УДК 511

Ю.Н. Алпатов*, А.А. Дриженко

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СТРУКТУРЫ С ПОМОЩЬЮ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Разработана методика декомпозиции дробно-рациональной функции высокого порядка в виде композиции элементарных дробей. Введенная операция «обратная связь» позволяет представить передаточные функции высокого порядка в виде элементарных или простых звеньев.

Ключевые слова: число, обратная связь, декомпозиция, звено, полином, алгоритм.

В результате синтеза САУ возникает задача о реализации полученных компонент структуры. Передаточная функция компонент получается в виде дробно-рациональной функции достаточно высокого порядка. Реализация техническими средствами такой функции вызывает большие, часто неоправданные трудности. Поэтому возникает необходимость представить дробно-рациональную функцию в виде определенной структуры элементарных или простых звеньев.

В абстрактном виде постановку задачи можно сформулировать так. Задано множество дробно-рациональных функций $M_в$. На множестве заданы операции [3]:

– сложение: $a = b + c$;
– умножение: $a = b \cdot c$;
– деление: $a = b/c$;

Введем операцию «обратная связь», обозначаемую символом $\bigcirc$, и определим ее следующим образом: $a = b \bigcirc c = b/(1+bc)$.

Из определения вытекает следующие свойства операции:

$$b \bigcirc c \neq c \bigcirc b;$$

$$(b \bigcirc c) \bigcirc d \neq b \bigcirc (c \bigcirc d);$$

$$(b \bigcirc c) \bigcirc d \neq b \bigcirc (c + d),$$

где a, b, c, d – дробно-рациональные функции.

По отношению к этим операциям множество $M_в$ замкнуто.

Следовательно, задана алгебраическая структура [2]:

$$M = < M_в, +, \cdot, /, \bigcirc >.$$

Необходимо найти алгоритм получения для любого $a \in M_в$ выражения с помощью других элементов при заданных операциях, т.е.

$$a = f(\Delta M_в, H),$$

где $\Delta M_в$ – подмножество элементов множества $M_в$, через которые выражается элемент a; H – структура операции между элементами $\Delta M_в$ в представлении элемента a.

Известны разложения [1, 4] любой дробно-рациональной функции $W = \dfrac{Q^m}{R^n}$ на сумму и произведение элементарных дробей:

$$\frac{Q^m}{R^n} = \sum \frac{Q_i^0}{R_i'}\ ;\ m \le n\ ; \qquad (1)$$

$$\frac{Q^m}{R^n} = \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{Q_i'}{R_i'}\right) \cdot \left(\prod_{j=m+1}^{n} \frac{Q_j^0}{R_j'}\right); m \le n; \qquad (2)$$

$$\frac{Q^m}{R^n} = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{Q_i'}{R_i'}\right) \cdot \left(\prod_{j=n+1}^{m} Q_j'\right); m \ge n, \qquad (3)$$

где Q^m – числитель дробно-рациональной функции от переменной S степени m; R^n – знаменатель дробно-рациональной функции от переменной S степени n.

Известно также разложение дробно-рациональной функции в цепную дробь [3, 4]. По определению, представленному в [4], простейшей цепной дробью называется выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}},$$

где a_0, a_1, a_2, … при общем подходе – функции одной или нескольких переменных. Существует множество алгоритмов разложения дробно-рациональной функции в цепную дробь [3]. В работе воспользуемся алгоритмом Эвклида [3], заключающемся в следующем. Дробно рациональную функцию $W = \dfrac{Q^m}{R^n}$ представляем в виде

$$\frac{Q^m}{R^n} = \frac{1}{\dfrac{R^n}{Q^m}} = \frac{1}{A_1^{n-m} + \dfrac{Q^{m-1}}{Q^m}}, \qquad (4)$$

где $R^n = A_1^{n-m} \cdot Q^m + Q^{m-1}$.

Далее, для $\dfrac{Q^{m-1}}{Q^m}$ повторяем преобразование (4). Такие шаги повторяем до тех пор, пока очередной остаток от деления знаменателя на числитель не будет иметь степень 0 для переменной. В результате мы получаем следующее представление дробно-рациональной функции:

* - автор, с которым следует вести переписку

$$\frac{Q^m}{R^n} = \cfrac{1}{A_1^{n-m} + \cfrac{1}{A_2' + \ldots \cfrac{1}{A_m' + \cfrac{Q_m^0}{Q_{m-1}'}}}}, \qquad (5)$$

где A_j^i – частное от j-го деления полинома степени i; Q_j^i - остаток от j-го деления полинома степени i.

При каждой операции деления показатель степени полинома уменьшается на единицу. Отсюда нетрудно видеть, что при использовании алгоритма Эвклида мы получаем m частных, причем первое частное имеет степень $n–m$, а остальная степень 1, в целом же дробно-рациональная функция $\frac{Q^m}{R^n}$ выражается через n дробно-рациональную функцию. Если A_1^{n-m} разложить на произведение полиномов степени 1, то получим выражение $\frac{Q^m}{R^n}$ через n дробно-рациональных функций. Следовательно, во всех случаях разложения $\frac{Q^m}{R^n}$ на элементарные функции (1), (2), (5) мы получаем в разложении n элементов.

Разложение (4) используется при $m \le n$; если $m > n$, то на первом шаге можно воспользоваться следующими соотношениями [4]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q^m}{R^n} &= \frac{1}{\frac{R^n}{Q^m}} = \frac{1}{\frac{Q_1^0}{R_1} + \frac{Q_1^{m-2}}{R_3^{m-1}}};\\ \frac{Q^m}{R^n} &= \frac{1}{\frac{R^n}{Q^m}} = \frac{1}{A_1 + \left(\frac{R^n}{Q^m} - A_1\right)}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Далее продолжаем разложение в соответствии с алгоритмом Эвклида. Число элементов в разложении (6) будет равно m. В случае (3) также получаем m элементов. Следовательно, при разложении в цепную дробь получаем число элементов в разложении, равное max(n v m). Разложение (1) невыполнимо при $n < m$.

Разложениям (1)-(3) соответствует параллельное и последовательное соединение звеньев в структуре системы по каждому составляющему члену этих выражений.

Разложение дробно-рациональной функции в ряд, соответствующее операции обратной связи, в литературе не встречается.

Покажем возможность использования аппарата цепных дробей для отображения системы в виде структуры с использованием компоненты в обратной связи.

Пусть дано выражение

$$a = b\bigcirc(c\bigcirc(d\bigcirc(e\bigcirc k))).$$

Выразим a через b, c, d, e, k и операции +, ·, / и получим

$$a = b\bigcirc(c\bigcirc(d\bigcirc(e\bigcirc/(ek+1)))) =$$
$$= b\bigcirc(c\bigcirc(d/(1+ed/(1+ek)))) =$$
$$= b\bigcirc(c/(1+cd/(1+de/(1+ek)))) =$$
$$= b/(1+bc/(1+cd/(1+de/(1+ek)))) =$$

$$= \cfrac{b}{1+\cfrac{bc}{1+\cfrac{cd}{1+\cfrac{de}{1+ek}}}} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{b}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{c}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{d}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{e}+k}}}}. \qquad (7)$$

Выражение (7) соответствует цепной дроби (5), следовательно, разложив дробно-рациональную функцию $W = \frac{Q^m}{R^n}$, мы получим ее в виде (7). На рис. 1 изображена структурная схема системы, соответствующая выражению (7).

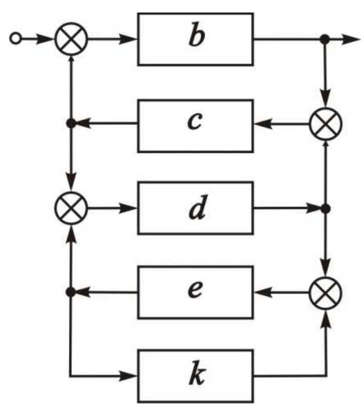

Рис. 1. Структурная схема, реализующая разложение с помощью цепной дроби

Следует отметить, что b, c, d, e, k любые дробно-рациональные функции, т.е. любые объекты, обладающие соответствующей передаточной функцией, могут быть представлены в виде многократной обратной связи.

Разложение (5) имеет преимущество перед (1), (2) и (3) в том, что, в силу наличия комплексных корней, разложения (1–3) не всегда возможны до элементарных звеньев. В этом случае приходится элементы с сопряженными корнями объединить в один элемент, при этом получаем звенья 2-го порядка, что не всегда желательно. С помощью разложения (5) мы можем получить звенья только 1-го порядка без комплексных корней. Рассмотрим методику разложения дробно-рациональной функции только на звенья 1-го порядка. Пусть дана передаточная функция $W = \frac{Q^m}{R^n}$, где степень числителя m меньше степени знаменателя n ($m < n$). Разложим ее в цепную дробь по формуле (5):

$$W=\frac{Q^m}{R^n}=\frac{0{,}4S^3+0{,}5S^2+0{,}2S+0{,}1}{0{,}3S^4+0{,}2S^3+0{,}4S^2+0{,}1S+0{,}01}=\frac{1}{\dfrac{0{,}3S^4+0{,}2S^3+0{,}4S^2+0{,}1S+0{,}01}{0{,}4S^3+0{,}5S^2+0{,}2S+0{,}1}}=$$

$$=\frac{1}{0{,}75S-0{,}4375+\dfrac{0{,}46875S^2+0{,}1125S+0{,}05375}{0{,}4S^3+0{,}5S^2+0{,}2S+0{,}1}}=\frac{1}{0{,}75S-0{,}4375+\dfrac{1}{\dfrac{0{,}4S^3+0{,}5S^2+0{,}2S+0{,}1}{0{,}46875S^2+0{,}1125S+0{,}05375}}}.$$

Далее повторяем деление полиномов, пока максимальная степень остатка от деления не будет иметь степень 0:

$$W=\frac{Q^m}{R^n}=\frac{1}{0{,}75S-0{,}4375+\dfrac{1}{0{,}853S+0{,}862+\dfrac{0{,}054+0{,}057S}{0{,}46875S^2+0{,}1125S+0{,}05375}}}=$$

$$=\frac{1}{0{,}75S-0{,}4375+\dfrac{1}{0{,}853S+0{,}862+\dfrac{1}{\dfrac{0{,}46875S^2+0{,}1125S+0{,}05375}{0{,}054+0{,}057S}}}}=$$

$$=\frac{1}{0{,}75S-0{,}4375+\dfrac{1}{0{,}853S+0{,}862+\dfrac{1}{8{,}199S-5{,}729+\dfrac{0{,}3612}{0{,}054+0{,}057S}}}}=$$

$$=\frac{1}{0{,}75S-0{,}4375+\dfrac{1}{0{,}853S+0{,}862+\dfrac{1}{8{,}199S-5{,}729+\dfrac{1}{\dfrac{0{,}054+0{,}057S}{0{,}3612}}}}}.$$

В результате получаем цепную дробь:

$$W=\frac{Q^m}{R^n}=\frac{1}{0{,}75S-0{,}4375+\dfrac{1}{0{,}853S+0{,}862+\dfrac{1}{8{,}199S-5{,}729+\dfrac{1}{0{,}158S+0{,}1486}}}}. \qquad (8)$$

В результате разложения получено 3 частных (результатов от деления), а функция $W=\dfrac{Q^m}{R^n}$ выражена через 4 дробно-рациональных функции, что соответствует алгоритму Эвклида. На рис. 2 изображена структурная схема, соответствующая выражению (8).

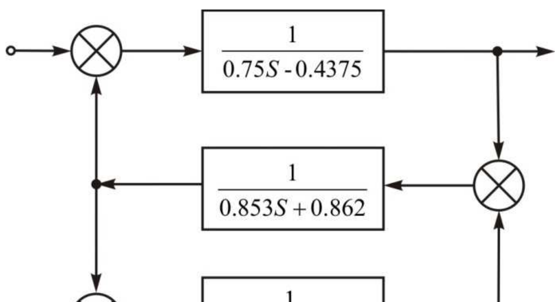

Рис. 2. Структурная схема, реализующая разложение с помощью цепной дроби

Теперь рассмотрим случай, когда $m > n$ ($m = 4$, $n = 3$):

$$W = \frac{Q^m}{R^n} = \frac{0{,}3S^4 + 0{,}2S^3 + 0{,}4S^2 + 0{,}1S + 0{,}01}{0{,}4S^3 + 0{,}5S^2 + 0{,}2S + 0{,}1} = \frac{1}{\dfrac{0{,}4S^3 + 0{,}5S^2 + 0{,}2S + 0{,}1}{0{,}3S^4 + 0{,}2S^3 + 0{,}4S^2 + 0{,}1S + 0{,}01}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{1{,}333}{S} + \dfrac{0{,}233S^2 - 0{,}333S - \dfrac{0{,}013}{S}}{0{,}3S^4 + 0{,}2S^3 + 0{,}4S^2 + 0{,}1S + 0{,}01}} = \frac{1}{\dfrac{1{,}333}{S} + \dfrac{1}{\dfrac{0{,}3S^4 + 0{,}2S^3 + 0{,}4S^2 + 0{,}1S + 0{,}01}{0{,}233S^2 - 0{,}333S - \dfrac{0{,}013}{S}}}}.$$

Первое частное будет иметь степень n–m, это означает, что степень S станет отрицательной. Такое деление может быть бесконечным, поэтому прерываем его при появлении первой переменной в частном.

Затем делим полиномы, как описано выше. В результате получаем цепную дробь

\

$$W = \frac{Q^m}{R^n} = \frac{1}{\dfrac{1{,}333}{S} + \dfrac{1}{1{,}286S^2 + 2{,}693S + 5{,}746 + \dfrac{1}{0{,}1099S - 0{,}1694 + \dfrac{1}{-1377{,}515S + 165{,}588 + \dfrac{1}{-0{,}011S - 0{,}00263}}}}}. \quad (9)$$

Таким образом, используя методику разложения дробно-рациональной функции в виде цепной дроби, можно любую передаточную функцию реализовать с помощью определенной структуры из элементарных звеньев. С помощью разложения (5) мы всегда получаем звенья только 1-го порядка. Такая структура может быть легко реализована техническими средствами. На языке Maple разработана программа, реализующая этот метод разложения.

Литература

1. Вардер, Б.Л. Алгебра / Б.Л. Вардер, Д.В. Вандер. – М: Наука, 1979. – 280 с.
2. Фрид, Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру. – М.: Мир, 1979. – 260 с.
3. Хованский, А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: Мир, 1973. – 368 с.
4. Хинчин, Д.Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.