают с корнями многочленов $\bar{g}(\omega)$ и $(-1)^p\omega^{2p}\bar{h}(\omega)$, и наоборот.

Отсюда вытекает, что приращение аргументов годографов Михайлова этих многочленов при изменении ω от 0 до $+\infty$ отличается лишь на участке от ω_s до $+\infty$. Путем анализа этого приращения и использования КМ легко установить справедливость всех утверждений теоремы.

Замечание 1. Очевидно, что в результате многократного применения МПП и, если это необходимо, ОС к произвольному многочлену, не имеющему нулевых корней, будет получен остаток, порождающий многочлен первой степени или многочлен, имеющий только кососимметричные корни. В первом случае задача исследования будет решена, т. к., учитывая свойства МПП и ОС, можно легко вычислить число корней исходного многочлена, лежащих в левой (правой) полуплоскости, опираясь на свойства МПП и ОС (теоремы 1, 2). Во втором случае полученный в качестве остатка многочлен может содержать не только чисто мнимые, но и другие кососимметричные корни (действительные или комплексные). Тогда необходимо продолжить исследование положения корней этого многочлена относительно мнимой оси.

Рассмотрим многочлен, который имеет только кососимметричные корни и не имеет нулевых корней

$$F(z)=a_0+a_2z^2+\ldots+a_{2n}z^{2n}. \qquad (5)$$

Выше было показано, что с помощью алгоритма Евклида (АЕ) этот многочлен можно разбить на произведение «простых» многочленов, содержащих все корни исходного многочлена, взятые по одному и имеющие одинаковую кратность (это следует из теоремы 2).

Исходя из этого, будем считать, что все кососимметричные корни многочлена $F(z)$ являются простыми. Тогда их можно представить в виде:

$$\pm\gamma_i\,(i=1,\ldots,p);\ \ \pm i\Delta_j\,(j=1,\ldots,q);$$
$$\pm\rho_k\exp(\pm i\varphi_k)\,(k=1,\ldots,r),$$
$$0<\varphi_k<\pi/2,\ \ p+q+2r=n,$$

где величины γ_i различны между собой, величины Δ_j различны между собой, и пары (ρ_k,φ_k) также различны между собой.

Используя методику Лобачевского квадрирования корней многочлена, можно написать [86]

$$\begin{aligned}&F(z)=\\&=a_{2n}\prod(z\pm\gamma_i)(z\pm i\Delta_j)(z\pm\rho_k\exp(\pm i\varphi_k))=\\&=a_0+a_2\mu+\ldots+a_{2n}\mu^n=f(\mu).\end{aligned} \qquad (6)$$

Отсюда вытекает, что многочлен $f(\mu)$ имеет корни:

$$\gamma_i^2\,(i=1,\ldots,p),\ \ -\Delta_j^2\,(j=1,\ldots,q),$$
$$\rho_k^2\exp(\pm i2\varphi_k)\,(k=1,\ldots,r).$$

Для того чтобы определить число отрицательных и положительных действительных корней многочлена $f(\mu)$, достаточно построить систему Штурма для этого многочлена и вычислить число перемен знака в этой системе на участке $(-\infty,0)$ и $(0,+\infty)$, т. е. величины $q=W(-\infty)-W(0)$ и $p=W(0)-W(+\infty)$, которые в силу теоремы Штурма и равны соответственно числу отрицательных и положительных действительных корней этого многочлена. Таким образом, будет получено количество действительных – $2p$, чисто мнимых – $2q$ и комплексных – $4r=2(n-p-q)$ кососимметричных корней исходного многочлена $F(z)$.

Замечание 2. Методика исследования расположения корней исходного характеристического многочлена $F(z)$ относительно мнимой оси должна заключаться в следующем.

Необходимо применить МПП к этому многочлену, используя, если это необходимо, ОС на отдельных шагах этого алгоритма. В результате получим, в общем случае, остаток в виде многочлена $r(z)$ и количество корней многочлена $f(z)$ (не имеющего кососимметричных корней), лежащих в левой $\operatorname{Re} z<0$ и правой $\operatorname{Re} z>0$ полуплоскости. Напомним, что эти многочлены связаны равенством $F(z)=f(z)\cdot r(z)$, причем возможно, что $r(z)\equiv 1$, и тогда п. 2 можно пропустить.

Если в результате применения этого алгоритма получился остаток $r(z)$ в виде многочлена, содержащего все кососимметрические корни исходного многочлена, то необходимо разделить исходный многочлен на этот остаток с целью выделения многочлена $f(z)$, содержащего все корни исходного многочлена, кроме кососимметрических. В результате будет получен сам многочлен $f(z)$.

С помощью алгоритма Евклида (АЕ) эти многочлены необходимо разбить на произведение «простых» многочленов, содержащих все корни исходных многочленов, имеющих одинаковую кратность и взятых по одному.

Найти расположение корней «простых» многочленов, имеющих только кососимметричные корни относительно мнимой оси, с помощью квадрирования корней и теоремы Штурма, как это показано выше.

Найти количество отрицательных и положительных действительных корней «простых» многочленов, не имеющих кососимметричных корней, с помощью теоремы Штурма.

Сопоставляя результаты, можно вычислить число комплексных корней многочлена $f(z)$, лежащих в левой и правой полуплоскостях.

Замечание 3. Для того, чтобы доказать абсолютную устойчивость исходного многочлена, достаточно показать, что все его корни лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Для того, чтобы доказать устойчивость исходного многочлена, имеющего, кроме корней, лежащих в левой полуплоскости, еще и чисто мнимые корни, достаточно показать, что эти корни не являются кратными.

Выводы. Метод дает вычисление числа чисто мнимых корней.

Литература

1. Метод понижения порядка при исследовании динамических свойств систем автоматического регулирования / Л.Д. Блистанова [и др.] // Автоматика и телемеханика. 2005. № 2. С. 17-22.
2. Зубов А.В., ЗубовН.В., Лаптинский В.Н. Динамика управляемых систем. СПб.: ВВМ, 2008. 336 с.
3. Зубов И.В., Зубов Н.В., Стрекопытова М.В. Анализ управляемых систем и равновесных движений. СПб.: СПбГУ, 2009. 326 с.
4. Зубов А.В., Зубов Н.В. Динамическая безопасность управляемых систем. СПб.: Изд-во НИИ Химии СПбГУ, 2009. 172 с.

УДК 517.929

М.Б. Авдеева, А.В. Зубов*, О.А. Зубова, В.А. Петрова

УСТОЙЧИВОСТЬ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

При изучении динамики управляемых систем важнейшим вопросом является характер предельного поведения решений. Существование предельного режима в виде инвариантного множества является основой для построения управляемых систем, обладающих целевым множеством фазовых состояний. Обеспечение существования ограниченного предельного режима является основной задачей конструирования инженерных систем.

Ключевые слова: устойчивость движения, условие оптимальности, траектория, функция, пространство, инвариантное множество, допустимое управление, время, алгебраическое уравнение.

Основатель современной теории устойчивости А.М. Ляпунов неоднократно отмечал, что устойчивость движения нужно понимать в определенном смысле. И ясно, что распространение представлений о ненаблюдаемости неустойчивых положений равновесия на понятие об устойчивости движения можно делать только с большой осторожностью.

Важнейшим аспектом является рассмотрение широкого класса уравнений динамики с достаточно простой структурой, так как именно структура уравнений определяет возможность их инженерной реализации.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}_s = f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r, t), \quad s = 1, \ldots, n. \quad (1)$$

* - автор, с которым следует вести переписку.