УДК 519.71; 62.50

В.М. Осипов

ТОЧЕЧНЫЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ N-МЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается математическое моделирование задач Коши для N-мерных линейных дифференциальных уравнений методом точечных представлений, использующий точечное представление функций и операторов. При этом полученные точечные модели имеют вид блочных векторно-матричных равенств.

Ключевые слова: метод точечных представлений, точечное моделирование.

Пусть дана для решения на отрезке $[0,T]$ задача Коши

$$\frac{dX(t)}{dt} + A(t)X(t) = U(t); \quad X(0) = X_0, \quad (1)$$

где $X(t)$ есть n-вектор-функция, а $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$ – матричная функция ($n \times n$) с непрерывными на $[0,T]$ элементами. Будем предполагать также покоординатную непрерывность и вектор-функции $U(t)$.

Интегрируя (1), получим эквивалентное интегральное уравнение:

$$X(t) = \int_0^t A(t)X(t)dt = \int_0^t U(t)dt + X_0. \quad (2)$$

Введем безразмерную переменную $\tau = \frac{t}{T}$, рассматривая $T < \infty$ как параметр, причем, условимся, что в аргументах функций его явно указывать не будем.

Уравнение (2) записывается в виде

$$X(\tau) + T\int_0^\tau A(\tau)X(\tau) = F(\tau) + X_0; \quad \tau \in [0,1], \quad (3)$$

где

$$X(\tau) = X(T\tau) = Colon\left[x_1(\tau),\dots x_i(\tau),\dots x_n(\tau)\right];$$
$$X(0) = X_0, \quad (4)$$

а

$$F(\tau) = T\int_0^\tau U(T\tau)d\tau = T\int_0^\tau U(\tau)d\tau; \quad \tau \in [0,1],$$

$U(\tau)$ – заданная n-вектор-функция:

$$U(\tau) = Colon\left[u_1(\tau),\dots u_i(\tau),\dots u_n(\tau)\right].$$

Предполагается, естественно, что введенные интегралы существуют, и существует решение (4) задачи (3), что означает выполнение всех условий теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения (1) [1]. Это означает также его определение в узлах N-сеток I и II рода, причем при любых N.

Найдем точечное представление интегрального уравнения (3), ассоциированное с N-сеткой I рода: $\tau_\nu^{(N)} = \frac{2\nu - 1}{2N}$ $\left(\nu = \overline{1,N}\right)$. Так, руководствуясь [2], будем иметь:

$$X(\tau) \xrightarrow{T_I} \overline{X}_{TI} = $$
$$= Colon\left[X_{1T} \vdots \cdots \vdots X_{\nu T} \vdots \cdots \vdots X_{NT}\right], \quad (5)$$

$$T\int_0^\tau A(\tau)X(\tau)d\tau \xrightarrow{T_I} \left[J_N(Z) \otimes E_n\right] D_N\left[A(\tau_\nu^N)\right] \cdot \overline{X}_{TI},$$

$$F(\tau) = T\int_0^\tau U(\tau)d\tau \xrightarrow{T_I} \overline{F}_{TI} =$$
$$= Colon\left[F_{1T} \vdots \cdots \vdots F_{\nu T} \vdots \cdots \vdots F_{NT}\right] = \quad (6)$$
$$= \left[J_N(Z) \otimes E_n\right] \cdot \overline{U}_{TI},$$

где

$$U(\tau) \xrightarrow{T_I} \overline{U}_{TI} = Colon\left[U_{1T} \vdots \cdots \vdots U_{\nu T} \vdots \cdots \vdots U_{NT}\right];$$

$\left[J_N(Z) \otimes E_n\right]$ – блочная матрица, реализующая операцию интегрирования в векторном пространстве точечно-векторных отображений вектор-функции из $M_n(0,1)$ [2]; $D_N\left[A(\tau_\nu^N)\right] = Diag\left[A(\tau_1^{(N)}),\dots A(\tau_\nu^N),\dots A(\tau_N^N)\right]$ – есть точечное представление функциональной матрицы $A(\tau)$ в узлах N-сетки I рода.

Точечное представление постоянного n-вектора $X(0) = X_0$ имеет вид

$$X(0)\xrightarrow{T_I} Colon\left[X_0 \vdots \cdots \vdots X_0 \vdots \cdots \vdots X_0\right] = \left(\bar{1}_T^{(N)} \otimes E_n\right) X_0 = \overline{X}_{0T}. \tag{7}$$

Нам понадобятся еще следующие тождества, отмеченные в [2]:

$$\begin{aligned}\left[J_N(Z)\otimes E_n\right] &= \lambda_0\left[(E_N+Z)\otimes E_n\right]\left[\left(E_N-Z\right)^{-1}\otimes E_n\right] = \\ &= \lambda_0\left[\left(E_N-Z\right)^{-1}\otimes E_n\right]\cdot\left[(E_N+Z)\otimes E_n\right],\end{aligned} \tag{8}$$

$$\left[E_N\otimes E_n\right] = \left[\left(E_N-Z\right)^{-1}\otimes E_n\right]\left[\left(E_N-Z\right)\otimes E_n\right] = E_{Nn}. \tag{9}$$

Переходя в уравнении (3) к точечным представлениям, получаем

$$\overline{X}_{TI} + \left[J_N(Z)\otimes E_n\right] D_N\left[A(\tau_\nu^N)\right]\cdot \overline{X}_{TI} = \overline{F}_{TI} + \overline{X}_{0T}. \tag{10}$$

Далее, имея в виду тождественное представление

$$\overline{X}_{TI} = E_{Nn}\cdot\overline{X}_{TI} = \left[E_N\otimes E_n\right]\overline{X}_{TI} = \left[\left(E_N-Z\right)^{-1}\otimes E_n\right]\left[\left(E_N-Z\right)\otimes E_n\right]\overline{X}_{TI},$$

следующее из тождества (9), и представление (8), запишем уравнение (10) в виде

$$\begin{aligned}&\left[(E_N-Z)^{-1}\otimes E_n\right]\times \\ &\times\left\{\begin{array}{c}\left[\left(E_N-Z\right)\otimes E_n\right]+ \\ +\lambda_0\left[\left(E_N+Z\right)\otimes E_n\right]\cdot D_N\left[A(\tau_\nu^N)\right]\end{array}\right\}\overline{X}_{TI} = \\ &= \overline{F}_{TI} + \overline{X}_{0T} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\left[(E_N-Z)\otimes E_n\right]+ \\ +\lambda_0\left[\left(E_N+Z\right)\otimes E_n\right]\times \\ \times D_N\left[A(\tau_\nu^N)\right]\end{array}\right\}\overline{X}_{TI} = \\ &= \left[(E_N-Z)\otimes E_n\right]\cdot\left[\overline{F}_{TI} + \overline{X}_{0T}\right].\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь использовано тождество

$$\left[(E_N-Z)\otimes E_n\right]^{-1} = \left[\left(E_N-Z\right)^{-1}\otimes E_n\right].$$

Развернутая запись уравнения (11) с последующими преобразованиями дает:

$$\begin{bmatrix}(\lambda_0 A_1+E_n) & & & & & \\ (\lambda_0 A_1-E_n) & (\lambda_0 A_2+E_n) & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & (\lambda_0 A_{\nu-1}-E_n) & (\lambda_0 A_\nu+E_n) & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & (\lambda_0 A_{N-1}-E_n) & (\lambda_0 A_N+E_N)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{1T} \\ \hline X_{2T} \\ \hline \vdots \\ \hline X_{\nu T} \\ \hline \vdots \\ \hline X_{NT}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}F_{1T}+X_0 \\ \hline F_{2T}-F_{1T} \\ \hline \vdots \\ \hline F_{\nu T}-F_{(\nu-1)T} \\ \hline \vdots \\ \hline F_{NT}-F_{(N-1)T}\end{bmatrix} \Rightarrow D_N\left[\left(\lambda_0 A_\nu + E_n\right)\right]\begin{bmatrix}E_n & & & & & & \\ B_1 & E_n & & & & & \\ & B_2 & E_n & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & B_\nu & E_n & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & B_{N-1} & E_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_{1T} \\ \hline X_{2T} \\ \hline \vdots \\ \hline X_{\nu T} \\ \hline \vdots \\ \hline X_{NT}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}E_n & & & & & \\ -E_n & E_n & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & -E_n & E_n & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -E_n & E_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}F_{1T} \\ \hline F_{2T} \\ \hline \vdots \\ \hline F_{\nu T} \\ \hline \vdots \\ \hline F_{NT}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}X_0 \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0\end{bmatrix} \tag{12}$$

Здесь для сокращения записей обозначено:

$$\left.\begin{array}{ll} A_\nu = A(\tau_\nu^{(N)}) \quad (\nu=\overline{1,N}); & a) \\ B_\nu = \dfrac{\lambda_0 A_\nu - E_n}{\lambda_0 A_{\nu+1} + E_n} = & \\ = \left(\lambda_0 A_\nu + E_n\right)^{-1}\left(\lambda_0 A_{\nu+1} - E_n\right) \quad (\nu=\overline{1,(N-1)}). & б) \end{array}\right\} (13)$$

Ведем блочную диагональную матрицу

$$D_N^{-1}\left[\left(\lambda_0 A_\nu + E_n\right)\right] = D_N\left[\left(\lambda_0 A_\nu + E_n\right)^{-1}\right] =$$

$$= Diag\begin{bmatrix} \left(\lambda_0 A_1 + E_n\right)^{-1}, \cdots \left(\lambda_0 A_\nu + E_n\right)^{-1}, \cdots \\ \cdots \left(\lambda_0 A_N + E_n\right)^{-1} \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

естественно, предполагая существование всех обратных матриц

$\left(\lambda_0 A_\nu + E_n\right)^{-1} (n \times n) \quad (\nu=\overline{1,N})$ при любых N.

Обозначим также:

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ B_1 & 0 & & & & & \\ & B_2 & 0 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & B_\nu & 0 & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & B_{N-1} & 0 \end{bmatrix} = \left(Z \otimes E_n\right) \cdot D_N\left[B_\nu\right]; (15)$$

$$\begin{bmatrix} E_n & & & & & & \\ -E_n & E_n & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & -E_n & E_n & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & -E_n & E_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{F_{1T}} \\ \overline{F_{2T}} \\ \vdots \\ \overline{F_{\nu T}} \\ \vdots \\ \overline{F_{NT}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{X_0} \\ \overline{0} \\ \vdots \\ \overline{0} \\ \vdots \\ \overline{0} \end{bmatrix} =$$

$$= [\left(E_N - Z\right) \otimes E_n] \cdot \overline{F}_{TI} + (\overline{e}_1^{(N)} \otimes E_n) X_0,$$

где

$$\overline{e}_1^{(N)} = Colon\left[1, 0, \cdots 0\right]$$

– первый единичный N-вектор.

Таким образом, можем написать следующее уравнение, эквивалентное уравнению (12):

$$\left\{\left(Z \otimes E_n\right) D_N\left[B_\nu\right] + \left(E_N \otimes E_n\right)\right\} \overline{X}_{TI} =$$

$$= D_N\left[\left(\lambda_0 A_\nu + E_n\right)^{-1}\right]\left[\left(E_N - Z\right) \otimes E_n\right]\overline{F}_{TI} +$$

$$+ D_N\left[\left(\lambda_0 A_\nu + E_n\right)^{-1}\right] \cdot \left(\overline{e}_1^{(N)} \otimes E_n\right) X_0. \qquad (16)$$

Или развернуто, в форме системы для блочно-векторных компонент $X_{\nu T} \quad \left(\nu=\overline{1,N}\right)$ решения (5):

$$\left.\begin{array}{l} X_{1T} = \left(\lambda_0 A_1 + E_n\right)^{-1} \cdot F_{1T} + \left(\lambda_0 A_1 + E_n\right)^{-1} X_0 \\ B_1 X_{1T} + X_{2T} = \left(\lambda_0 A_2 + E_n\right)^{-1}\left(-F_{1T} + F_{2T}\right) \\ B_2 X_{2T} + X_{3T} = \left(\lambda_0 A_3 + E_n\right)^{-1} \cdot \left(-F_{2T} + F_{3T}\right) \\ ---------------------- \\ B_{\nu-1} X_{(\nu-1)T} + X_{\nu T} = \left(\lambda_0 A_\nu + E_n\right)^{-1}\left(-F_{(\nu-1)T} + F_{\nu T}\right) \\ -------------------------- \\ B_{N-1} X_{(N-1)T} + X_{NT} = \left(\lambda_0 A_N + E_n\right)^{-1}\left(-F_{(N-1)T} + F_{NT}\right) \end{array}\right\}$$

Это – точечные модели общей задачи Коши (3). Для более простой однородной задачи, когда $U(\tau) \equiv 0 \Rightarrow F(\tau) \equiv 0$:

$$\frac{dX^0(\tau)}{d\tau} + TA(\tau) X^0(\tau) = 0; \qquad X^0(0) = X_0,$$

т. е. интегрального уравнения

$$X^0(\tau) + T\int_0^\tau A(\tau) X^0(\tau) d\tau = X_0$$

будет иметь частный случай точечной модели (16) с той же системной матрицей:

$$\left\{\left(Z \otimes E_n\right) D_N\left[B_\nu\right] + \left(E_N \otimes E_n\right)\right\} \overline{X}_{TI} =$$

$$= D_N\left[\left(\lambda_0 A_\nu + E_n\right)^{-1}\right] \cdot \left(\overline{e}_1^{(N)} \otimes E_n\right) X_0 \qquad (17)$$

или в форме легко решаемой системы уравнений для точечно-векторных компонент решения

$$\overline{X}_{TI}^0 = Colon\left[X_{IT}^0 \vdots \cdots \vdots X_{\nu T}^0 \vdots \cdots \vdots X_{NT}^0\right]:$$

$$\left.\begin{array}{l} X_{1T}^{0}=\left(\lambda_0 A_1+E_n\right)^{-1}\cdot X_0 \\ B_1 X_{1T}^{0}+X_{2T}^{0}=0 \Rightarrow X_{2T}^{0}=-B_1\cdot X_{1T}^{0} \\ \quad B_2 X_{2T}^{0}+X_{3T}^{0}=0 \Rightarrow X_{3T}^{0}=-B_2 X_{2T}^{0}=B_1 B_2\cdot X_{1T}^{0} \\ \quad\quad ---------------------- \\ \quad\quad B_{\nu-1} X_{(\nu-1)T}^{0}+X_{\nu T}^{0}=0 \Rightarrow X_{\nu T}^{0}=(-1)^{\nu-1}\cdot\prod_{i=1}^{\nu-1} B_i\cdot X_{1T}^{0}\ \ (\nu=\overline{2,N}) \end{array}\right\}$$

Таким образом, получаем решение однородной задачи в виде:

$$\left.\begin{array}{ll} X_{1T}^{0}=\left(\lambda_0 A_1+E_n\right)^{-1}\cdot X_0; & \text{а)} \\ X_{\nu T}^{0}=(-1)^{\nu-1}\prod_{i=1}^{\nu-1} B_i\cdot X_{1T}^{0} \quad \left(\nu=\overline{2,N}\right). & \text{б)} \end{array}\right\} \quad (18)$$

Формула б) порождает вычислительный алгоритм рекуррентного типа:

$$X_{\nu T}^{0}=-B_{\nu-1}\left[(-1)^{\nu-2}\prod_{i=1}^{\nu-2} B_i\cdot X_{1T}^{0}\right]=$$

$$=-B_{\nu-1}\cdot X_{(\nu-1)T}^{0} \quad (\nu=\overline{2,N}),$$

причем, по-прежнему:

$$X_{1T}^{0}=\left(\lambda_0 A_1+E_n\right)^{-1}\cdot X_0. \quad (19)$$

Выполняя обращение системной матрицы $\left\{\left(Z\otimes E_n\right)D_N\left[B_\nu\right]+\left(E_N\otimes E_n\right)\right\}=$

$$=\begin{bmatrix} E_n & & & & & \\ B_1 & E_n & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ & & B_\nu & E_n & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ B_1 & \cdots & & \cdots & B_{N-1} & E_n \end{bmatrix}=T_N\left[B_\nu\right] \quad (20)$$

в точечных моделях (16) и (17). Это дает:

$$T_N^{-1}\left[B_\nu\right]=$$

$$\begin{bmatrix} E_n & & & & & & \\ -B_1 & E_n & & & & & \\ B_1 B_2 & -B_2 & E_n & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ (-1)^{\nu-1}\prod_{i=1}^{\nu-1} B_i & (-1)^{\nu-2}\prod_{i=2}^{\nu-2} B_i & \cdots & -B_{\nu-1} & E_n & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ (-1)^{N-1}\prod_{i=1}^{N-1} B_i & (-1)^{N-2}\prod_{i=2}^{N-1} B_i & \cdots & \cdots & B_{N-2}B_{N-1} & -B_{N-1} & E_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

С помощью этой матрицы и учитывая (19), решение однородной задачи (18) получает представление:

$$\overline{X}_{TI}^{0}=T_N^{-1}\left[B_\nu\right]\cdot\begin{bmatrix} X_{1T}^{0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=$$

$$=T_N^{-1}\left[B_\nu\right]\cdot\left(\lambda_0 A_1+E_n\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=$$

$$=T_N^{-1}\left[B_\nu\right]\cdot D_N\left[\left(\lambda_0 A_\nu+E_n\right)^{-1}\right]\cdot\left(\overline{e}_1^{(N)}\otimes E_n\right)X_0. \quad (22)$$

Найдем теперь точечные представления $\overline{X}_{TI}^{0}$ решения задачи (1) или (3) при нулевых начальных условиях (X_0=0). Точечный модуль такой задачи с обозначением (20) системной матрицы и учетом (6) запишется в виде:

$$X^{(U)}(\tau)+T\int_0^\tau A(\tau)X^{(U)}(\tau)\,d\tau=F(\tau)=T\int_0^\tau U(t)dt\xrightarrow{T_I}$$

$$\xrightarrow{T_I}T_N[B_\nu]\cdot\overline{X}_{TI}^{(U)}=$$

$$=D_N\left[\left(\lambda_0 A_\nu+E_n\right)^{-1}\right]\cdot\left[(E_N-Z)\otimes E_n\right]\overline{F}_{TI}=$$

$$=D_N\left[\left(\lambda_0 A_\nu+E_n\right)^{-1}\right]\cdot\left((E_N-Z)J_N(Z)\otimes E_n\right)\overline{U}_{TI};$$

откуда следует:

$$\overline{X}_{TI}^{(U)}=T_N^{-1}[B_\nu]\cdot D_N\left[\left(\lambda_0 A_\nu+E_n\right)^{-1}\right]\times$$
$$\times\left((E_N-Z)J_N(Z)\otimes E_n\right)\overline{U}_{TI}. \qquad (23)$$

Но $\left[(E_N-Z)J_N(Z)\right]=\lambda_0(E_N+Z)$, поэтому окажется

$$\overline{X}_{TI}^{(U)}=T_N^{-1}[B_\nu]\cdot D_N\left[\left(\lambda_0 A_\nu+E_n\right)^{-1}\right]\times$$
$$\times\left(\lambda_0(E_N+Z)\otimes E_n\right)\overline{U}_{TI}.$$

Решение $X(\tau)$ общей задачи Коши (1) или эквивалентной задачи (3), как известно, равно сумме решений однородной задачи $X^0(\tau)$ $\left[U(\tau)\equiv 0\right]$ при ненулевых начальных условиях $\left[X_0\neq 0\right]$ и решения $X^{(U)}(\tau)$ задачи при $U(\tau)\neq 0$, но X_0=0. То же будем иметь и для точечных представлений этих решений:

$$X(\tau)=X^0(\tau)+$$
$$+X^{(U)}(\tau)\to\overline{X}_{TI}^0+\overline{X}_{TI}^{(U)}=\overline{X}_{TI}, \qquad (24)$$

которые определяются формулами (22) и (23).

Выделим особо важный частный случай рассматриваемой задачи Коши, когда матрица $A(\tau)$ оказывается постоянной $\left[A(\tau)=A_{(n\times n)}\right]$, т. е. найдем точечные представления решений задачи для дифференциального уравнения

$$\frac{dX^0(\tau)}{d\tau}+TA(\tau)X(\tau)=T\cdot U(\tau);\qquad X(0)=X_0,$$

являющиеся решениями и эквивалентного интегрального уравнения

$$X(\tau)+TA\int_0^\tau X(\tau)=T\int_0^\tau U(\tau)d\tau+X_0=F(\tau)+X_0.$$

В этом частном случае произойдет существенное упрощение введенных ранее блочных матриц в точечной модели задачи (16), как и самой модели, т. к. определяющие матричные блоки (13) и (14) в этом случае в узлах чебышевской N-сетки I рода $\tau_\nu^{(N)}=\dfrac{2\nu-1}{2N}$ $\left(\nu=\overline{1,N}\right)$ окажутся постоянными. Будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&A_\nu=A(\tau_\nu^{(N)})=A\quad(n\times n)\quad(\forall\nu=\overline{1,N}); && \text{а)}\\
&B_\nu=\frac{\lambda_0 A_\nu-E_N}{\lambda_0 A_{\nu+1}+E_N}=\frac{\lambda_0 A-E_n}{\lambda_0 A+E_n}=B\quad(n\times n)\quad\left(\forall\nu=\overline{1,(N-1)}\right); && \text{б)}\\
&D_N\left[\left(\lambda_0 A_\nu+E_n\right)^{-1}\right]=D_N\left[\left(\lambda_0 A+E_n\right)^{-1}\right]=\left[E_N\otimes\left(\lambda_0 A+E_n\right)^{-1}\right]\ (\forall\nu=\overline{1,N}). && \text{в)}
\end{aligned}\right\}$$

Блочная однодиагональная матрица (15) получает представление

$$(Z\otimes E_n)\cdot D_N[B_\nu]=(Z\otimes B),$$

а системная матрица точечной модели (16) оказывается двудиагональной и блочно-теплицевой:

$$J=\left\{(Z\otimes E_n)D_N[B_\nu]+(E_N\otimes E_n)\right\}=$$
$$=\left[(Z\otimes B)+(E_N\otimes E_n)\right]=T_N(B).$$

Обратная матрица $T_N^{-1}[B]$ будет частным случаем матрицы $T_N^{-1}[B_\nu]$ (21), когда $B_\nu=B$ $\left(\forall\nu=\overline{1,(N-1)}\right)$. Получим блочную теплицеву матрицу вида:

$$T_N^{-1}[B]=\sum_{\nu=1}^{N}(-1)^{\nu-1}\left(Z^{\nu-1}\otimes B^{\nu-1}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} E_n &&&&&& \\ (-B) & E_n &&&&& \\ (-B)^2 & (-B) & E_n &&&& \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots &&& \\ \left(-B\right)^{\nu-1} & & \left(-B\right)^2 & (-B) & E_n && \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \left(-B\right)^{N-1} & \cdots & \left(-B\right)^{\nu-1} & \cdots & (-B)^2 & (-B) & E_n \end{bmatrix}.$$

А точечная модель (16) нашей задачи получает представление:

$$T_N[B]\overline{X}_{TI}^{(U)}=\left[E_N\otimes\left(\lambda_0 A+E_n\right)^{-1}\right]\times$$
$$\times\left[\left(E_N-Z\right)\otimes E_n\right]\overline{F}_{TI}+ \qquad (25)$$
$$+\left[E_N\otimes\left(\lambda_0A+E_n\right)^{-1}\right]\left(\overline{e}_1^{(N)}\otimes E_n\right)X_0.$$

Определятся и точечные модели для отдельных составляющих решение (24) в рассматриваемом частном случае. Для однородной задачи

$$\frac{dX^0(\tau)}{d\tau}+TAX^0(\tau)=0;$$
$$X^0(0)=X_0\Rightarrow X^0(\tau)+TA\int_0^{\tau}X^0(\tau)\,d\tau=X_0, \qquad (26)$$

получим модель:

$$T_N[B]\overline{X}_{TI}^{0}=\left[E_N\otimes\left(\lambda_0A+E_n\right)^{-1}\right]\times$$
$$\times\begin{bmatrix}X_0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\left(\lambda_0A+E_n\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}X_0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \qquad (27)$$

и, следовательно, для точечного представления однородной задачи (26) будем иметь:

$$\overline{X}_{TI}^{0}=T_N^{-1}[B]\cdot\left(\lambda_0A+E_N\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}X_0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=$$
$$=\left(\lambda_0A+E_n\right)^{-1}\times$$
$$\times Colon\left[E_n,(-B),\cdots(-B)^{\nu-1},\cdots(-B)^{N-1}\right]X_0=$$

$$=\frac{E_n}{E_n+\lambda_0A}\cdot\begin{bmatrix}E_n\\ \left(\dfrac{E_n-\lambda_0A}{E_n+\lambda_0A}\right)\\ \vdots\\ \left(\dfrac{E_n-\lambda_0A}{E_n+\lambda_0A}\right)^{\nu-1}\\ \vdots\\ \left(\dfrac{E_n-\lambda_0A}{E_n+\lambda_0A}\right)^{N-1}\end{bmatrix}X_0= \qquad (28)$$
$$=\left(\lambda_0A+E_n\right)^{-1}\cdot T_N^{-1}[B]\cdot\left(\overline{e}_1^{(N)}\otimes E_n\right)X_0.$$

Здесь представление для матрицы $-B=\dfrac{E_n-\lambda_0A}{E_n+\lambda_0A}$ записано в форме дробно-рациональной функции от матрицы $A(n\times n)$.

Однородная задача (26) имеет точное решение

$$X^0(\tau)=e^{-TA\tau}X_0=$$
$$=\exp(-TA\tau)\cdot X_0 \qquad \tau\in[0,1] \qquad (29)$$

и, следовательно, его точечное представление, определяемое значениями экспоненты (29) в узлах чебышевской N-сетки I рода

$$\exp\left(-TA\tau_\nu^{(N)}\right)=\exp\left(-\frac{T}{2N}A(2\nu-1)\right)=$$
$$=\exp\left(-\lambda_0 A(2\nu-1)\right)\qquad\left(\nu=\overline{1,N}\right)$$

запишется в виде

$$X^0(\tau)=\exp(-TA\tau)\times$$
$$\times X_0\xrightarrow{T_I}\begin{bmatrix}\exp(-\lambda_0 A)\\ \vdots\\ \exp\left(-\lambda_0 A(2\nu-1)\right)\\ \vdots\\ \exp\left(-\lambda_0 A(2N-1)\right)\end{bmatrix}\cdot X_0= \qquad (30)$$
$$=\overline{X}^0_{TI}=\begin{bmatrix}X^0_{1T}\\ \vdots\\ X^0_{\nu T}\\ \vdots\\ X^0_{NT}\end{bmatrix}.$$

Покомпонентно оно будет приближенно равно точечному представлению (28), полученному по точечной модели (27) однородной задачи; т. е. будем иметь приближенные равенства

$$\exp\left(-\lambda_0 A(2\nu-1)\right)\approx$$
$$\approx\frac{E_n}{E_n+\lambda_0 A}\cdot\left(\frac{E_n-\lambda_0 A}{E_n+\lambda_0 A}\right)^{\nu-1}= \qquad (31)$$
$$=\left(E_n+\lambda_0 A\right)^{-1}(-B)^{\nu-1}\qquad\left(\nu=\overline{1,N}\right),$$

тем более точные, чем меньше $\lambda_0=\dfrac{T}{2N}$ – шаг дискретизации $\Delta t=\dfrac{T}{N}=2\lambda_0$ задачи и, следовательно, точность будет расти с ростом N (при фиксированном T).

Отметим, что из формул (19), определяющих точечное решение однородной нестационарной задачи, возникают рекуррентные представления для векторных координат – решение (30) – и в нашем стационарном случае.

$$\begin{aligned}&X^0_{\nu T}=-B_{\nu-1}\cdot X^0_{(\nu-1)T}\quad\left(\nu=\overline{2,N}\right),&&\text{а)}\\&X^0_{1T}=\left(\lambda_0 A+E_n\right)^{-1}\cdot X_0.&&\text{б)}\end{aligned}\qquad(32)$$

Обратимся теперь к точечной модели неоднородной стационарной задачи, когда

$$F(\tau)=T\int_0^\tau U(\tau)d\tau\xrightarrow{T_I}\overline{F}_{TI}=$$
$$=\left[J_N(Z)\otimes E_n\right]\cdot\overline{U}_{TI}\neq 0$$

но нулевые начальные условия (X_0=0).

Модель получает вид, следующий из (23) и (25) с учетом (32):

$$T_N[B]\overline{X}^{(U)}_{TI}=\left[E_N\otimes\left(\lambda_0 A_\nu+E_n\right)^{-1}\right]\times$$
$$\times\left[\lambda_0\left(E_N+Z\right)\otimes E_n\right]\cdot\overline{U}_{TI},$$

откуда, в связи с перестановочностью блочных теплицевых матриц, будут следовать и представления для второй точечной составляющей:

$$\begin{aligned}\overline{x}^{(U)}_{TI}&=T_N^{-1}[B]\left[E_N\otimes\left(\lambda_0 A+E_n\right)^{-1}\right]\times\\&\times\left[\lambda_0\left(E_N+Z\right)\otimes E_n\right]\overline{U}_{TI}=\\&=\left(E_n+\lambda_0 A\right)^{-1}\cdot T_N^{-1}[B]\times\\&\times\left[\lambda_0\left(E_N+Z\right)\otimes E_n\right]\cdot\overline{U}_{TI}=\\&=\left[\lambda_0\left(E_N+Z\right)\otimes E_n\right]\times\\&\times\left(E_n+\lambda_0 A\right)^{-1}\cdot T_N^{-1}[B]\cdot\overline{U}_{TI}.\end{aligned}\qquad(33)$$

Рассматриваемая стационарная задача

$$\frac{dX^{(U)}(t)}{dt}+AX^{(U)}(t)=U(t);$$
$$x^{(U)}(0)=0;\qquad t\in[0,T]$$

имеет, как известно, точное решение, представляемое в виде интервала свертки – интегрального преобразования

$$X^{(U)}(t)=\int_0^t G(t-\xi)U(\xi)d\xi, \qquad (34)$$

в котором в качестве разностного ядра выступает матричная экспонента:

$$G(t-\xi)=e^{-A(t-\xi)}=\exp\left(-A(t-\xi)\right), \qquad (35)$$

являющаяся, как функция аргумента $t\in[0,T]$ $\left[G(t)=e^{-At}\right]$, и решением задачи при

$U(t)=X_0\delta(t)$ – δ-импульсной векторной функции.

В этом случае получим:

$$X^{(\delta)}(t)=\int_0^t e^{-A(t-\xi)}X_0\delta(\xi)\,d\xi=e^{-At}\cdot X_0=e^{-TA\tau}\cdot X_0,$$

т. е. решение однородной задачи при начальном условии $X_0\neq 0$. С точки зрения теории линейных динамических систем этот факт имеет принципиальное значение.

А сейчас отметим точечное представление сверточного преобразования (34) с ядром (35), т. е. точечное представление точного решения нашей задачи как интеграла свертки:

$$X^{(U)}(t)=\int_0^t e^{A(t-\xi)}U(\xi)\,d\xi\to X^{(U)}(\tau)= \\ =T\int_0^\tau e^{-TA(\tau-\eta)}U(\eta)\,d\eta. \quad (36)$$

Применяя квадратурную формулу прямоугольников и используя, по существу, выкладки, изложенные в [2, 3], а также имея в виду экспоненциальные равенства в узлах N-сетки I рода

$$e^{-TA\tau_\nu^{(N)}}=e^{-\lambda_0 A(2\nu-1)}= \\ =\exp\left(-\lambda_0 A(2\nu-1)\right) \quad \left(\nu=\overline{1,N}\right),$$

и связывающее равенство для точечных векторов I и II рода свертки (36):

$$\left[(E_N+Z)\otimes E_n\right]\overline{X}_{TII}^{(U)}=2\overline{X}_{TI}^{(U)}; \qquad X^{(U)}(0)=0,$$

получим

$$X^{(U)}(\tau)\xrightarrow{T_I}\overline{X}_{TI}^{(U)}= \\ =\lambda_0\left[(E_N+Z)\otimes E_n\right]\times$$

$$\times\begin{bmatrix} e^{-\lambda_0 A} & & & & & \\ e^{-\lambda_0 A3} & e^{-\lambda_0 A} & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ e^{-\lambda_0 A(2\nu-1)} & & e^{-\lambda_0 A3} & e^{-\lambda_0 A} & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ e^{-\lambda_0 A(2N-1)} & \cdots & e^{-\lambda_0 A(2\nu-1)} & & e^{-\lambda_0 A3} & e^{-\lambda_0 A} \end{bmatrix}\cdot\overline{U}_{TI}.$$

Далее, принимая во внимание представления (31) для экспоненциальных элементов, найдем

$$\overline{X}_{TI}^{(U)}= \\ =\lambda_0\left[(E_N+Z)\otimes E_n\right]\cdot(E_n+\lambda_0 A)^{-1}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} E_n & & & & & \\ -B & E_n & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ (-B)^{\nu-1} & \cdots & -B & E_n & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ (-B)^{N-1} & \cdots & (-B)^{\nu-1} & \cdots & -B & E_n \end{bmatrix}\cdot\overline{U}_{TI}=$$

$$=\lambda_0\left[(E_N+Z)\otimes E_n\right]\cdot(E_n+\lambda_0 A)^{-1}\cdot T_N^{-1}[B]\cdot\overline{U}_{TI}.$$

Это – ранее найденное точечное представление (33), решение нашей стационарной задачи $\left[\text{при}\quad X_0\equiv 0\right]$, как частного случая нестационарной, найденной по ее точечной модели (23).

Перестановочность блочных теплицевых матриц в представлении (37) позволяет записать его в виде

$$\overline{X}_{TI}^{(U)}=\lambda_0\cdot(E_n+\lambda_0 A)^{-1}\times \\ \times T_N^{-1}[B]\left[(E_N+Z)\otimes E_n\right]\cdot\overline{U}_{TI}. \quad (38)$$

Произведение матриц дает:

$$T_N^{-1}[B]\cdot\left[\left(E_N+Z\right)\otimes E_n\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} E_n & & & & & \\ -B & E_n & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ (-B)^{\nu-1} & \cdots & -B & E_n & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ (-B)^{N-1} & \cdots & (-B)^{\nu-1} & \cdots & -B & E_n \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} E_n & & & \\ E_n & E_n & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E_n & E_n \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} E_n & & & & & \\ \left[(-B)+E_n\right] & E_n & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \left[(-B)^{\nu-1}+(-B)^{\nu-2}\right] & \cdots & \left[(-B)+E_n\right] & E_n & & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ \left[(-B)^{N-1}+(-B)^{N-2}\right] & \cdots & \left[(-B)^{\nu-1}+(-B)^{\nu-2}\right] & \cdots & \left[(-B)+E_n\right] & E_n \end{bmatrix}.$$

И, следовательно, для векторных компонент $X_{\nu I}^{(U)}$ $\left(\nu=\overline{1,N}\right)$ решение (38) получим:

$$\left.\begin{array}{ll} X_{1I}^{(U)}=\lambda_0\left(E_n+\lambda_0 A\right)^{-1}\cdot U_{1I} & \text{а)} \\ X_{2I}^{(U)}=\lambda_0\left(E_n+\lambda_0 A\right)^{-1}\left\{\left(E_n-B\right)U_{1I}+U_{2I}\right\} & \text{б)} \\ X_{3I}^{(U)}=\lambda_0\left(E_n+\lambda_0 A\right)^{-1}\left\{\left(E_n-B\right)\left[(-B)^0 U_{1I}+U_{2I}\right]+U_{3I}\right\} & \text{в)} \\ X_{4I}^{(u)}=\lambda_0\left(E_n+\lambda_o A\right)^{-1}\cdot\left\{\left(E_n-B\right)\left[(-B)^2 U_{1I}+(-B)U_{2I}+U_{3I}\right]+U_{4I}\right\} & \text{г)} \\ ----------------------------------- & \end{array}\right\}$$

$$X_{\nu I}^{(U)}=\lambda_0\left(E_n+\lambda_0 A\right)^{-1}\left\{\left(E_n-B\right)\sum_{k=2}^{\nu}(-B)^{\nu-k}\cdot U_{(k-1)I}+U_{\nu I}\right\};\quad\left(\nu=\overline{1,N}\right),$$

причем, при $\nu=1$ окажется

$$\sum_{k=2}^{1}(-B)^{1-k}U_{(k-1)I}\equiv 0.$$

Литература

1. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 5т. Т.1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 656 с.

2. Осипов В.М., Осипов В.В. Моделирование линейных динамических систем методом точечных представлений. М.: МАКС Пресс, 2005. 296 с.

3. Осипов В.В. Точечное моделирование операции свертки // Системы методы технологии. 2004. № 4. С. 56-63.