УДК 510.6

Е.Г. Дулепов, А.Н. Ефремова*

СТРУКТУРА И ВОЗМОЖНОСТИ УНИВЕРСАЛЬНОГО АЛГОРИТМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Теорема – термин логики. Использование теорем в качестве инструмента доказательства истины в современных информационных системах требует более подробно раскрыть структуру и возможности этого термина. Особое место при этом уделяется универсальным алгоритмам доказательства теорем. Ниже будет дано описание такого алгоритма, предложенного профессором Е.Г. Дулеповым, и дан анализ его программных реализаций.

Ключевые слова: обобщенная посылка, область определения и критерий существования теоремы.

В логике особую роль играют тождественно-истинные утверждения – **тавтологии,** важнейшие из них являются логическими законами и теоремами. **Теорема** представляет собой умозаключение в форме истинного условного предложения

«если все посылки, условия, гипотезы f_1, f_2, …, f_k истинны, то истинно будет и заключение, вывод, следствие $f_{зак}$»:

$$f_1, f_2, \ldots, f_k \Rightarrow f_{зак} \text{ или } f_1, f_2, \ldots, f_k \vdash f_{зак}.$$

Поскольку все посылки в теореме истинны, то их можно заменить одной обобщенной посылкой $f_{оп}$,

$$f_{оп} = f_1 \,\&\, f_2 \,\&\, \ldots \&\, f_k,$$

тогда теорема примет вид

$$f_{оп} \Rightarrow f_{зак}.$$

В отличие от импликации $f_{оп} \longrightarrow f_{зак}$, в теореме $f_{оп} \Rightarrow f_{зак}$ посылка $f_{оп} \equiv 1$.

Таким образом, область существования или определения теоремы $f_{оп} \Rightarrow f_{зак}$ – это область истинности обобщенной посылки $f_{оп}$, а сама теорема будет представлять собой константу единицу

$$f_{оп} \Rightarrow f_{зак} = 1 \Rightarrow 1 = 1.$$

Рассмотрим более подробно сходства и отличия записей импликации и теоремы на конкретных примерах.

Импликация вида $(s \cdot p) \rightarrow (q \vee r)$ может быть преобразована путем перемещения

(от слова **секвенция**) выражений s, p, q, r из посылки в заключение и наоборот:

$$\underline{sp \rightarrow (q \vee r)} = 1 \cdot sp \rightarrow (0 \vee q \vee r) =$$

$$(\overline{1 \cdot s \cdot p}) \vee (0 \vee q \vee r) \quad \overline{1} \vee \overline{s} \vee (\overline{p} \vee q \vee r) =$$

$$= \underline{s \rightarrow (\overline{p} \vee q \vee r)} = \underline{sp\overline{q} \rightarrow r} =$$

$$\underline{1 \rightarrow (\overline{s} \vee \overline{p} \vee q \vee r)} = \underline{sp\overline{q}\overline{r} \rightarrow 0}.$$

Аналогично может быть преобразована и теорема $(s \cdot p) \Rightarrow (q \vee s)$:

- $s \Rightarrow (\overline{p} \vee q \vee s)$ – теорема;
- $(s \cdot p \cdot \overline{q}) \Rightarrow s$ – теорема;
- $(sp\overline{q}\overline{s}) \Rightarrow 0$ – тавтология - не теорема

(в теореме заключение $f_{ЗАК} \neq 0$).

-$1 \Rightarrow (\overline{s} \vee \overline{p} \vee q \vee s)$ - тавтология-теорема, если даже $(s \cdot p) \Rightarrow (q \vee s)$ – не теорема

из-за $s \cdot p = 0$.

Заметим, выражение вида $(s \cdot p) \Rightarrow (q \vee s)$ называют клаузой [2]. Теоремы логики высказываний доказуемы, поэтому возможно построение универсального алгоритма для их доказательства. Программная реализация алгоритма на ЭВМ предполагает отказ от смысла записи знания и перехода в результате выполнения процедуры формализации к его более простой и обозримой форме в виде формул из символов букв и операций.

Впервые универсальный алгоритм построил К. Генцен [3]. Профессор Е.Г. Дулепов [3] предложил более удобный алгоритм, в котором каждая из функций f_1, f_2, …, f_k, $f_{зак}$ зависит от одного и того же множества аргументов, часть которых, как правило, является фиктивными. Это существенно упрощает программную реализацию алгоритма, а процедура доказательства при этом становится весьма простой и очевидной [1, 4].

Недостатками известных программ реализации алгоритма Дулепова являются:

– отсутствие процедуры вычисления области определения теоремы;

– ошибочное отождествление тавтологий вида $0 \rightarrow f \equiv 1$ с теоремами;

– использование языков описания операндов и операций, отличных от языков пользователя; – представления двоичных констант 1 и 0 формулами $x \,\&\, \overline{x}$ и $x \vee \overline{x}$ соответственно;

– не учитывается возможное нарушения отношения эквивалентности $s \Rightarrow p \equiv \overline{p} \Rightarrow \overline{s}$ между прямой и обратно-противоположной теоремами в рамках рассматриваемого утверждения;

– слабое использование возможностей визуализации процедур программирования.

Обозначим через $E_{ОП}$ и $E_{ЗАК}$ области истинности $f_{оп}$ и $f_{ЗАК}$ соответственно, тогда критерием G существования теоремы $f_{оп} \Rightarrow f_{зак}$ будет выполнение условий ($f_{оп} \neq 0$) и ($f_{оп} \leq f_{зак}$) или ($E_{ОП} \neq$ Ø) & ($E_{ОП} \subseteq E_{ЗАК}$):

* - автор, с которым следует вести переписку.

G=(f_{on} $\neq 0$)&($f_{on} \leq f_{зак}$) = ($E_{ОП} \neq \varnothing$) & ($E_{ОП} \subseteq E_{ЗАК}$).

Универсальный алгоритм предполагает выполнение четырех этапов:

1. Определение набора всех попарно различных **аргументов** функций.
2. Определение обобщенной посылки $f_{оп}$.
3. Вычисление СДНФ функций $f_{оп}$ и $f_{зак}$.
4. Вычисление значения критерия G существования теоремы по формулам

G=($f_{оп}$ $\neq 0$) & ($f_{оп} \leq f_{зак}$) или G = ($E_{ОП} \neq \varnothing$) & ($E_{ОП} \subseteq E_{ЗАК}$).

Пример 1. Доказать существование известной с древности сложной конструктивной дилеммы как теоремы $s \to p,\ c \to d,\ s \vee c \Rightarrow p \vee d$.

Выразим дилемму в форме $f_{оп} \Rightarrow f_{зак}$,

$f_{зак} = p \vee d$,

где $f_{оп} = (s \to p)(\ c \to d)(\ s \vee c)$.

Компьютерное решение, рис. 1:

1. определяем набор $(\ s, p, c, d\ )$ аргументов дилеммы;
2. определяем формулу обобщенной посылки $f_{оп}$:

$$f_{оп}(s, p, c, d) = \underline{(s \to p)(\ c \to d)(\ s \vee c)\ ;}$$

3. определяем СДНФ функций $f_{оп}$ и $f_{зак}$, множества $E_{ОП}$, $E_{ЗАК}$, критерий G:

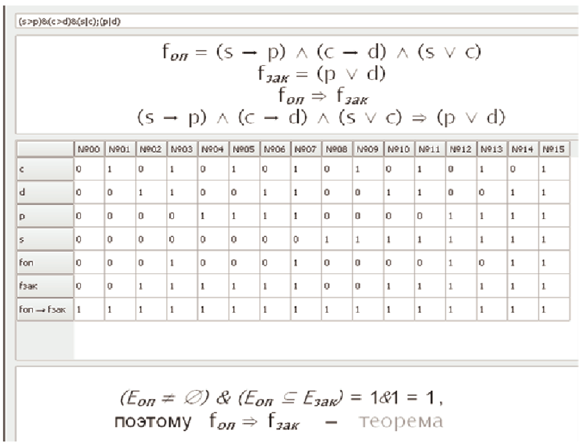
СДНФ $f_{оп}(s, p, c, d)\ = k(15,13,12,7,3)$, *СДНФ* $f_{зак}(s, p, c, d) = k(15,14,13,12,11,9,7,6,5,4,3,1)$;

$E_{ОП}$ $= \{15,13,12,7,3)\} \neq \varnothing$ и

$E_{ЗАК} = \{15,14,13,12,11,9,7,6,5,4,3,1\}$;

G=(f_{on} $\neq 0$) & ($f_{on} \leq f_{зак}$)$=1\&1=1$ или G=($E_{ОП} \neq \varnothing$) & ($E_{ОП} \subseteq E_{ЗАК}$) =($E_{ОП} \neq \varnothing$)&

$$[\{\underline{15},\underline{13},\underline{12},\underline{7},\underline{3}\} \subseteq \{\underline{15},14,\underline{13},\underline{12},11,9,\underline{7},6,5,4,\underline{3},1\}] = \\ = 1\&1 = 1.$$



	№00	№01	№02	№03	№04	№05	№06	№07	№08	№09	№10	№11	№12	№13	№14	№15
c	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
d	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
p	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
s	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
fon	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
fзак	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
fon → fзак	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. 1. Утверждение дилеммы как теоремы.

В интересах решения прикладных задач обобщенную посылку $f_{оп}$ удобно разбить на две посылки – гипотезу $f_Г$ и общее знание w, в рамках которого действует теорема. Теорема вида $w \Rightarrow f_{ЗАК}$ означает, что $f_{ЗАК}$ является заключением из общего знания w, а в теореме вида $f_Г, w \Rightarrow f_{ЗАК}$ – заключением, порождаемым гипотезой $f_Г$ в рамках общего знании w. Функции $f_Г$,w, $f_{ЗАК}$ на множестве $E_{ОП}$ истинности $f_{оп}$ всегда истинны.

В математике и теории алгоритмов в качестве общего знания для построения правил вывода modus ponens $s, s \to p \Rightarrow p$ и modus tollens $\overline{p}, s \to p \Rightarrow \overline{s}$ используют модель $W_{11}(S, P)$, которая представляет собой решение следующего логического уравнения:

$$w = w_{11}(s, p) = k(3,1,0) = sp \vee \overline{s}p \vee \overline{s}\,\overline{p} == \underline{s \to p} = \\ = \underline{\underline{\overline{p} \to \overline{s}}} = 1,$$

$(11)_2 = 1_3^8\, 0_2^4\, 1_1^2\, 1_0^1$.

Пример 2. Является ли теоремой правило вывода modus ponens $s, w_{11}(s, p) \Rightarrow p$ или $f_Г, w_{11}(s, p) \Rightarrow f_{Зак}$.

Решение:

$$f_Г = s = k(3,2);\ \ w_{11}(s, p) = k(3,1,0) = \\ = m(2) = \overline{s} \vee p = s \to p;$$

$$f_{ОП} = s(s \to p) = k(3,2) \cdot k(3,1,0) = \\ = k(3) = sp = w_8,\ f_{ЗАК} = k(3,1) = p = w_{10};$$

G = ($E_{ОП} \neq \varnothing$) & ($E_{ОП} \subseteq E_{ЗАК}$) $= 1\&(\{3\} \subseteq \{3,1\}) = 1\&1 = 1$, поэтому утверждение « $s,\ w_{11} \Rightarrow p$ » является теоремой.

Пример 3. Является ли теоремой утверждение $s, w_{11}(s, p) \Rightarrow \overline{p}$ ($f_Г, w_{11}(s, p) \Rightarrow f_{ЗАК}$).

Решение:

$$w = w_{11}(s, p) = k(3,1,0) = (\overline{s} \vee p) = \\ = (p \vee \overline{s}) = \underline{s \to p} = \underline{\underline{\overline{p} \to \overline{s}}};$$

$$f_Г = s = k(3,2);\ \ w_{11}(s, p) = k(3,1,0) = m(2) = \overline{s} \vee p = s \to p;$$

$$f_{ОП} = s(s \to p) = k(3,2) \cdot k(3,1,0) = k(3) = sp = w_8, \\ f_{ЗАК} = k(2,0) = \overline{p} = w_5.$$

G = ($E_{ОП} \neq \varnothing$) & ($E_{ОП} \subseteq E_{ЗАК}$)= $= 1 \cdot (\{3\} \subseteq \{2,0\}) = 1 \cdot 0 = 0$, поэтому утверждение « $s,\ w_{11} \Rightarrow \overline{p}$ » не является нетеоремой.

Известно, что прямая и обратно-противоположная теоремы эквивалентны

$$(f_{ОП} \Rightarrow f_{ЗАК}) \equiv (\overline{f}_{ЗАК} \Rightarrow \overline{f}_{ОП})$$

и для доказательства обеих теорем достаточно доказать только одну из них.

Однако в рамках общего знания, например $w_{10}(s, p) \equiv 1$, это тождество может быть нарушено. Покажем это на следующем примере.

Пример 4. Какие из восьми утверждений

$$s \Rightarrow p,\ \underline{\overline{p} \Rightarrow \overline{s}},\ \overline{s} \Rightarrow p,\ \underline{\underline{\overline{p} \Rightarrow s}},\ s \Rightarrow \overline{p},$$

$$\underline{p \Rightarrow \overline{s}},\ \overline{s} \Rightarrow \overline{p},\ \underline{\underline{p \Rightarrow s}}$$

в рамках общего знания $w_{10}(s, p) \equiv 1$ истинные, ложные, теоремы и почему.

Таблица 1

Доказательство и опровержение утверждений

$s \Rightarrow p$	$\underline{\bar{p} \Rightarrow \bar{s}}$	$\bar{s} \Rightarrow p$	$\underline{\underline{\bar{p} \Rightarrow s}}$	$s \Rightarrow \bar{p}$	$\underline{p \Rightarrow \bar{s}}$	$\bar{s} \Rightarrow \bar{p}$	$\underline{\underline{p \Rightarrow s}}$
T $s \to p = 1$	$f_{оп}=0$ $\bar{p} \to \bar{s} = 1$	T $\bar{s} \to p = 1$	$f_{оп}=0$, $\bar{p} \to s = 1$	$f_{зак}=0$	$f_{зак} \in \{0,1\}$	$f_{зак}=0$	$f_{зак} \in \{0,1\}$

Решение (таблица 1). Введем в ЭВМ модель знания $w_{10}(s,p)=1$:

$$w_{10}(s,p) = k(3{,}1) = \ sp \vee \bar{s}p \ =$$

$$(\bar{s} \vee p)(s \vee p) = p =$$

$$= \underline{(s \to p)(\bar{s} \to p)} \quad = \underline{\underline{(\bar{p} \to \bar{s}) * (\bar{p} \to s)*}} = 1.$$

Выражения $s \Rightarrow p$ и $\bar{s} \Rightarrow p$ представляют собой теоремы, обратно-противоположные к ним выражения $\underline{\bar{p} \Rightarrow \bar{s}}$ и $\underline{\underline{\bar{p} \Rightarrow s}}$ теоремами не являются, поскольку в них $f_{ОП}=0$. Утверждения $\underline{p \Rightarrow \bar{s}}$ и $\underline{\underline{p \Rightarrow s}}$ теоремами также не являются, в них при $f_{ОП}=1$ на наборах $(s,p)=(1{,}1)$ и $(s,p)=(0{,}1)$ заключение $f_{зак}$ = 0. Утверждения $\underline{p \Rightarrow \bar{s}}$ и $\underline{\underline{p \Rightarrow s}}$ превратятся в теоремы только тогда, когда из их областей определения будут удалены эти наборы.

В настоящее время актуальной задачей является разработка оптимальных с позиции пользователя программ реализации универсальных алгоритмов.

Литература

1.Дулепов Е.Г. Логика как инструмент исследования знаний // Системы. Методы. Технологии. 2009. № 1. С. 65-68.

2. Акимов Е.О. Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы. М.: Акимов Е.О., 2005. 645 с.

3. Gentzen *K*. Untersuchungen über das logische Dchlissen, Math. Zeitschrift, 1934-1935. Т. 39.

4. Куликов Д.О. Программная реализация алгоритма профессора Дулепова // Материалы всерос. науч. метод. конф. Братск, 2005. Ч.1. С. 91-94.

УДК 535.34; 541.15

Т.В. Губарева

РАЗРАБОТКА ФИЗИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЕТЕРОГЕННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТМОСФЕРНОГО АЭРОЗОЛЯ

Рассмотрены особенности физического моделирования гетерогенных процессов атмосферного аэрозоля. Приведена структура экспериментально-исследовательского комплекса, разработанного для исследования гетерогенных процессов, стимулированных ионизирующими излучениями. Описаны особенности проведения процессов, а также основные методики исследования для получения экспериментальных данных.

Ключевые слова: физическое моделирование, гетерогенные процессы, вторичный радиоактивный аэрозоль, аэрозольные частицы, оптические свойства, структура кристаллов.

В области метеорологии и климатологии вторая половина XX века ознаменовалась бурным развитием наук об атмосфере, прогнозированием атмосферных и климатических изменений. При этом климатологи в своей деятельности активно используют физико-химические методы исследования [1, 2]. Доклады Межправительственной группы экспертов изменения климата (МГЭИК) отражают возрастающее понимание климатологами всего мира большого значения учета химических, геохимических и биогеохимических процессов в климатической системе Земли для описания изменения климата [3]. В одном из первых обзоров о состоянии российских исследований в области атмосферной химии [4] описаны гетерогенные процессы в тропосфере, играющие ключевую роль в образовании кислотных дождей и в изменении параметров озонового слоя Земли. Огромное значение для понимания и описания локальных, региональных и глобальных климатических и экологических составляющих имеет изучение химии атмосферы. Описание и классификация аэрозольных эффектов в атмосфере связана со свойствами аэрозолей и с временными и пространственными масштабами изучаемых процессов. Поэтому разработка моделей климата являет-