УДК 28.29

Ю.Н. Алпатов, И.В Борисенко*, М.Г. Борисенко

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОСВЯЗНОГО ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ СТРУКТУРНЫХ ГРАФОВ

Настоящая статья посвящена проектированию автоматизированной системы идентификации многосвязных объектов управления. Для разработки программы использованы визуальная система программирования Microsoft Visual C++ Express 2008. *На основе таблицы взаимодействия параметров программа создает С-граф, матричные уравнения объекта управления, производит понижение порядка матричного уравнения.*

Ключевы слова: многосвязный объект, структурная схема, структурный граф, матричное уравнение.

Универсальным, применимым для многих типов систем управления является метод структурных графов. Применение этого метода позволяет реализовать структурный подход к разработке системы: процесс синтеза состоит из нескольких функциональных подпроцессов, которые в свою очередь можно разбить на отдельные функции и т. д. Каждый отдельный этап синтеза приводит к конкретным результатам. Метод структурных графов изначально ориентирован на использование ЭВМ в процессе синтеза, легко поддается алгоритмизации [1].

На первом этапе на основе экспериментальных данных строится таблица взаимодействия параметров. Строка таблицы идентифицируется именем параметра, из которого выходит связь, а столбец идентифицируется именем параметра, в который входит связь.

Таблица взаимодействия параметров представляется в памяти ЭВМ в виде двух одномерных динамических массивов. В первом содержатся имена параметров, а во втором связи между параметрами.

Для более наглядного представления зависимостей между параметрами системы возможно построение функциональ-ной схемы. Методика и алгоритмы построения функциональной схемы по таблице взаимодействия описаны в [2]. Однако данный этап не является обяза-тельным при идентификации системы предлагаемым методом и может быть опущен.

Также предлагается исключить этап построения структурной схемы, что позволит сократить время проектирова-ния и увеличить наглядность алгоритма. Последнее позволяет сократить время на разработку и отладку программы, а также значительно упростит ее последующую модификацию.

На следующем этапе таблица взаимодействия параметров преобразуется в структурный граф (далее С-граф).

С-граф представлен в памяти ЭВМ в виде двух динамических массивов объектов: узлов и связей.

Объект «узел *SGrNode*» имеет следующие свойства: номер узла *N*, имя узла *strName*, координаты *X*, *Y*, тип узла *strType*.

Объект «связь *SGrArc*» имеет следующие свойства: номер дуги *N*, имя дуги *strName*, номер узла, из которого выходит связь *intNodeFrom*, номер узла, в который входит связь *intNodeTo*.

С-граф строится на основе таблицы взаимодействия параметров по следующим правилам:

1. каждой связи таблицы взаимодействия ставится в соответствие оператор преобразования (*Wi*);
2. параметрам таблицы взаимодей-ствия, имеющим более одной входящей связи и одну исходящую связь, соответствуют узлы 1-го рода;
3. параметрам таблицы взаимодей-ствия, имеющим более одной выходящей связи и одну входящую связь, соответ-ствуют узлы 2-го рода;
4. параметрам таблицы взаимодей-ствия, имеющим более одной выходящей и более одной исходящей связи, соответствуют узел 1-го рода, узел 3-го рода и узел 2-го рода, соединенные последовательно.

Приведем краткие пояснения к алгоритму построения С-графа.

1. Сначала преобразуются в соответ-ствующие элементы С-графа все пара-метры, а затем связи таблицы взаимо-действия.
2. Множественный вход преобразует-ся в узел с единичной передачей, дугу и узел 2-го рода С-графа.
3. Множественный выход преобразу-ется в узел 1-го рода, дугу и узел с единичной передачей С-графа.
4. Параметр таблицы взаимодействия с одной входящей и одной выходящей связью преобразуется в дугу С-графа.
5. Параметры таблицы взаимодей-ствия со множественными входящими и исходящими связями преобразуются согласно правилам, приведенным выше.
6. Связи таблицы взаимодействия преобразуются в узлы С-графа, соот-ветствующие передаточным функциям.

Приведем обобщенный алгоритм преобразования таблицы взаимодействия параметров в С-граф.

* - автор, с которым следует вести переписку.

1. Определяется количество узлов и связей в С-графе, инициализируются динамические массивы узлов *arrSGrNode* и связей *arrSGrArc*.

2. В цикле обходится массив параметров таблицы взаимодействия. Определяется тип параметра таблицы взаимодействия. В соответствии с типом параметра таблицы взаимодействия создается узел (узлы) или дуга С-графа.

3. В цикле обходится массив связей таблицы взаимодействия. Для каждой связи таблицы взаимодействия в массив узлов С-графа добавляется новый элемент с типом *strType* передаточная функция. Создаются дуги, входящие и исходящие из передаточной функции. Определяется, в какой узел С-графа входит дуга; определяется, из какого узла С-графа исходит дуга. Для связей-входов системы добавляются входные узлы С-графа. Для связей-выходов системы добавляются выходные узлы С-графа.

Для связей, соединяющих переда-точные функции, в С-граф добавляется узел 3-го рода. В массив связей С-графа добавляются связи, соединяющие данные узлы.

На следующем этапе С-граф записывается в матричной форме. Матричное представление любой модели позволяет в рациональной форме получить запись и использовать машинные методы решения задачи.

В матричном виде система уравнений «компонент графа» имеет запись:

$$X = B \cdot X_{\text{вх}}, \tag{1}$$

где X – матрица-столбец сигналов графа порядка ($k \times 1$); B – матрица операторов системы порядка ($\kappa \times m$); $X_{\text{вх}}$ – матрица-столбец входных сигналов графа порядка ($m \times 1$).

Матрица B инвариантна относительно перестановки строк – в этом случае необходимо обеспечить соответствующую перестановку строк вектора X, а также перестановки столбцов – переупорядочиваются строки вектора $X_{\text{вх}}$.

Матрица A, отражающая структуру графа, строится по следующим правилам.

1. Рассматриваются узлы С-графа с идентификатором 1 и относящиеся к узлам 1-го, 2-го и 3-го рода.

2. Каждый столбец матрицы соответствует элементу вектора сигналов графа (число столбцов равно k) .

3. Строки заполняются элементами 0, +1, –1 по следующему принципу:

а) для узлов первого рода дуге, соответствующей сигналу, входящему в узел, присваивается +1, дуге, выходящей из узла, –1, а не инцидентной узлу – 0;

б) для узлов второго рода формируется столько строк, сколько имеем сочетаний пар входящих и выходящих дуг. Входящей дуге присваивается +1, выходящей –1, остальные столбцы заполняются нулями;

в) строки, соответствующие узлам 3-го рода, формируются, как для узлов 2-го рода, учитывая, что выходящая дуга только одна [1].

В матричном виде уравнение структуры графа записывается следующим образом:

$$A \cdot X = 0, \tag{2}$$

где A – матрица структуры графа ($r \times k$); X – матрица-столбец сигналов графа ($k \times 1$).

Подставляя в (2) из (1) значение X, получаем матричное уравнение С-графа:

$$A \cdot B \cdot X_{\text{вх}} = 0 \tag{3}$$

или

$$H \cdot X_{\text{вх}} = 0. \tag{4}$$

Уравнение (3) полностью отражает структуру графа, т. к. при записи уравнения (1) записаны уравнения узлов, соответствующих операторам системы, а при записи уравнений (2) – узлов, соответствующих узлам суммирования и ветвления.

В матричном уравнении (4) матрица H инвариантна относительно перестановки строк – в этом случае произойдет только изменение последовательности записи уравнений в однородной системе. Это свойство используется в дальнейшем при преобразовании матричного уравнения.

В строках матрицы H, соответствующих узлам ветвления, происходит тождественное преобразование сигнала:

$$x_i = x_j.$$

Такие переопределения приводят к большой размерности матрицы H и вектора $X_{вх}$, включающего идентичные сигналы. Чтобы упростить дальнейшие вычисления, необходимо понизить размерность матрицы H. Для этого необходимо матрицу H разбить на четыре блочных подматрицы:

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0. \tag{5}$$

Действия над блочными подматрицами производятся по тем же формальным правилам, как в случае, когда блоки рассматриваются как обычные элементы матрицы. Но поскольку блочные матрицы сохраняют свойства матриц, при выполнении операций над ними сохраняются правила матриц (в частности, для умножения – не коммутативность) [1].

Формулы умножения матриц показывают, что можно считать матрицы H_1, H_2, H_3, H_4, X_1, X_2 составными элементами и записать систему (5) в виде

$$\begin{cases} H_1 \cdot X_1 + H_2 \cdot X_2 = 0 \\ H_3 \cdot X_1 + H_4 \cdot X_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Исключив из системы (6) X_2, получим:

$$\left[H_3 - H_4 \cdot H_2^{-1} \cdot H_1\right] \cdot \left[X_1\right] = 0 \tag{7}$$

или

$$\left[H'\right] \cdot \left[X_1\right] = 0,$$

где H_2^{-1} – матрица, обратная H_2;

$H' = H_3 - H_4 * H_2^{-1} * H_1$ – преобразованная матрица H.

Условием решения уравнения (7) будет:

$$\det H^2 \neq 0 . \quad (8)$$

Следовательно, понижать порядок матрицы возможно до соблюдения условия (8).

Понижение размерности разреженной матрицы можно выполнять путем выделения сколь угодно большого числа блочных подматриц. Однако с ростом числа подматриц уравнение (8) значительно усложняется. Вместе с тем растет и число ограничивающих условий: их число прямо пропорционально количеству блоков, на которые разбивается исходная матрица. Следовательно, алгоритмы понижения порядка матрицы значительно усложняются, растет число операций умножения матрицы, которые очень затратны как по времени, так и по используемым процессорным ресурсам [3].

Для выполнения условия (8) и облегчения вычисления обратной матрицы предлагается перед разбиением матрицы H произвести перестановку строк и столбцов таким образом, чтобы подматрица H_2 состояла только из –1, расположенных по диагонали, начиная с верхнего правого угла матрицы H. Перестановку предлагается делать следующим образом:

В исходном уравнении выделяются строки, состоящие из двух элементов: 1 и –1 (такие строки получаются при описании узлов 2-го рода тогда, когда входной для всего графа сигнал входит в описываемый узел). Далее определяем, какие столбцы в отобранных строках содержат –1. Последовательно перестав-ляем столбцы в правую часть матрицы, переставляя при этом соответствующие строки в матрице X – первый отобранный столбец на последнее место, второй отобранный столбец – на предпоследнее и т. д. В каждом переставляемом столбце строку, содержащую –1, переставляем так, чтобы –1 располагались по диагонали, начиная с верхнего правого угла матрицы H.

Произведя перестановку строк и столбцов матрицы H (и соответственно строк матрицы X), выделяем диагональную квадратную матрицу H_2 с элементами {0, –1}.

Столбцам матрицы H_2, сформированной данным способом, соответствуют сигналы матрицы X, исходящие из узлов 2-го рода. Поскольку узел 2-го рода имеет единичный коэффициент передачи, то каждый его исходящий сигнал равен входящему сигналу. Таким образом, возможно исключение из матрицы X сигналов, соответствующих столбцам матрицы H_2, и соответствующих столбцов из матрицы H. При этом не будет нарушена зависимость между параметрами системы.

Определитель данной матрицы H_2:

$$DetH_2 = (-1)^s \neq 0 .$$

Для матрицы вида:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix} \quad (9)$$

справедливо следующее тождество:

$$H_2^{-1} = H_2 .$$

Следовательно, выполняется условие (8) и отпадает необходимость в вычислении обратной матрицы H.

При умножении матрицы M на матрицу вида (9) происходит инвертирование столбцов матрицы M, при этом ее элементы остаются неизменными.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{3n} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{kn} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a_{1n} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{3n} & a_{31} & a_{32} & a_{31} \\ a_{kn} & a_{k3} & a_{k2} & a_{k1} \end{matrix}$$

Назовем такую матрицу $M_{инв}$. Таким образом, уравнение (7) может быть сведено к следующему уравнению:

$$[H_3 + H_{4инв} \cdot H_1] = 0 . \quad (10)$$

Переход от уравнения (7) к уравнению (10) позволяет уйти от затратных по времени одной операции обращения матрицы и одной операции умножения матрицы, что в зависимости от размерности матрицы H может дать выигрыш по времени от нескольких секунд до нескольких минут.

Таким образом, описанный в настоящей статье метод структурных графов и комплекс программного обеспечения, реализованный на его основе, позволяют разрабатывать математическую модель многосвязных объектов управления. Входными данными для программы являются функциональные зависимости между параметрами объекта управления, а результатом работы программы – матричное уравнение объекта управления. На основе полученных данных возможна оптимизация производственного процесса.

Литература

1. Алпатов Ю.Н. Синтез систем управления методом структурных графов. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1988. 184 с.

2. Алпатов Ю.Н., Борисенко И.В. Методика записи функциональной схемы системы управления по таблице взаимодействия параметров // Системы. Методы. Технологии. 2010. № 3 (7). С. 64-67.

3. Шахова Е.Ю., Мышов А.С. Сжатие разреженных матриц путем выделения нулевых блочных матриц // Труды/ Брат. гос. ун-т. Сер. Естественные и инженерные науки – развитию регионов Сибири. 2008. Т. 1. С. 133-137.