УДК 517.929

А.В. Зубов, М.В. Стрекопытова, А.С. Стрекопытова***

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ ГУРВИЦА

В статье приводятся аналитические и рекуррентные критерии асимптотической устойчивости линейных стационарных систем.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, левая полуплоскость, нулевой корень, полином, параметр, мнимая ось, равенство, комплексное число.

Актуальность темы заключается в определении критерия асимптотической устойчивости линейных стационарных систем.

Определение 1. Кососимметричными корнями многочлена $P(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$ мы будем называть корни этого многочлена z_j, для которых выполняются равенства $P(z_j)=P(-z_j)=0$. Нетрудно видеть, что кососимметричными корнями являются, в частности, все чисто мнимые корни.

Рассмотрим многочлен $f(z)$ степени n, не имеющий нулевых корней

$$f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n, \quad (1)$$

где $a_0\neq 0$, $a_n\neq 0$. Введем в рассмотрение два многочлена – $g(z)$ и $h(z)$:

$$g(z)=\sum_{k=0}^{r}a_{2k}z^{2k}=a_0+a_2z^2+a_4z^4+\ldots$$

$$h(z)=\sum_{k=0}^{r}a_{2k+1}z^{2k+1}=az_1+a_3z^3+a_5z^5+\ldots,\ a_{n+1}=0,$$

(2)

где $r=[n/2]$ – целая часть числа $n/2$. Тогда многочлен $f(z)$ имеет вид:

$$f(z)=g(z)+h(z). \quad (3)$$

Справедлива теорема [1] .

Теорема 1. Любой кососимметричный корень многочлена $f(z)$ является общим корнем многочленов $g(z)$ и $h(z)$ и наоборот.

Доказательство. Пусть z_j является кососимметричным корнем многочлена $f(z)$, тогда справедливо равенство $f(z_j)=f(-z_j)=0$. Подставляя в него формулу (3), получим

$$g(z_j)+h(z_j)=g(-z_j)+h(-z_j)=g(z_j)-h(z_j)=0.$$

Отсюда вытекает, что $g(z_j)=0$ и следовательно $h(z_j)=0$. Это означает, что z_j является общим корнем многочленов $g(z)$ и $h(z)$.

Пусть, наоборот, z_j является общим корнем многочленов $g(z)$ и $h(z)$, т. е. $g(z_j)=h(z_j)=0$. Отсюда вытекает, что

$$f(z_j)=g(z_j)+h(z_j)=0 \text{ и}$$

$$f(-z_j)=g(-z_j)+h(-z_j)= g(z_j)-h(z_j)=0.$$

Это означает, что z_j является кососимметричным корнем многочлена $f(z)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Легко выделить все кососимметричные корни многочлена $f(z)$, являющиеся общими корнями многочленов $g(z)$ и $h(z)$, поделив один из них на другой или, наоборот (в зависимости от четности многочлена $f(z)$), с помощью алгоритма Евклида, положив в нем

$$P(z)=h(z)\vee g(z),\ S(z)=g(z)\vee h(z).$$

Как было показано выше, в результате этого преобразования будет построен многочлен $r(z)$, корнями которого являются все общие корни многочленов $g(z)$ и $h(z)$ (с учетом их кратностей), и только они. Очевидно, что для сокращения числа шагов в алгоритме Евклида вместо многочлена $h(z)$ можно взять многочлен $\overline{h}(z)=h(z)/z$. Нетрудно видеть, что в этом случае все соотношения в цепочке равенств (2) включают многочлены, содержащие слагаемые только четных степеней и, следовательно, многочлен $r(z)$ также содержит слагаемые только четных степеней.

Если многочлен $r(z)$, полученный в результате применения алгоритма Евклида, является многочленом нулевой степени, то многочлены $g(z)$ и $h(z)$ не имеют общих корней и, следовательно, многочлен $f(z)$ не имеет кососимметричных и, в частности, мнимых корней.

В случае, когда многочлен $r(z)$ не является многочленом нулевой степени, его корни, являясь общими корнями многочленов $g(z)$ и $h(z)$, определяют кососимметричные корни многочлена $f(z)$. Так как многочлен $r(z)$ содержит только четные степени z, то он представим в виде

$$r(z)=b_0+b_2z^2+\ldots+b_{2l}z^{2l}. \quad (4)$$

Итак, мы показали, что любой многочлен $f(z)$ можно представить в виде произведения простых многочленов, содержащих корни исходного многочлена одинаковых кратностей, взятых по одному, причем некоторые из этих многочленов будут содержать только кососимметричные корни исходного многочлена (если такие есть в наличии).

* - автор, с которым следует вести переписку.

Известно, что необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости линейной стационарной системы $\dot{X} = AX$ является то, что все корни характеристического многочлена $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + z^n$ матрицы A лежат в левой полуплоскости, т. е. $\mathrm{Re}\ z < 0$. Наиболее известным критерием, определяющим условия, накладываемые на коэффициенты характеристического многочлена для того, чтобы его корни лежали в левой полуплоскости, является критерий Рауса-Гурвица. Для того, чтобы перейти к обоснованию этого критерия, приведем вначале несколько общепринятых определений и свойств интересующих нас многочленов [2].

Определение 2. Полином

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \tag{5}$$

степени n с действительными коэффициентами a_i, где $a_0 > 0$, $a_n \neq 0$ будем называть стандартным полиномом.

Заметим, что условие $a_0 > 0$ означает отсутствие у стандартного полинома нулевых корней, а условие $a_n \neq 0$ означает, что данный стандартный полином является полиномом степени n.

Определение 3. Если все корни полинома $f(z)$ степени $n \geq 1$ лежат в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\, z < 0$, то он называется полиномом Гурвица.

Определение 4. Полином $F(z) = S_\alpha f(z)$, где

$$F(z) = (1 + \alpha z) f(z) + f(-z), \alpha > 0, \tag{6}$$

будем называть присоединенным к полиному $f(z)$, а операцию S_α будем называть операцией присоединения.

Теорема 2. (Стодола) Если стандартный полином является полиномом Гурвица, то все его коэффициенты положительны: $a_i > 0, \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$

Доказательство. В силу основной теоремы алгебры любой полином степени n может быть представлен в виде произведения сомножителей ($z - z_j$), где z_j – различные корни этого полинома с учетом их кратности, т. е.

$$f(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j). \tag{7}$$

Если условия теоремы выполняются, то рассматриваемый полином имеет только корни вида $z_i = -\gamma_i$ и $z_j = -\alpha_j \pm i\beta_j$, где $\alpha_j > 0, \ \gamma_i > 0$. Заметим, что каждому комплексному корню рассматриваемого полинома $z_j = -\alpha_j + i\beta_j$ соответствует комплексно-сопряженный ему корень $z_j = -\alpha_j - i\beta_j$. Произведение соответствующих скобок в формуле (7) очевидно дает

$$(z - z_j)(z - \bar{z}_J) = (z^2 + 2z\alpha_j + \alpha_j^2 + \beta_j^2) \quad . \tag{8}$$

Учитывая равенство $(z - z_i) = (z + \gamma_i)$, мы получим, что формула (7) состоит из сомножителей с положительными коэффициентами. Раскрывая это произведение, нетрудно видеть, что полином Гурвица имеет только положительные коэффициенты. Теорема доказана.

Обозначим через H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ совокупность всех стандартных полиномов Гурвица степени n.

Лемма 1. Полином, присоединенный к стандартному полиному Гурвица, есть стандартный полином Гурвица, т. е. если $f(z) \in H_n$, то $F(z) = S_\alpha f(z) \in H_{n+1}$ для любого $\alpha > 0$.

Доказательство. Рассмотрим полином

$$\Phi_\mu(z) = (1 + \alpha z) f(z) + \mu f(-z), \tag{9}$$

где действительный параметр μ пробегает отрезок $0 \leq \mu \leq 1$, причем $\Phi_1(z) = F(z)$.

Покажем, что корни $z_j(\mu)$ $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ полинома $\Phi_\mu(z)$ при $\mu \in [0,1]$ расположены в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\, z < 0$, т. е. полином $\Phi_\mu(z)$ есть полином Гурвица.

Действительно, из формулы (9) вытекает, что полином $\Phi_\mu(z)$ имеет вид

$$\Phi_\mu(z) = \\ = b_0(\mu) + b_1(\mu) z + \ldots + b_n(\mu) z^n + \alpha a_n z^{n+1}, \tag{10}$$

где его коэффициенты $b_k(\mu)$ являются линейными функциями параметра μ:

$b_k(\mu) = a_k(1 + \mu(-1)^k) + \alpha a_{k-1}$, т.е. $|b_k(\mu)| < c - const$.

Из свойства модуля комплексного числа вытекает неравенство

$$|\Phi_\mu(z)| > |\alpha\, a_n z^{n+1}| - \\ |b_0(\mu) + b_1(\mu) z + \ldots + b_n(\mu) z^n|. \tag{11}$$

Возьмем некоторое положительное число $R \geq 1$ и будем считать, что комплексная величина z удовлетворяет неравенству $|z| \geq R$. Тогда, разделив обе части неравенства (11) на $|z|^n$ и используя свойства модуля комплексного числа, а также введенные выше оценки, получим неравенство

$$\frac{1}{|z|^n} \Phi_\mu(z) > |\alpha a_n||z| - c\left(\frac{1}{|z|^n} + \ldots + 1\right) > \alpha a_n R - cn.$$

Из этого неравенства вытекает, что если величину $\bar{R}$ выбрать из условия $\bar{R} \geq \max(1, \dfrac{cn}{\alpha a_n})$, то $|\Phi_\mu(z)| > 0$ для всех $|z| \geq \bar{R}$. Это означает, что корни $z_j(\mu)$ полинома $\Phi_\mu(z)$ заключены внутри некоторого круга $|z| \leq \bar{R}$. Следовательно, они являются непрерывными ограниченными функциями параметра μ в силу формул Виета, связывающих значения корней и коэффициентов любых полиномов.

Непосредственно из формулы (9) следует, что при $\mu = 0$ полином $\Phi_\mu(z)$ имеет корни, лежащие в левой полуплоскости, т. е. $\Phi_0(z) \in H_{n+1}$. Так как корни этого полинома совпадают с корнями полинома $f(z)$ с добавлением еще одного корня $z = -1/\alpha < 0$.

Допустим теперь, что при некотором $\bar{\mu} \in [0,1]$ полином $\Phi_{\bar{\mu}}(z)$ не является полиномом Гурвица. Тогда при $\mu = \bar{\mu}$ одна из кривых $z_j = z_j(\mu)$ покинет левую полуплоскость и, следовательно, при этом значении $\bar{\mu}$ пересечет мнимую ось в некоторой точке $(0,\ i\beta_j)$. Иными словами, полином $\Phi_{\bar{\mu}}(z)$ имеет мнимый корень $i\beta_j$, т. е.

$$\Phi_{\bar{\mu}}(i\beta_j) = (1 + i\alpha\beta_j) f(i\beta_j) + \bar{\mu} f(-i\beta_j) = 0. \quad (12)$$

Так как для полинома с действительными коэффициентами из свойств операции сопряжения вытекает равенство $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, то справедливо выражение $f(-i\beta_j) = \overline{f(i\beta_j)}$. Заметим, что из формулы (12) следует равенство

$$|(1 + i\alpha\beta_j)|\,|f(i\beta_j)| = \bar{\mu}\,|f(-i\beta_j)|.$$

Тогда, разделив обе части этого равенства на величину $\left|\overline{f(i\beta_j)}\right| = \left|f(i\beta_j)\right| > 0$ и возведя полученное соотношение в квадрат, можно написать

$$1 + \alpha^2\beta_j^2 = \bar{\mu}^2. \quad (13)$$

Очевидно, что $\beta_j \neq 0$, т. к. $\Phi_{\bar{\mu}}(0) = (1 + \bar{\mu})a_0 > 0$. Таким образом, из формулы (13) вытекает, что $\bar{\mu} > 1$. Получили противоречие с тем, что $\bar{\mu} \in [0,1]$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если стандартный полином $f(z)$ степени n не имеет чисто мнимых корней и его k $(k \le n)$ корней лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$, то присоединенный к нему полином $F(z)$ степени $n+1$, являясь стандартным полиномом, также не имеет чисто мнимых корней, а ($k+1$) его корня лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$.

Доказательство. Введем по аналогии с доказательством леммы 1 полином $\Phi_\mu(z)$, определяемый формулой (9), где действительный параметр μ пробегает отрезок $0 \le \mu \le 1$. Тогда $\Phi_1(z) = F(z)$, а полином $\Phi_0(z)$ имеет те же корни, что и полином $f(z)$ с добавлением корня $z = -1/\alpha < 0$.

Дословно повторяя рассуждения леммы 1, можно установить, что корни $z_j(\mu)$ полинома $\Phi_\mu(z)$ являются непрерывными функциями параметра μ. Заметим, что $\Phi_\mu(0) = (1+\mu)a_0 > 0$, т. е. этот полином не имеет нулевого корня.

Предположим, что существует $\bar{\mu} \in [0,1]$ такое, что одна из кривых $z_j(\mu)$ пересечет мнимую ось. Это означает, что полином $\Phi_{\bar{\mu}}(z)$ имеет мнимый корень $i\beta_j$, т. е. справедливо равенство $|(1 + i\alpha\beta_j)|\,|f(i\beta_j)| = \bar{\mu}\,|f(-i\beta_j)|$.

Используя известные свойства комплексных чисел и то, что $\left|\overline{f(i\beta_j)}\right| = \left|f(i\beta_j)\right| > 0$, получим равенство (13) $1 + \alpha^2\beta_j^2 = \bar{\mu}^2$. Так как $\Phi_\mu(0) > 0$, то $\beta_j \neq 0$. Тогда из равенства (13) вытекает, что справедливо неравенство $\bar{\mu} > 1$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание 2. Из леммы 2 вытекает, что если полином $F(z)$, присоединенный к стандартному полиному $f(z)$ степени n, не имеющему чисто мнимых корней, является полиномом Гурвица степени $n+1$, то полином $f(z)$ также является полиномом Гурвица.

Лемма 3. Для всякого стандартного полинома Гурвица степени $n+1$ существует стандартный полином Гурвица степени n ($n>1$), по отношению к которому данный полином является присоединенным, т. е. если $F(z) \in H_{n+1}$, то существует $\alpha > 0$ и $f(z) \in H_n$ такие, что

$$F(z) = (1 + \alpha z) f(z) + f(-z) = S_\alpha f(z). \quad (14)$$

Доказательство. Из функционального уравнения (14) имеем

$$F(-z) = (1 - \alpha z) f(-z) + f(z). \quad (15)$$

Исключая величину $f(-z)$ из уравнений (14) и (15), получим

$$\alpha^2 z^2 f(z) = -(1 - \alpha z)F(z) + F(-z). \quad (16)$$

Пусть

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{n+1} z^{n+1}, \quad (17)$$

где $A_k > 0$ в силу теоремы 2. Тогда $F(-z) = A_0 - A_1 z + \ldots + (-1)^{n+1} A_{n+1} z^{n+1}$.

Нетрудно видеть, что если взять $\alpha = 2A_1 / A_0$, то полином $f(z)$, определяемый формулой (16), представляет собой стандартный полином степени n.

Действительно, из формулы (16) вытекает

$$\alpha^2 z^2 f(z) = (-2A_1 + \alpha A_0) z + \alpha A_1 z^2 + \ldots + \alpha A_{n+1} z^{n+2}. \quad (18)$$

Так как первое слагаемое в правой части этого равенства в силу выбора величины α равно нулю, то полином $f(z)$ является стандартным полиномом степени n.

Покажем, что этот полином не имеет чисто мнимых корней. Предположим противное, т. е. полином $f(z)$ имеет мнимый корень $i\beta$, тогда справедливо равенство

$$\alpha^2(i\beta)^2 f(i\beta) = -(1-i\alpha\beta)F(i\beta) + F(-i\beta). \quad (19)$$

Отсюда

$$|1-i\alpha\beta| \cdot |F(i\beta)| = |F(-i\beta)|. \quad (20)$$

Разделим обе части этого равенства на $|F(i\beta)| = |F(-i\beta)| > 0$ величину, по условию леммы отличную от нуля, и возведем обе части полученного соотношения в квадрат. Получим $1+\alpha^2\beta^2 = 1$. Так как $\alpha > 0$, это тождество может выполняться только при $\beta = 0$, т. е. $f(i\beta) = f(0) = 0$. Это противоречит тому, что $f(z)$ является стандартным полиномом. Итак, мы пришли к противоречию с предположением о наличии у полинома $f(z)$ чисто мнимых корней. Из замечания 2 и того, что присоединенный к нему полином является полиномом Гурвица, вытекает, что полином $f(z)$ также является полиномом Гурвица. Лемма доказана.

Выводы. В статье даются критерии асимптотической устойчивости линейных стационарных систем.

Литература

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Высш. школа, 1967. 472 с.
3. Зубов А.В., Зубов Н.В., Лаптинский В.Н. Динамика управляемых систем. СПб.: ВВМ, 2008. 336 с.
4. Зубов А.В., Зубов Н.В. Динамическая безопасность управляемых систем. СПб.: Изд-во НИИ Химии: СПбГУ, 2009. 172 с.

УДК 621.879

Ю.Н. Булатов**, И.В.Игнатьев

ВЛИЯНИЕ СОГЛАСОВАННОЙ НАСТРОЙКИ СИСТЕМ АРВ И АРЧВ ГЕНЕРАТОРОВ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Описываются методы непараметрической идентификации электроэнергетической системы (ЭЭС) с учетом связанности отдельных ее частей. Приводится методика согласованной настройки систем автоматического регулирования возбуждения (АРВ) и автоматического регулирования частоты вращения (АРЧВ) группы параллельно работающих генераторов электростанции. Для настройки АРВ и АРЧВ предлагается алгоритм приближения коэффициентов характеристического полинома ЭЭС к стандартным формам Баттерворта с применением современной методики оптимизации – генетического алгоритма. Представлена модель ЭЭС, созданная в MATLAB, на примере которой показано хорошее демпфирование электромеханических колебаний при настройке регуляторов предложенным методом.

Ключевые слова: электроэнергетическая система, автоматический регулятор возбуждения, автоматический регулятор частоты вращения, генератор, турбина, идентификация, согласованная настройка.

Современные электроэнергетические системы (ЭЭС) характеризуются большой протяженностью, огромным числом потребителей электроэнергии. Нагрузки потребителей, как правило, имеют случайный характер изменения, что может привести к отклонению частоты промышленного тока от номинального значения. Первичное регулирование частоты на энергоблоках электрических станций осуществляется с помощью автоматических регуляторов частоты вращения (АРЧВ) турбин путем изменения впуска энергоносителя и, соответственно, выдаваемой в систему активной мощности. Однако изменение генерируемой мощности, в свою очередь, вызывает изменение напряжения на зажимах генератора. Регулирование напряжения на электростанциях осуществляется с помощью автоматических регуляторов возбуждения (АРВ) генераторов путем изменения напряжения на обмотке возбуждения и, соответственно, вырабатываемой реактивной мощности. Таким образом, регулирование частоты неразрывно связано с регулированием мощности и напряжения генераторов электростанций.

Устойчивая работа ЭЭС зависит от множества факторов и, в том числе, от выбора настроек АРВ генераторов. Данным вопросом на протяжении многих лет занимались и занимаются многие известные отечественные ученые, однако проблемы, связанные с согласованием настроек систем АРВ и АРЧВ, в полной мере до сих пор не решены.

В практике эксплуатации ЭЭС сложилось так, что подсистемы управления генератором и турби-

* - автор, с которым следует вести переписку.