*УДК 531.44*

***П.М. Огар*, Е.А. Ключев, О.В. Максимова***

# ИНЖЕНЕРНАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОПОКОМПОЗИТОВ

*На основании жесткостной модели слоистого полупространства разработана инженерная методика определения упругой характеристики топокомпозитов в зависимости от упругих характеристик покрытия и основного материала, толщины покрытия и степени деформации.*

**Ключевые слова:** топокомпозиты, слоистое полупространство, упругая характеристика, шероховатая поверхность, контактные характеристики, относительная площадь контакта.

Для повышения надежности соединений деталей машин, работающих в экстремальных условиях, в настоящее время широко используются различные покрытия и модифицированные поверхностные слои на основе металлов, керамик, полимеров. Тела с тонкими покрытиями было предложено называть топокомпозитами [1].

Рассмотрим слоистое упругое тело (рис. 1), которое состоит из покрытия толщиной $\delta$ с упругими характеристиками $\mu_1$ и $E_1$ и основного материала с упругими характеристиками $\mu_0$ и $E_0$. Задача определения напряжений и деформаций при нагружении слоистого упругого тела чрезвычайно актуальна, в частности, для топокомпозитов триботехнического назначения. Точное решение этой задачи при осесимметричном нагружении приведено в [2], однако оно трудоемко для инженерных расчетов. В работе [3] для этой цели предложено использовать теорию Герца. На основе достоверных результатов для крайних значений $\delta = 0$ и $\delta = \infty$ и с использованием двухточечной аппроксимации Паде, получено выражение для безразмерного упругогеометрического параметра, с помощью которого определяется упругая постоянная слоистого полупространства и все основные характеристики при его осесимметричном нагружении.

Авторами на основании жесткостной модели определена упругая характеристика полупространства с однослойным покрытием для любых значений $\delta$ [4, 5]. Приведем основные результаты указанных работ в виде, удобном для их использования при определении упругой характеристики топокомпозитов с многослойными покрытиями. Рассмотрим нагружение слоистого полупространства (рис. 1) нормальными напряжениями в круговой области:

$$p(\rho) = p_0\sqrt{1-\rho^2/a^2}\ ,\ 0 \le \rho \le a\,.$$

Следуя классическому подходу, основанному на применении потенциальных функций Буссинеску, перемещение любой точки по оси симметрии внутрь однородного полупространства для случая его нагружения распределенной нагрузкой [6] определяется выражением

$$u_z = \frac{1+\mu}{2\pi E}\left[2(1-\mu)\psi - z\frac{d\psi}{dz}\right], \qquad (1)$$

где $E$ – модуль упругости; и $\mu$ – коэффициент Пуассона;

$$\psi = \iint_s p(\rho)\frac{1}{R}\rho d\rho d\varphi\,,\ R = \sqrt{\rho^2 + z^2}\,;$$

или с учетом выражения (1) и того, что $\bar\rho = \rho/a$ и $\bar z = z/a$ ,

$$\psi = 4p_0 a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\bar\rho^2}\,\bar\rho\, d\bar\rho\, d\varphi}{\sqrt{\bar\rho^2 + \bar z}},$$

$$\psi = \pi p_0 a\left[(1+\bar z)arcctg\bar z - z\right]. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1) получим

$$u_z = \theta p_0 a K(\bar z, \mu)\,, \qquad (3)$$

где $\theta = (1-\mu^2)/E$ ;

$$K(\bar z,\mu) = \mathrm{arcctg}\bar z - \frac{\mu}{1-\mu}\bar z(1 - \mathrm{arcctg} z).$$

Перемещения точки $O$ (рис. 1), находящейся на оси $z$ под нагрузкой, можно представить в виде суммы перемещений слоя $\omega_\delta$ и основания $\omega_a$:

$\omega_0 = \omega_\delta + \omega_a$.

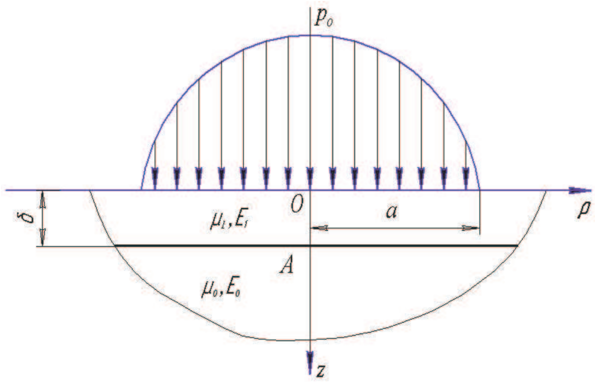



Рис. 1. Схема нагружения слоистого полупространства

Схему (рис.1) можно представить в виде рис. 3, *а*. Тогда перемещения

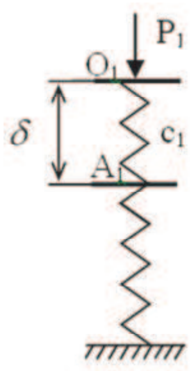
$$\omega_\delta = Pc_1\,, \qquad \omega_a = Pc_0\,, \qquad \omega_0 = P(c_1 + c_0),$$

где $c_1$, $c_0$ – жесткости слоя и основного материала.

* - автор, с которым следует вести переписку

Введем два однородных полупространства с упругими характеристиками $\mu_1$, $E_1$ и $\mu_0$, $E_0$, нагруженные соответственно силами $P_1$ и $P_0$ (рис. 3).

Силы $P_1$ и $P_0$ и соответственно максимальные давления $p_{01}$ и $p_{00}$ выбираются из условия равенства перемещений: $\omega_\delta = \omega_1$; $\omega_a = \omega_0$.




*а* *б*

Рис. 2. Схемы однородных полупространств

Упростим обозначения, приняв

$K_i(0,\mu_i) = K_i(0)$, $\quad K_i(\bar{\delta},\mu_i) = K_i(\bar{\delta})$.

Тогда $\omega_\delta = \theta_1 p_{01} a[K_1(0) - K_1(\delta)]$.

Для схемы (рис. 2, *б*)

$$\omega_{A0} = u_{zA0} = \theta_0 p_{00} a K_0(\bar{\delta});$$

$$c_1 = \frac{u_{zO1} - u_{zA1}}{P_1}, \; c_0 = \frac{u_{zA0}}{P_0}. \tag{3}$$

Для схемы (рис. 3, *а*)

$$\omega_0 = \frac{P}{P_1}(u_{zO1} - u_{zA1}) + \frac{P}{P_0} u_{zA0}.$$

Из эквивалентности схем нагружения на рис. 4, *а* и 4, *б* следует:

$$P = P_1 \frac{c_1}{c_1 + c_0} + P_0 \frac{c_0}{c_1 + c_0}, \tag{4}$$

или

$$p_0 = p_{01} \frac{c_1}{c_1 + c_0} + p_{00} \frac{c_0}{c_1 + c_0}. \tag{5}$$

Значение $p_{01}$ определим из условий равенства сжатия покрытия толщиной δ для слоистого тела под нагрузкой $p_0$ и однородного материала под нагрузкой $p_{01}$:

$$\theta p_0 a[K_{01}(0) - K_{01}(\bar{\delta})] = \theta_1 p_{01} a[K_1(0) - K_1(\bar{\delta})],$$

$$p_{01} = \frac{\theta}{\theta_1} \frac{K_{01}(0) - K_{01}(\bar{\delta})}{K_1(0) - K_1(\bar{\delta})} p_0. \tag{6}$$

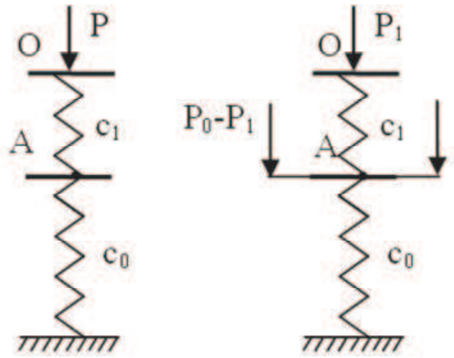
Значение $p_{00}$ определим из условия равенства перемещений при $z = \delta$ слоистого тела под нагрузкой $p_0$ и однородного материала при $z = \delta$ под нагрузкой $p_{00}$:

$$\theta p_0 a K_{01}(\bar{\delta}) = \theta_0 p_{00} a K_0(\bar{\delta}), \; p_{00} = \frac{\theta}{\theta_0} \frac{K_{01}(\bar{\delta})}{K_0(\bar{\delta})} p_0. \tag{7}$$

Для схемы (рис. 3, *а*)

$$\omega_\delta = \omega_{O1} - \omega_{A1} = u_{zO1} - u_{zA1} = \\ = \theta_1 p_{O1} a\left[K_1(0,\mu_1) - K_1(\bar{\delta},\mu_1)\right],$$

где $\bar{\delta} = \delta / a$.




*а* *б*

Рис. 3. Эквивалентная схема нагружения слоистого полупространства

Выражения (3) представим в виде

$$c_1 = \frac{3\theta_1}{2\pi a}\left[K_1(0) - K_1(\bar{\delta})\right], \tag{8}$$

$$c_0 = \frac{3\theta_0}{2\pi a} K_0(\bar{\delta}) = \frac{3\theta_1}{2\pi a} \cdot \frac{p_{01}}{p_{00}} K_1(\bar{\delta}).$$

С учетом выражений (6) и (7) имеем

$$c_0 = \frac{3\theta_0}{2\pi a} \cdot \frac{K_{01}(0) - K_{01}(\bar{\delta})}{K_1(0) - K_1(\bar{\delta})} \cdot \frac{K_0(\bar{\delta})}{K_{01}(\bar{\delta})} \cdot K_1(\bar{\delta}). \tag{9}$$

Подставляя выражения (6), (7), (8) и (9) в (5) и учитывая, что $K_1(0) = K(0)$, получим

$$\theta_{01} = \theta_1 F_{1\delta},$$

где

$$F_{1\delta} = \frac{1}{K_1(0)}\left[\frac{\left(K_1(0) - K_1(\bar{\delta})\right)^2}{K(0) - K(\bar{\delta})} + K_1(\bar{\delta}) \frac{K_0(\bar{\delta})}{K(\bar{\delta})} \cdot \frac{\theta_0}{\theta_1}\right]. \tag{10}$$

При $\delta = 0$ $\theta_{01} = \theta_0$; при $\delta = \infty$ $\theta_{01} = \theta_1$, т.е. для крайних значений толщины покрытия упругая характеристика соответствует однородному телу основания и покрытия.

Так как значения функции $K(\bar{\delta},\mu)$ для $\mu = 0{,}3\ldots0{,}5$ изменяются незначительно, то с большой степенью точности (погрешность менее 1 %) можно принять

$$\mu_{01} = \mu_1 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{1 - \theta_0/\theta_1} F_\delta$$

и решать уравнение (10) относительно $F_\delta$ с начальным приближением:

$$F_{1\delta 0} = F_{1\delta}\big|_{\mu_{01} = 0.5(\mu_1 + \mu_0)}.$$

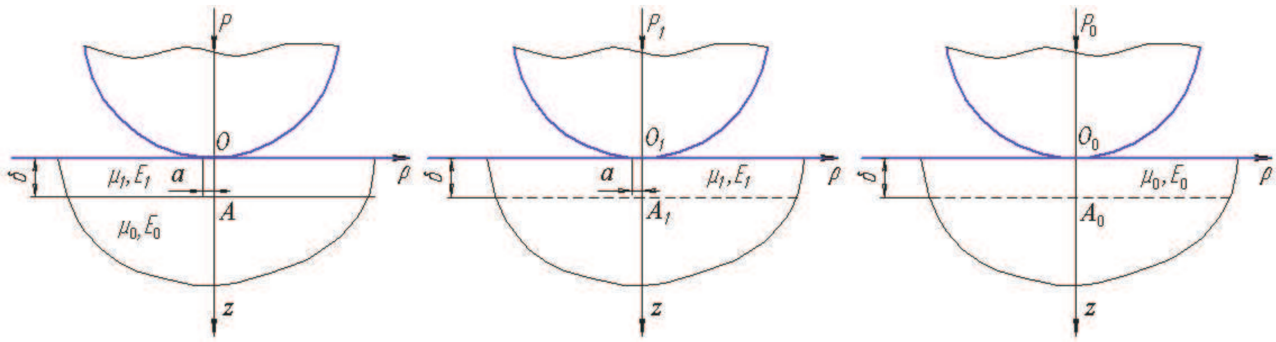
Рассмотрим контакт жесткой сферы радиусом R со слоистым полупространством (рис. 4). Согласно данным [4] радиус площадки контакта

$$a = \left( \frac{3PR\theta}{4} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Перемещение точки $O$ (рис. 4, *а*) может быть представлено в виде суммы перемещений покрытия и основания под нагрузкой $P$:

$$\omega_0 = \omega_\delta + \omega_a.$$

Введем две новые схемы контактирования (рис. 4, *б*, *в*) сферы радиусом $R$ под нагрузками $P_1$ и $P_0$ с однородными полупространствами, имеющими упругие характеристики $\mu_1$, $E_1$ и $\mu_0$, $E_0$ соответственно.




*а* *б* *в*

Рис. 4. Расчетная схема контактирования (*а*) и схемы контакта сферы с однородным полупространством, имеющим характеристики $\mu_1$, $E_1$ (*б*) и $\mu_0$, $E_0$ (*в*)

В соответствии с ранее использованным подходом $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

Сжатие однородного слоя толщиной $\delta$ определяем выражением

$$\omega_1 = \theta_1 p_{01} a \left[ K_1(0) - K_1(\bar{\delta}) \right] = \frac{3\theta_1 P_1}{2\pi a} \left[ K_1(0) - K_1(\delta) \right],$$

или с учетом (11)

$$\omega_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{6^2 \theta_1^2 P_1^2}{R} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ K_1(0) - K_1(\bar{\delta}) \right].$$

Соответствующая жесткость равна

$$c_1 = \frac{\omega_1}{P_1} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{9\theta_1^2}{2RP_1} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ K_1(0) - K_1(\bar{\delta}) \right]. \qquad (11)$$

Перемещения точек $A_1$ и $A_0$ должны быть равны. Тогда

$$c_0 = \frac{\omega_0}{P_0} = \frac{\omega_1}{P_0} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{9\theta_1^2 P_1^2}{RP_0^3} \right)^{\frac{1}{3}} K_1(\bar{\delta}). \qquad (12)$$

Значение $P_1$ определяем из условия равенства перемещений, при $z = \delta$, слоистого упругого тела под нагрузкой $P$ и однородного материала под нагрузкой $P_1$:

$$\frac{1}{\pi} \left( \frac{9\theta^2 P^2}{2R} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ K(0) - K(\bar{\delta}) \right] = \frac{1}{\pi} \left( \frac{9\theta_1^2 P_1^2}{2R} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ K_1(0) - K_1(\bar{\delta}) \right],$$

$$P_1 = \frac{\theta}{\theta_1} \left( \frac{K(0) - K(\bar{\delta})}{K_1(0) - K_1(\bar{\delta})} \right)^{\frac{3}{2}} P. \qquad (13)$$

Значение $P_0$ определим из условия равенства перемещений, при $z = \delta$, слоистого упругого тела под нагрузкой $P$ и однородного материала под нагрузкой $P_0$. В результате получим

$$P_0 = \frac{\theta}{\theta_0} \left( \frac{K(\bar{\delta})}{K_0(\bar{\delta})} \right)^{\frac{3}{2}} P. \qquad (14)$$

Подставляя (11), (12), (13) и (14) в (4) и учитывая, что $K_0(0) = K_1(0)$, получим

$$\theta_{01} = \theta_1 F_{1R},$$

где

$$F_{1R} = \frac{1}{K_1(0)} \left[ \frac{\left( K_1(0) - K_1(\bar{\delta}) \right)^2}{K(0) - K(\bar{\delta})} + K_1(\bar{\delta}) \left( \frac{K_0(\bar{\delta})}{K(\bar{\delta})} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\theta_0}{\theta_1} \right]. \qquad (15)$$

При $\delta = 0$ $\theta_{01} = \theta_0$, при $\delta = \infty$ $\theta_{01} = \theta_1$, т.е. для крайних значений толщины покрытия упругая характеристика соответствует однородному телу основания и покрытия.

Следует отметить, что выражение (15) отличается от аналогичного (10) только показателем степени во втором слагаемом.

Как показал анализ зависимостей (10) и (15), отклонения между ними для $\bar{\delta} = 0...20$ не превышали 0,2 %. Поэтому для инженерных расчетов можно принять $F_{1R} \cong F_{1\delta} = F_1$.

Для случая контакта гладкой жесткой сферы со слоистым полупространством сближение тел определяется выражением

$$\omega = \omega_1 F_1^{\frac{2}{3}}.$$

Для радиуса контакта и максимального давления $p_0$ получим

$$a = a_1 F_1^{\frac{1}{3}}, \quad p_0 = p_{01} F_1^{-\frac{2}{3}}.$$

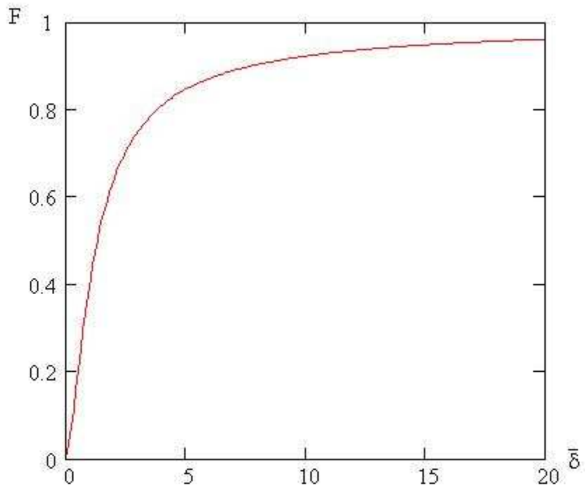



Рис. 5. Зависимость параметра $F$ от $\bar{\delta}$ для $E_1$ = 2,39 гПа, $\mu_1$ = 0,38, $E_0$ = 201 гПа, $\mu_0$ = 0,3

Зависимость $F_1(\bar{\delta})$ представлена на рис. 5. Для $\bar{\delta}=0$ значение $F_1=\theta_0/\theta_1$, для $\bar{\delta}\to\infty$ значение $F_1\to 1$. Существенное увеличение параметра $F_1$ наблюдается в диапазоне $\bar{\delta}=0....5$.

Для двухслойного покрытия, когда добавляется верхний слой толщиной $\delta_2$ с упругими характеристиками $\mu_2$ и $E_2$, по аналогии с выражением (10) получим

$$F_2=\frac{1}{K_2(0)}\left[\frac{\left(K_2(0)-K_2(\bar{\delta}_2)\right)^2}{K_{02}(0)-K_{02}(\bar{\delta}_2)}+K_2(\bar{\delta}_2)\frac{K_{01}(\bar{\delta}_2)}{K_{02}(\bar{\delta}_2)}\cdot\frac{\theta_{01}}{\theta_2}\right].$$

При определении $K_{02}(\bar{\delta}_2)$ следует использовать значение

$$\mu_{02}=\mu_2-\frac{\mu_2-\mu_{01}}{1-\theta_{01}/\theta_2}F_2 .$$

Применение двухслойных покрытий позволяет более эффективно получать топокомпозиты с заданными характеристиками и трибологическими свойствами. При этом материал основы должен обеспечивать прочность конструкции, нижнее покрытие – необходимую жесткость, а верхнее – заданные трибологические характеристики.

*Литература*

1. Воронин, Н.А. Топокомпозиты – новый класс конструкционных материалов триботехнического назначения. Ч.1 / Н.А. Воронин // Трение и износ. – 1999. – Т. 20. – № 3. – С. 313–320.

2. Макушкин, А.П. Полимеры в узлах трения и уплотнениях при низких температурах /А.П. Макушкин. – М.: Машиностроение, 1993. – 288 с.

3. Воронин, Н.А. Применение теории упругого контакта Герца к расчету напряженно-деформированного состояния слоистого упругого тела / Н.А. Воронин // Трение и износ. – 1993. – Т. 14. – № 5. – С. 250–258.

4. Огар, П.М. К расчету напряженно-деформированного состояния слоистого упругого тела / П.М. Огар, О.В. Максимова, А.Н. Автушко [и др.] // Труды БрГУ. – Т.2. – Братск: БрГУ, 2006. – С. 297–302.

5. Огар, П.М. Контакт шероховатой поверхности со слоистым упругим полупространством / П.М. Огар, О.В. Максимова, А.Н. Автушко [и др.] // Труды БрГУ. – Т.2. – Братск: БрГУ. –2006. – С. 302–307.

6. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.