УДК 621.315.1.001.63

Г.А. Большанин*, Т.Г. Коробова

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УЧАСТКА РАЙОННОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ В УСЛОВИЯХ ПОНИЖЕННОГО КАЧЕСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Представлено характеристическое уравнение однородного участка трехфазной четырехпроводной электрической цепи в условиях пониженного качества электрической энергии. Предложен вариант его решения.

Ключевые слова: линия электропередачи, формула Кардано, падающие и отраженные волны электромагнитного поля, постоянная распространения волны электромагнитного поля.

Районная электрическая сеть исполняется обычно в трехфазном варианте в виде совокупности четырех проводов: трех линейных и одного нейтрального, то есть представляет собой трехфазную четырехпроводную линию электропередачи (ЛЭП). Иначе ее называют линией с изолированной нейтралью. Она предназначена для транспортировки электрической энергии напряжением от 1000 В до 35 кВ.

В случае визуально заметных уровней несинусоидальности, несимметрии, отклонения и колебания напряжений и токов говорят об электрической энергии пониженного качества. При анализе распределения такой энергии по участкам электроэнергетических систем, ЛЭП должна быть представлена линией с распределенными параметрами в полнофазном варианте.

Анализировать распределение электрической энергии пониженного качества целесообразно по каждому однородному участку ЛЭП на частоте каждой гармонической составляющей напряжения и тока [1]. Результаты такого анализа следует обобщить на всю ЛЭП и на весь спектр основных характеристик электрической энергии.

Математическая модель однородного участка трехфазной четырехпроводной ЛЭП на частоте *n*-й гармонической составляющей напряжения и тока представляет собой совокупность четырнадцати интегро-дифференциальных уравнений. В результате совместного решения этих уравнений можно получить характеристическое уравнение для однородного участка трехфазной трехпроводной ЛЭП в условиях пониженного качества электрической энергии. Оно представляет собой уравнение восьмого порядка:

$$x^8 + ax^6 + bx^4 + cx^2 + d = 0\,, \tag{1}$$

где a, b, c и d – коэффициенты, учитывающие первичные параметры однородного участка анализируемой ЛЭП на частоте n-й гармонической составляющей напряжения и тока.

Восьмая степень характеристического уравнения (1) для трехфазной трехпроводной ЛЭП свидетельствует о том, что в каждом линейном проводе присутствует восемь волн электромагнитного поля: четыре падающих и четыре отраженных. Постоянные распределения этих волн определятся в результате решения этого уравнения.

Для определения корней характеристического уравнения (1) необходимо принять, что

$$x^2 = \lambda\,. \tag{2}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0\,. \tag{3}$$

Для его решения вполне можно использовать метод Декарта–Эйлера [2]. Тогда в результате введения подстановки

$$\lambda = y - \frac{a}{4} \tag{4}$$

характеристическое уравнение (3) сведется к «неполному» виду:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0\,, \tag{5}$$

где $$p = b - \frac{3a^2}{8}\,; \quad q = \frac{a^3}{8} + \frac{ab}{4} + c\,;$$

$$r = \frac{a^2 b}{16} - \frac{3a^4}{256} - \frac{ac}{4} + d\,.$$

Кубическая резольвента уравнения (5) имеет следующий вид [3]:

$$z^3 + 2pz^2 + \left(p^2 - 4r\right)z - q^2 = 0\,. \tag{6}$$

Для решения уравнения (6) есть смысл применить формулу Кардано [3]. Для этого следует выполнить замену:

$$k = z + \frac{2p}{3}\,. \tag{7}$$

Тогда формула (6) примет вид

$$k^3 + mk + n = 0\,, \tag{8}$$

где $$m = -\frac{p^2 + 12r}{3}\,; \quad n = \frac{16p^3}{27} - \frac{2p^3 - 8pr}{3} - q^2\,.$$

Дискриминант полученного уравнения можно определить так: $D = \dfrac{m^3}{27} + \dfrac{n^2}{4}$.

Корни уравнения (8) можно вычислить по формулам [3]

$$k_1 = u + \upsilon\,;$$

$$k_2 = -\frac{u+\upsilon}{2} + j\sqrt{3}\,\frac{u-\upsilon}{2}\,;$$

$$k_3 = -\frac{u+\upsilon}{2} - j\sqrt{3}\,\frac{u-\upsilon}{2}\,,$$

где $u = \sqrt[3]{-\dfrac{n}{2} + \sqrt{D}}\,; \qquad \upsilon = \sqrt[3]{-\dfrac{n}{2} - \sqrt{D}}\,.$

* - автор, с которым следует вести переписку

Из равенства (7) определятся корни уравнения (6):

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{2p}{3}; \tag{9}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{p}{3} + j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]; \tag{10}$$

$$z_3 = \frac{1}{2}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{p}{3} - j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right], \tag{11}$$

а корни «неполного» уравнения (5) – по формулам [3]

$$y_1 = \frac{\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{2}; \qquad y_2 = \frac{\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}}{2};$$

$$y_3 = \frac{-\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3}}{2}; \qquad y_4 = \frac{-\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}}{2}.$$

Принимая во внимание равенства (9), (10) и (11), можно уточнить корни этого уравнения:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{2p}{3}\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{p}{3} + j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{p}{3} - j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2};$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{2p}{3}\right)^{1/2} -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{p}{3} + j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2} -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{p}{3} - j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2};$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{2p}{3}\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{p}{3} + j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2} -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{p}{3} - j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2};$$

$$y_4 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{2p}{3}\right)^{1/2} -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}} - \frac{p}{3} + j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}-j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}.$$

Учитывая использованную ранее подстановку (4), можно определить корни уравнений (3):

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{2p}{3}\right)^{1/2}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}+j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}-j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-\frac{a}{4};$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{2p}{3}\right)^{1/2}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}+j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}--j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-\frac{a}{4};$$

$$\lambda_3=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{2p}{3}\right)^{1/2}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}+j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}-j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-\frac{a}{4};$$

$$\lambda_4=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{2p}{3}\right)^{1/2}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}+j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}-j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-\frac{a}{4}.$$

И наконец, с учетом равенства (2) можно определить корни характеристического уравнения (1):

$$x_{1,2}=\pm\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{2p}{3}\right)^{1/2}+\right.$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}+j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}+$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}-j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-\frac{a}{4}\right\}^{1/2}$$

$$x_{3,4}=\pm\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{2p}{3}\right)^{1/2}-\right.$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}+j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-$$

$$\left.-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}-j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-\frac{a}{4}\right\}^{1/2}$$

$$x_{5,6}=\pm\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{2p}{3}\right)^{1/2}+\right.$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}+j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-$$

$$\left.-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}-j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-\frac{a}{4}\right\}^{1/2}$$

$$x_{7,8}=\pm\left\{-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{2p}{3}\right)^{1/2}-\right.$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}+j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}+$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}-\sqrt{D}}-\frac{p}{3}-j\sqrt{3}\left(\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}-\sqrt[3]{-\frac{n}{2}+\sqrt{D}}\right)\right]^{1/2}-\frac{a}{4}\right\}^{1/2}.$$

Величина постоянных распределения каждой пары волн электромагнитного поля определятся следующим образом:

$$\gamma_{1v}=\left|x_{1,2}\right|;\qquad \gamma_{2v}=\left|x_{3,4}\right|;$$

$$\gamma_{3v}=\left|x_{5,6}\right|;\qquad \gamma_{4v}=\left|x_{7,8}\right|.$$

Анализ характеристического уравнения для однородного участка районной электрической сети позволяет оценить физическую сущность электромагнитных процессов, происходящих в конструктивных элементах ЛЭП.

В частности, судя по результату решения характеристического уравнения, четыре из восьми корней имеют отрицательную вещественную часть, а остальные – положительную. В таком случае, согласно теоремам Ляпунова, описываемый процесс не должен обладать запасом устойчивости. Тем не менее процесс распределения электрической энергии при этих условиях оказывается устойчивым, если корни характеристического уравнения с отрицательной вещественной частью соответствуют падающим волнам электромагнитного поля, а с положительной вещественной частью – отраженным.

Литература

1. Большанин, Г. А. Способ прогнозирования гармонических составляющих электрической энергии по неразветвленным участкам электроэнергетической системы: Патент 2210154, Россия, МКИ[7] H 02 J 3/01/ Г.А. Большанин. – № 2001106402; заявл. 06.03.01; опубл. 10.08.03.

2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.

3. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – 13-е изд., испр. – М.: Наука, 1986. – 544 с.