УДК 519.711.3

А.Н. Дойников*, М.К. Сальникова

МЕТОДИКА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМАХ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

Предложена методика прогнозирования нестационарных процессов в структурно неустойчивых системах с использованием модифицированного сингулярного разложения. Применение графических критериев качества позволяет получать оптимальный состав компонент, имеющий простое математическое описание, что повышает эффективность прогнозирования нестационарных процессов, протекающих в сложных системах.

Ключевые слова: прогнозирование, нестационарные процессы, сингулярный анализ.

Современные большие системы необозримы из-за сложности внутренних взаимосвязей и взаимодействия большого числа факторов, предусмотреть и учесть влияние которых не всегда представляется возможным. При этом системы могут менять режим (планово или случайным образом), структуру элементов, что определяет их новые состояния, качественно отличающиеся от предыдущих, и приводит к нестабильному и нестационарному развитию всех внутренних процессов.

Известно, что свойство нестационарности в таких системах проявляется в двух аспектах [1]:

– возникновение трендов, характеризующихся фундаментальными зависимостями в системе;

– появление некоторых нестабильных по знаку и амплитуде скачков, источниками которых являются случайные во времени события.

Наиболее наглядно эти аспекты отражаются в графиках макроэкономических процессов. На рис. 1 показано изменение цены валютного курса EUR/USD во времени.

Рис. 1. Процесс изменения валютного курса EUR/USD

Проведенный анализ показал, что движение макроэкономической системы в общем случае включает три составляющие: трендовую ($Y_{\text{Т}}$), характеризующую направление развития макроэкономической величины; внутреннюю периодическую составляющую ($Y_{\text{П}}$), определяемую публикацией периодических новостей, главных индикаторов мировой экономики и определяющую колебание цены на рынке в силу существующих противоположных моментов спроса и предложения, и случайную составляющую процесса ($Y_{\text{С}}$), возникающую из-за различных непредвиденных ситуаций на рынке:

$$Y_{\text{МП}} = Y_{\text{Т}} + Y_{\text{П}} + Y_{\text{С}}\,, \qquad (1)$$

где $Y_{\text{МП}}$ – исходные значения переменного ряда макроэкономического показателя.

При этом каждая из трех составляющих в силу структурной неустойчивости макроэкономической системы содержит в себе совокупность различных компонент, которые имеют переменный состав и накладываясь друг на друга, дают в целом сложную картину изменения исследуемого показателя.

Задача повышения адекватности моделирования и эффективности прогнозирования таких процессов приобретает все большую практическую актуальность. В то же время существующий математический аппарат имеет ограниченные возможности для ее решения.

В связи с этим важное значение приобретают методы анализа и моделирования процессов в структурно неустойчивых системах.

Для исследования таких систем необходимо использовать методы, работающие на переменных временных интервалах, которые позволяют характеризовать систему как квазистационарную и соответствуют некоторому вектору текущих

* - автор, с которым следует вести переписку

собственных динамических свойств. Эти методы должны обладать малой инерционностью, чтобы не пропустить «смену тенденций», и способностью к разложению исследуемого объекта на отдельные структурные составляющие для возможного решения задач прогнозирования с использованием принципа аддитивности.

Одним из перспективных методов исследования динамики процессов, обладающих сложной переменной структурой, является метод, основанный на сингулярном разложении исходной выборки.

Суть метода заключается в преобразовании одномерной выборки нестационарного процесса в матрицу развертки с помощью однопараметрической сдвиговой процедуры элементов временного ряда и сингулярного разложения этой матрицы. Из полученного набора главных сингулярных чисел по условию значимости (по убыванию модуля) выбираются такие компоненты, по каждой из которых с допустимой ошибкой может быть восстановлена одна из составляющих исходного ряда.

В работе предложена методика прогнозирования нестационарных процессов, в которой используется модифицированное сингулярное разложение с применением критериев качества разделения исходного сигнала на квазистационарные составляющие. Для пояснения сути модификации рассмотрим особенности алгоритма разложения.

Исходя из внутренних свойств системы для исходного ряда $F(t)=(a_0,...,a_{K-1})$, состоящего из целого числа значений K и характеризующего движение нестационарной системы, по некоторому критерию подбирается целое число M – длина выборки (окна), $1 < M < K$ и составляется матрица развертки A, содержащая $N = K - M + 1$ векторов развертки, имеющих заданную размерность M.

Матрица будет иметь вид

$$A=(a_i)_{i=0}^{K-1}=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_N \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M-1} & a_M & a_{M+1} & \cdots & a_{K-1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где M – число элементов окна; K – число значений исходного ряда.

Далее производится сингулярное разложение матрицы A размером $M\times N$ в виде

$$A=U\cdot W\cdot V^{\mathrm{T}}, \quad (3)$$

где U – ортогональная матрица размером $M\times M$; V – ортогональная матрица размером $N\times N$; W – матрица размером $M\times N$, на главной диагонали которой находятся сингулярные неотрицательные числа, расположенные в порядке убывания, а все недиагональные элементы равны нулю.

С учетом особенностей матрицы W для получения матрицы A требуется не M столбцов матрицы U, а лишь первые min(M,N) столбцов, и только первые min(M,N) строк матрицы V^{T} влияют на результат произведения.

Эти столбцы и строки являются левыми и правыми сингулярными векторами.

Таким образом, исходная матрица развертки разлагается на матрицу левых сингулярных векторов U размерности $M\times L$,

$$L=\min(M,N);$$

транспонированную матрицу правых сингулярных векторов V^{T} размерности $L\times N$ и матрицу сингулярных чисел W размерности $L\times L$.

Исходя из предположения, что каждое сингулярное число w_i в (3) характеризует определенную составляющую движения нестационарной системы, можно определить степень влияния каждого сингулярного числа на результирующий ряд и выделить составляющие процесса.

Так, для того чтобы определить влияние первого сингулярного числа, нужно найти обратную матрицу развертки для первой составляющей по формуле

$$\mathbf{A}^{o}_{1\,M\times K}=\mathbf{U}_{M\times L}\cdot\mathbf{W}_{1\,L\times 1}\cdot\mathbf{V^{\mathrm{T}}}_{1\times K}=\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1L} \\ u_{21} & \cdots & u_{2L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{M1} & \cdots & u_{ML} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1K} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Влияние совокупности i сингулярных чисел находится из соотношения

$$\mathbf{A}'_{i\,M\times K}=\mathbf{U}_{M\times L}\cdot\mathbf{W}_{i\,L\times i}\cdot\mathbf{V^{\mathrm{T}}}_{i\times N}=\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1L} \\ u_{21} & \cdots & u_{2L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{M1} & \cdots & u_{ML} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{i1} & \cdots & v_{iK} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Из выражения (4) влияние последнего i-го сингулярного числа определяется по выражению

$$\mathbf{A}^o_{i\,M\times K} = \mathbf{A}'_{i\,M\times K} - \mathbf{A}'_{(i-1)\,M\times K} = \mathbf{U}_{M\times L} \cdot \mathbf{W}_{i\,L\times i} \cdot \mathbf{V}^{\mathrm{T}}{}_{i\times K} - \mathbf{U}_{M\times L} \cdot \mathbf{W}_{(i-1)\,L\times(i-1)} \cdot \mathbf{V}^{\mathrm{T}}{}_{(i-1)\times K}\,. \qquad (6)$$

Для возвращения к исходному ряду проводится операция усреднения по второстепенным диагоналям полученной суммарной матрицы A (соотношение (2)).

Аналогично для формирования каждой простейшей составляющей, определяемой соответствующим сингулярным числом, необходимо провести операцию усреднения по второстепенным диагоналям обратной матрицы развертки $A_i^{/0}$ и получить ряд F_i:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A}^o_{i\,M\times N} = \mathbf{U}_{M\times L} \cdot \mathbf{W}_{i\,L\times i} \cdot \mathbf{V}^{\mathrm{T}}{}_{i\times N} \to F_i \\ \mathbf{A}^o_{i-1\,M\times N} = U_{M\times L} \cdot \mathbf{W}_{i-1\,L\times i-1} \cdot \mathbf{V}^{\mathrm{T}}{}_{i-1\times N} \to F_{i-1} \end{array}\right\} \to F_i^{\,0} = F_i - F_{i-1}\,. \qquad (7)$$

Таким образом, с помощью метода сингулярного разложения исходную выборку нестационарного временного ряда можно разделить на произвольное число аддитивных компонент, количество которых определяется длиной матрицы развертки A (параметром M).

Результат применения данного метода при анализе выборки процесса изменения валютного курса EUR/USD (рис. 1), история которого содержит 100 недельных значений, представлен на рис. 2.

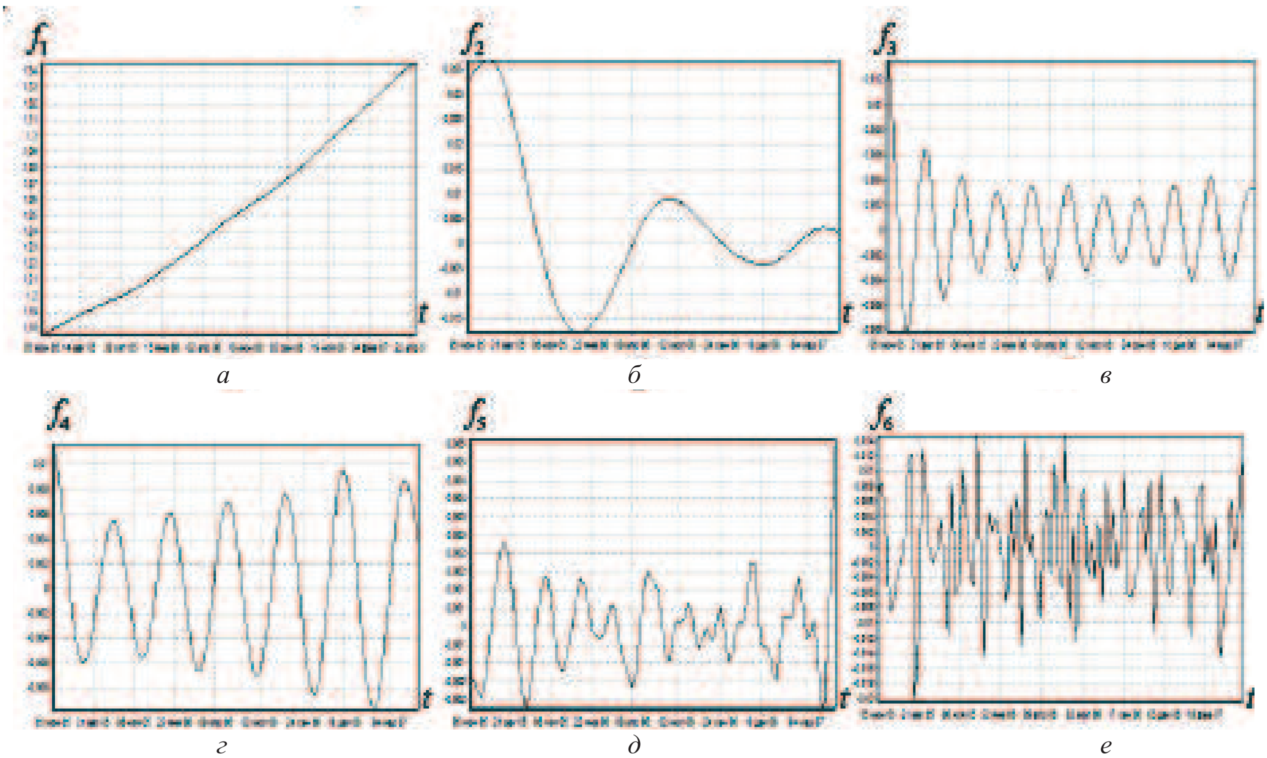


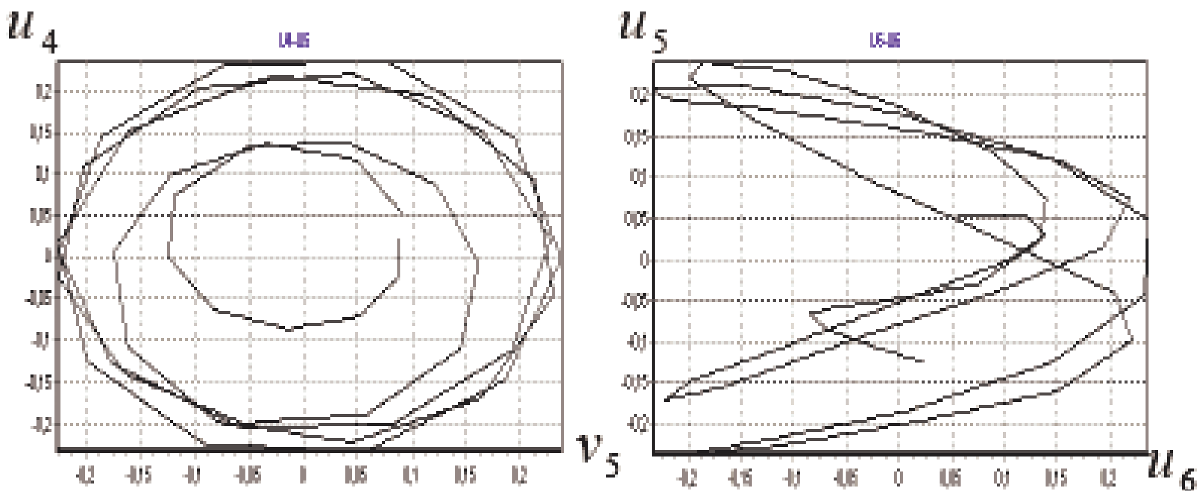
Рис. 2. Ряд, разложенный по 6 сингулярным компонентам

Суммарный ряд, восстановленный с использованием предложенного метода, по всем сингулярным компонентам дал погрешность, определенную по МНК относительно исходной выборки в 0,07 %.

Из представленных графиков следует, что первое сингулярное число характеризует трендовую составляющую ряда (рис. 2, *а*). Второе сингулярное число определяет нерегулярную гармоническую составляющую (рис. 2, *б*). Третье и четвертое сингулярные числа характеризуют одно- и двухчастотные гармонические составляющие исходного ряда (рис. 2, *в*, *г*). На рис. 2, *е* совокупность оставшихся сингулярных чисел в большой степени отражает описание случайной составляющей.

Однако полученные компоненты не характеризуются идеально простейшими типовыми функциями (например, рис. 2, *д*), экспоненциальные тренды не окончательно разделяются с низкочастотными гармоническими составляющими ряда (рис. 2, *б*) и гармонические составляющие имеют меняющуюся амплитуду. Поэтому необходимо дополнительно исследовать особенности применения метода сингулярного разложения с целью повышения качества разделения на компоненты и устранения составляющих движения, не отвечающих требованиям квазистационарности.

На основе анализа фигур, образуемых в пространстве собственных векторов сингулярной матрицы развертки (рис. 3), формализован графический критерий для определения соответствия выделяемых сингулярных компонент идеальному гармоническому сигналу. При этом степень близости этих фигур к кругу (рис. 3, *а*), определяемая по отношению сторон ограничивающего прямоугольника, характеризует уровень соответствия компонент идеальному гармоническому сигналу (рис. 2, *г*).



а *б*

Рис. 3. Графики, образованные парами собственных векторов:
а – высокое качество разложения; *б* – низкое качество разложения

Выявлено, что качество выделяемых композиций разложения определяется вариативным параметром M (длина строки матрицы развертки), который задает пространство исследования траектории многомерной ломаной линии.

Для оценки выделяемых трендовых и гармонических составляющих предложены следующие критерии:

– критерий уровня гладкости H:

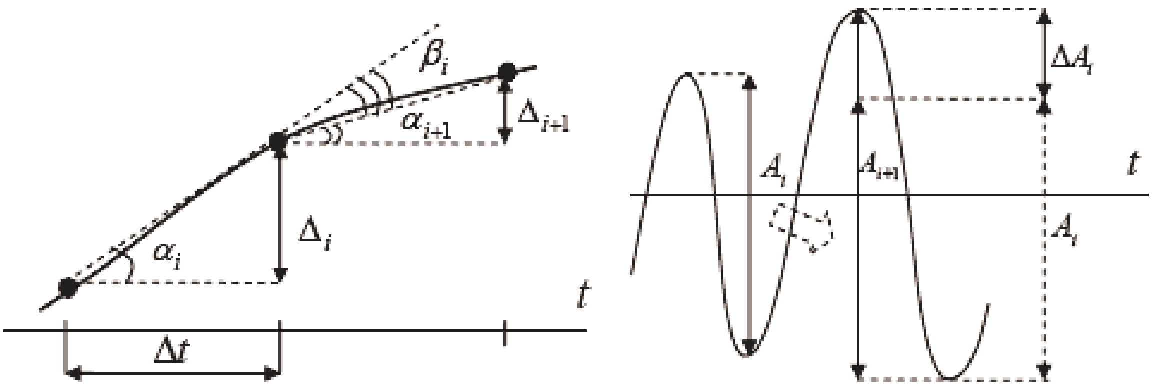
$$H = \max(\beta_i) : i = \overline{1, n-1}, \qquad (8)$$

где β – угол приращения, характеризующий изменение значения производной в i-й точке нестационарной выборки (рис. 4, *а*) временного ряда, содержащего n значений;

– критерий уровня соответствия колебаниям C:

$$C = \max(\Delta A_i) : i = \overline{1, l-1}, \qquad (9)$$

где ΔA – приращение амплитуды для двух соседних колебаний (рис. 4, *б*); l – количество колебаний.



а *б*

Рис. 4. Определение базовых параметров:
а – для критерия уровня гладкости; *б* – для критерия уровня соответствия колебаниям

Предложенные графические критерии (рис. 3 и 4) позволяют контролировать качество выделяемых сингулярных составляющих (рис. 5). Это обстоятельство положено в основу модифицированной методики сингулярного разложения, позволяющего разделять исходный процесс оптимальным образом (до заданного уровня амплитуды остаточной случайной составляющей, рис. 2, *е*) и избегать получения негармонических компонент движения (рис. 2, *д*).

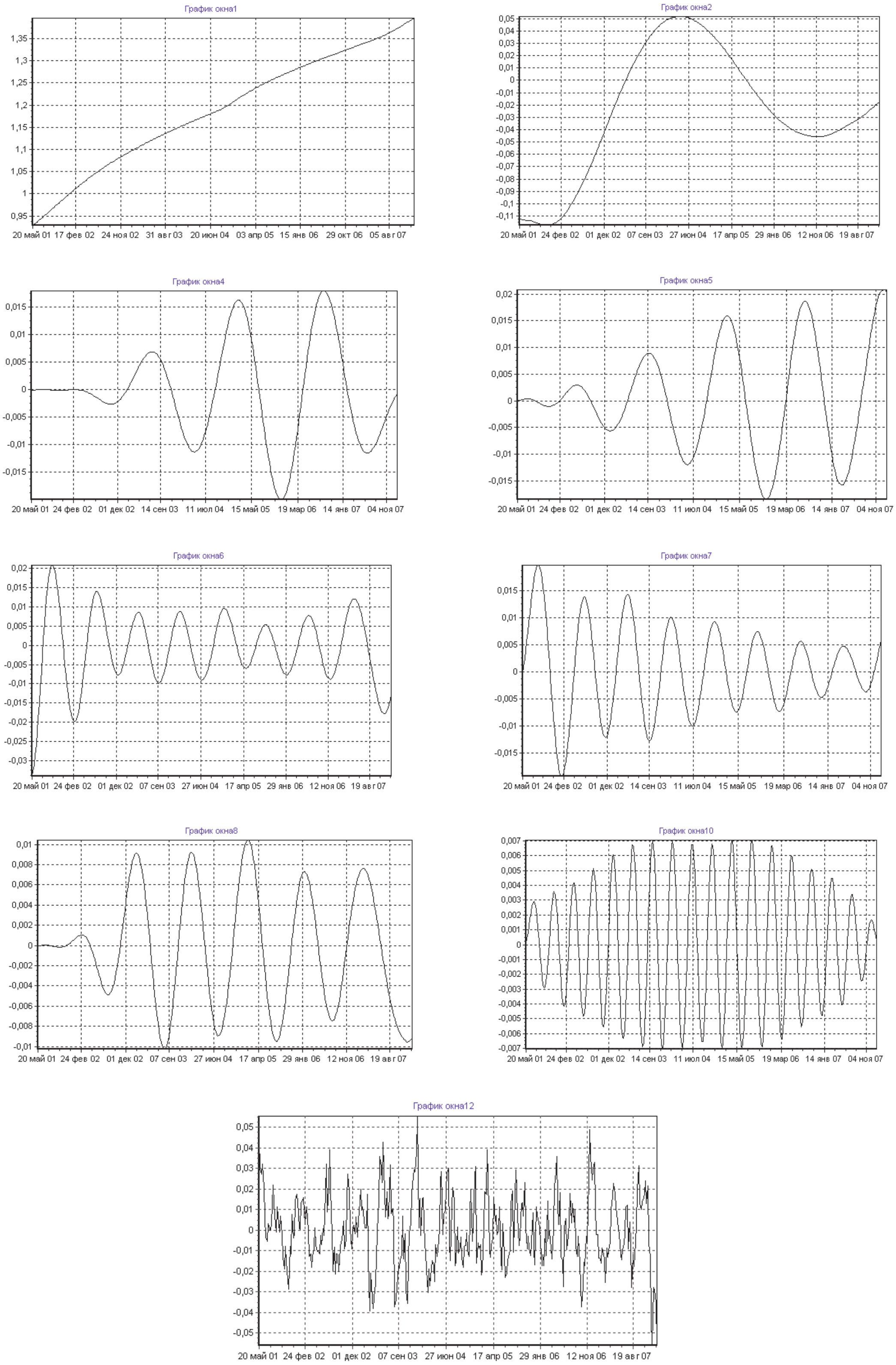


Рис. 5. Ряд, полученный по модифицированной методике
с использованием предложенных критериев качества разложения

Предложенная методика модифицированного сингулярного анализа (рис. 6) позволяет выполнять разложение временного ряда на компоненты, характеризующиеся группами движений, определяющихся трендовыми, гармоническими и случайными составляющими.

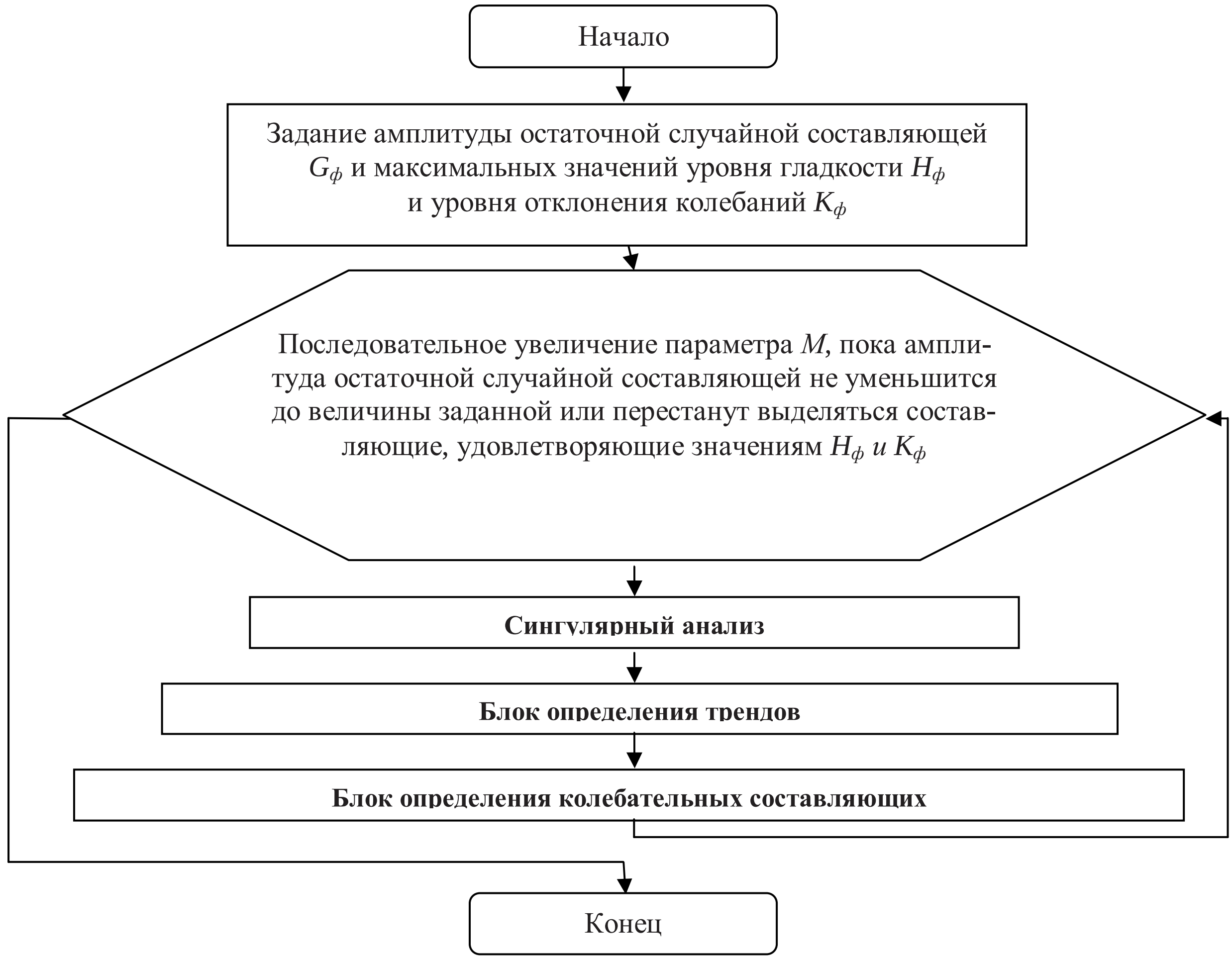


Рис. 6. Блок схема методики модифицированного сингулярного разложения исходной выборки с использованием графических критериев качества

Применение графических критериев качества позволяет получать оптимальный состав компонент, имеющий простое математическое описание и предсказуемый характер, что повышает эффективность прогнозирования нестационарных процессов, протекающих в сложных системах.

Литература

1. Светуньков, С.Г. Количественные методы прогнозирования эволюционных составляющих экономической динамики / С.Г. Светуньков. – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 1999.