УДК 621.891

***П.М. Огар*, А.А. Дайнеко, С.С. Клюс***

# КРИТЕРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ КОНТАКТА ТЯЖЕЛОНАГРУЖЕННЫХ ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

*Определен критерий пластичности при контактировании шероховатой поверхности с упругим полупространством с учетом взаимного влияния неровностей. Показано, что начало пластической деформации отдельной неровности зависит от общего напряженно-деформированного состояния полупространства.*

**Ключевые слова:** шероховатость, контактирование шероховатых поверхностей, упругая деффонация, критерий пластичности, взаимное влияние неровностей.

Задача отыскания критерия пластичности окончательно не решена. Все предложенные до сих пор критерии имеют ограниченную область применения. Наиболее близкое совпадение с экспериментальными данными по вдавливанию инденторов в упруго-пластичные среды показали энергетическая теория сдвиговой деформации Мизеса и теория максимальных касательных напряжений Треска. Различие двух критериев невелико, поэтому целесообразно использовать критерий Треска из-за его алгебраической простоты. Третий критерий пластичности известен как критерий максимального приведенного напряжения. Критерий Треска и критерий приведенного напряжения образуют пределы, между которыми находится истинный критерий пластичности [1].

Перечисленные выше критерии были исследованы в работе [2] для их применения при контактировании шероховатых поверхностей без учета взаимного влияния неровностей. Однако для многих соединений деталей машин характерна большая плотность пятен контакта, при которой на контактные характеристики в значительной мере оказывают взаимное влияние неровности. Поэтому вызывает практический интерес определение начала пластической деформации неровности для тяжелонагруженного контакта шероховатых поверхностей.

Рассмотрим контакт жесткой шероховатой поверхности, а также отдельной сферической поверхности радиусом $R$ и с вершиной, расположенной на расстоянии $uR_{\max}$ от линии вершин шероховатой поверхности, с упруго-пластическим полупространством в системе цилиндрических координат ρ, φ, $z$ с началом в точке $O$, принадлежащей недеформированной поверхности полупространства. Влияние на характеристики контакта отдельной неровности в пределах круговой области $W_1(\rho=\overline{0,a_{ri}})$ напряжений на остальных пятнах контакта будет эквивалентно влиянию равномерно распределенной нагрузки $q_c$, действующей в кольцевой области $W_2(\rho=\overline{a_{ci},a_L})$, причем $a_L >> a_{ci}$. Решение данной осесимметричной задачи представлено в работах [3–6]. Ниже приведем выражения, характеризующие контакт отдельной неровности и шероховатой поверхности с полупространством.

Распределение контактного давления на площадке контакта

$$q_{ri}(\rho)=\frac{4\eta_i^{0.5}\omega R_{\max}}{\pi\theta a_{ci}}\sqrt{1-\frac{\rho_i^2}{a_{ri}^2}}+\frac{q_c}{\pi}\arccos\frac{1-\eta_i(2-\rho_i^2/a_{ri}^2)}{1-\eta_i\rho_i^2/a_{ri}^2}, \quad (1)$$

контурное давление для отдельной неровности

$$q_{ci}=\frac{8\eta_i^{1,5}\omega R_{\max}}{3\pi\theta a_{ci}}+q_c\psi_\eta(\eta_i), \quad (2)$$

где $$\psi_\eta(\eta_i)=\frac{2}{\pi}\left[\arcsin\eta_i^{0,5}-\sqrt{\eta_i(1-\eta_i)}\right]. \quad (3)$$

В приведенных выражениях $\omega$, $R_{\max}$, $a_{ci}$ – параметры микрогеометрии; $\theta=E/(1-\mu^2)$ – упругая постоянная; $\eta_i=a_{ri}^2/a_{ci}^2$.

Среднее $q_{mi}$ и максимальное давление $q_{ri}(0)$ на пятне контакта

$$q_{mi}=\frac{q_{ci}}{\eta_i}=\frac{8\eta_i\omega R_{\max}}{3\pi\theta a_c}+q_c\psi_\eta(\eta_i), \quad (4)$$

$$q_{ri}(0)=\frac{4\eta_i^{0,5}\omega R_{\max}}{\pi\theta a_{ci}}+\frac{q_c}{\pi}\arccos(1-2\eta_i). \quad (5)$$

Упругий контакт шероховатой поверхности с полупространством описывается выражениями

$$F_q(\varepsilon)=\frac{\frac{8}{3\pi}\int_0^{\min(\varepsilon,\varepsilon_s)}\eta_i^{1,5}\varphi_n'(u)du}{1-\int_0^{\min(\varepsilon,\varepsilon_s)}\psi_\eta(\eta_i)\varphi_n'(u)du}; \quad (6)$$

$$q_c(\varepsilon)=\int_0^{\min(\varepsilon,\varepsilon_s)}q_{ci}\varphi_n'(u)du; \quad \eta(\varepsilon)=\int_0^{\min(\varepsilon,\varepsilon_s)}q_{ci}\varphi_n'(u)du \quad (7)$$

где $$F_q=\frac{\theta q_c a_c}{\omega R_{\max}}, \quad (8)$$

$$\eta_i=\frac{\varepsilon-u}{2\omega}-F_q\left[1+\frac{F_q}{2}\sqrt{\left(1+\frac{F_q}{2}\right)^2-\frac{\varepsilon-u}{2\omega}}\right]. \quad (9)$$

Область применения выражений (1)…(9) ограничена критерием пластичности, определяющим начало пластической деформации.

---

* - автор, с которым следует вести переписку

Схема нагружения полупространства при контактировании отдельной неровности представлена на рис. 1.

Для определения напряженно-деформированного состояния внутри полупространства используем соотношения закона Гука:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_r = 2G\left[\varepsilon_r + \frac{\mu}{1-2\mu}\cdot e\right]; \sigma_\varphi = 2G\left[\varepsilon_\varphi + \frac{\mu}{1-2\mu}\cdot e\right]; \\ &\sigma_z = 2G\left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{2-2\mu}\cdot e\right]; \tau_{rz} = G\cdot\gamma; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}; \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ &\gamma = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ &e = \varepsilon_z + \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Вначале определим перемещения $u_z$ и $u_r$. Используем принцип суперпозиции перемещений от действия нагрузок $q_r$ и $q_c$:

$$u_z = u_{z1} + u_{z2}.$$

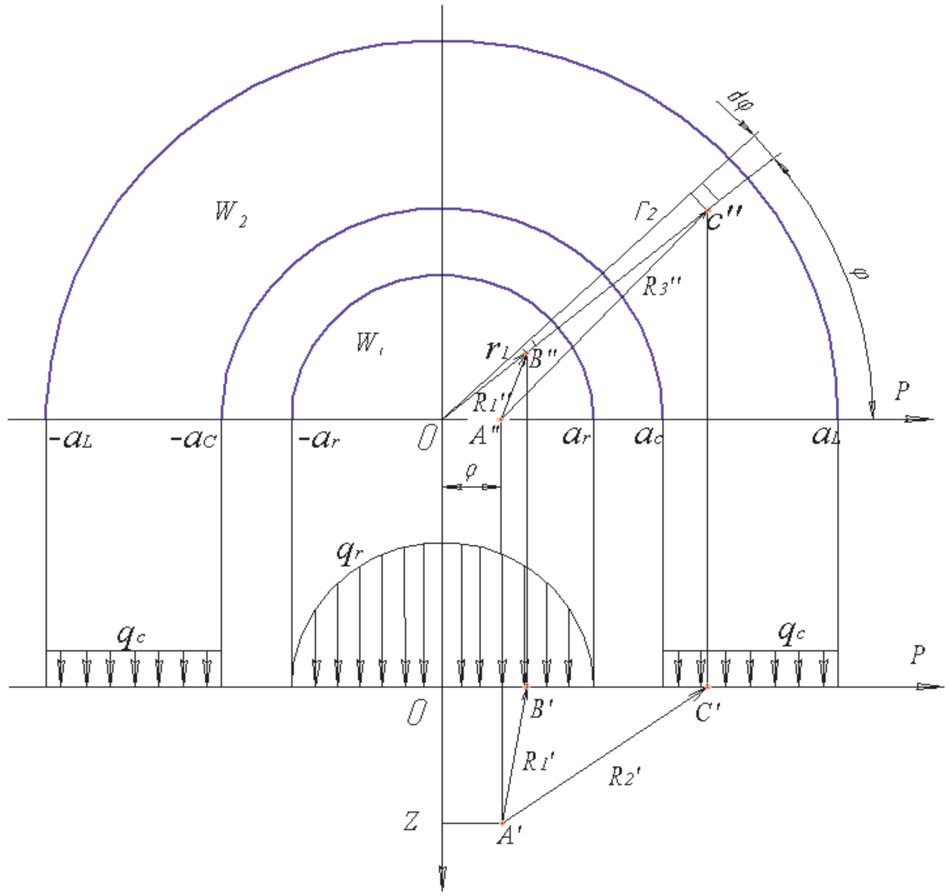


Рис. 1. Схема нагружения полупространства

Согласно данным работы [1]

$$u_z = \frac{\theta}{\pi}\left[\psi - \frac{z}{2(1-\mu)}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}\right],$$

где $\psi = \psi_1 + \psi_2$,

$$\psi_1 = \iint\limits_{W_1} q_1(r_1)\frac{1}{R_1} r_1 dr_1\varphi \;;$$

$$\psi_2 = \iint\limits_{W_1} q_c \frac{1}{R_2} r_2 dr_2 d\varphi \;;$$

$$R_i = \sqrt{r_i^2 + \rho^2 + z^2 - 2r_i\rho\cos\varphi}, \; i = 1;\, 2 .$$

Так как распределение $q_r(r_1)$ незначительно отличается от герцевского, то

$$q_r(r_1) = q_{r0}\sqrt{1 - r_1^2 / a_r^2} .$$

Тогда

$$\psi_1 = 2q_{r0}\int_0^{a_r}\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 - r_1^2 / a_r^2}\, r_1 dr_1 d\varphi}{\sqrt{r_2^2 + \rho^2 + z^2 - 2r_2\rho\cos\varphi}},$$

$$\psi_1 = 2q_c\int_{a_r}^{a_L}\int_0^{\pi} \frac{r_2 dr_2 d\varphi}{\sqrt{r_2^2 + \rho^2 + z^2 - 2r_2\rho\cos\varphi}} .$$

Обозначая

$$\bar r_1=\frac{r}{a_r}\ ,\quad \bar\rho=\frac{\rho}{a_r}\ ,\quad \bar z_1=\frac{z}{a_r}\ ,$$

$$\bar r_2=\frac{r_2}{a_c}\ ,\quad \bar z_2=\frac{z}{a_c}\ ,\quad \bar a=\frac{a_L}{a_c}\ ,$$

имеем

$$\psi_1=2q_{r0}a_r\int_0^1\int_0^\pi\frac{\bar r_1\sqrt{1-\bar r_1^2}\,dr_1d\varphi}{\sqrt{\bar r_1^2-2\bar r_1\bar\rho\eta\cos\varphi+\bar\rho^2+\bar z_1}}\ ;\ (12)$$

$$\psi_2=2q_ca_c\int_1^{\bar a}\int_0^\pi\frac{\bar r_2dr_1d\varphi}{\sqrt{\bar r_2^2-2\bar r_2\bar\rho\eta_i^{0,5}\cos\varphi+\bar\rho^2+\bar z_1}}\ ;\ (13)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{\partial\psi_1}{a_r\partial\bar z_1}+\frac{\partial\psi_2}{a_c\partial\bar z_2}\ .\qquad(14)$$

При $Z=0$ из выражений (12), (13) и (14) получим

$$\psi_1\Big|_{z=0}=\frac{\pi^2q_{r0}a_r}{4}(2-\bar\rho)\ ,$$

$$\psi_2\Bigg|_{z=0}=4q_ca_c\left[\bar a\mathbf{E}\left(\frac{\bar\rho\eta_i^{0,5}}{\bar a}\right)-\mathbf{E}\left(\bar\rho,\eta_i^{0,5}\right)\right],$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}\Big|_{z=0}=-2\pi q_{ri}(\bar\rho)\ ,$$

где $\mathbf{E}(x)$ – полный эллиптический интервал второго рода.

Учитывая, что

$$\mathbf{E}(x)=\frac{\pi}{2}\ {}_2F_1\left(-\frac12,\frac12;1;x^2\right),$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса, для перемещений $\bar u_z$ на поверхности площадки контакта получим

$$\bar u_z=\frac{\pi}{4}q_{r0}\theta a_r\left(2-\bar\rho^2\right)+$$
$$+2q_c\theta a_c\left[\bar a\,{}_2F_1\left(-\frac12,\frac12;1;\frac{\bar\rho\eta}{\bar a^2}\right)-{}_2F_1\left(-\frac12,\frac12;1;\bar\rho^2\eta_i\right)\right];$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial\bar u_z}{\partial z}=\frac{1-2\mu}{1-\mu}\theta q_{r0}\left(1-\bar\rho^2\right)^{\frac12};$$

$$\bar\sigma_z=-q_{r0}\left(1-\bar\rho^2\right)^{\frac12}=-q_{ri}(\bar\rho)\ .\qquad(15)$$

Для радиального перемещения на площадке контакта имеем

$$du_{r1}=-\frac{1-2\mu}{2\pi G}\cdot\frac{q_r(r_1)d\omega_1}{R_1}\ ;$$

$$du_{r2}=-\frac{1-2\mu}{2\pi G}\cdot\frac{q_rd\omega_2}{R_2}\ .$$

С учетом данных [1] и выражений (10), (11) для поверхности площадки контакта получим

$$\bar u_{r1}=-\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\cdot\frac{q_{r0}a_r}{\bar\rho}\left[1-\left(1-\bar\rho^2\right)^{\frac32}\right]\ ,\ \bar u_{r2}=0\ ;$$

$$\sigma_r=q_{r0}\left(\frac{(1-2\mu)}{3\bar\rho^2}\left[1-\left(1-\bar\rho^2\right)^{\frac32}\right]-\left(1-\bar\rho^2\right)^{\frac12}\right),\ (16)$$

$$\bar\sigma_\varphi=-q_{r0}\left(\frac{(1-2\mu)}{3\bar\rho^2}\left[1-\left(1-\bar\rho^2\right)^{\frac32}\right]-2\mu\left(1-\bar\rho^2\right)^{\frac12}\right).\ (17)$$

С учетом того, что выражение (5) можно представить в виде

$$q_{r0}=q_{\text{н.о}}+\frac{q_c}{\pi}\arccos(1-2\eta_i)=$$
$$=q_{\text{н.о}}\left(1+\frac{F_q}{4\eta_i^{0,5}}\arccos(1-2\eta_i)\right),$$

где $q_{\text{н.о}}=\dfrac{4\eta_i^{0,5}}{\pi}\cdot\dfrac{\omega R_{\max}}{\theta a_c}$,

для выражений (15), (16), (17) имеем

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\bar\sigma_r}{q_{\text{н.о}}}&=\left(1+\frac{F_q}{4\eta_i^{0,5}}\arccos(1-2\eta_i)\right)\cdot\left(\frac{1-2\mu}{3\bar\rho^2}\left(1-\left(1-\bar\rho^2\right)^{\frac32}\right)-\left(1-\rho^2\right)^{\frac12}\right),\\
\frac{\bar\sigma_\varphi}{q_{\text{н.о}}}&=-\left(1+\frac{F_q}{4\eta_i^{0,5}}\arccos(1-2\eta_i)\right)\cdot\left(\frac{1-2\mu}{3\bar\rho^2}\left(1-\left(1-\bar\rho^2\right)^{\frac32}\right)+\left(1-\rho^2\right)^{\frac12}\right),\\
\frac{\bar\sigma_z}{q_{\text{н.о}}}&=-\left(\left(1-\bar\rho^2\right)^{\frac12}+\frac{F_q}{4\eta_i^{0,5}}\arccos\left(\frac{1-\eta_i\left(2-\bar\rho^2\right)}{1-\eta_i\bar\rho^2}\right)\right).
\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Используя выражения (15)…(17) для напряжений $\bar\sigma_z,\bar\sigma_r,\bar\sigma_\varphi$, которые на площадке контакта являются главными, можно рассчитать эквивалентные напряжения и определить начало пластической деформации.

Напряжения на оси $z$ можно вычислить, рассмотрев элементарные кольца радиуса $r_1$ и $r_2$, на которые действуют сосредоточенные силы. Нагрузки на кольца равны $2\pi r_1q_c(r_1)dr_1$ и $2\pi r_2q_c(r_2)dr_2$. Подставляя эти значения в выражения для напряжений оси сосредоточенных сил и интегрируя по площадям $W_1$ и $W_2$, находим

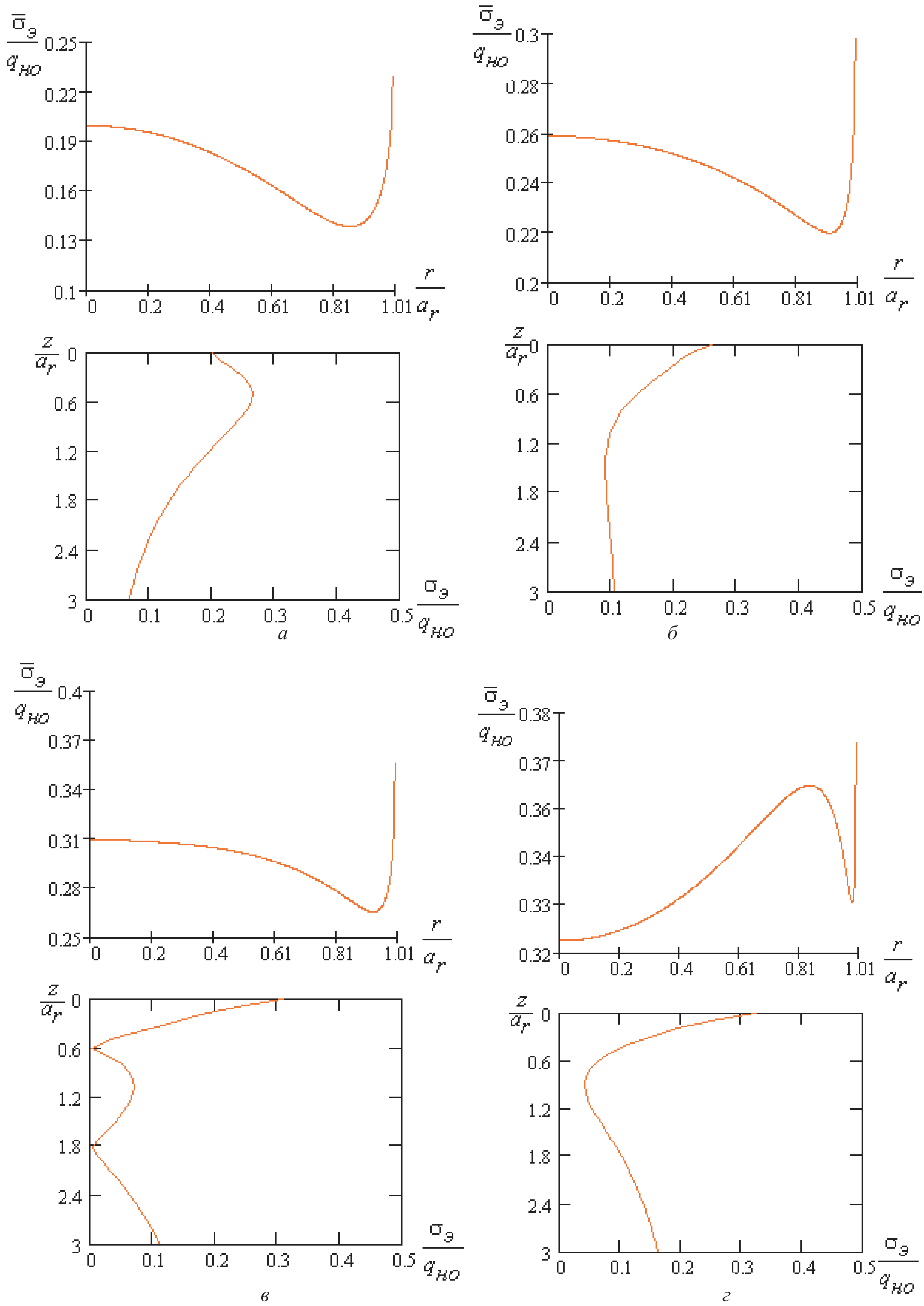


Рис. 2. Эквивалентные напряжения на площадке контакта и на оси $z$:
*а* – $\varepsilon = 0{,}05,\ u = 0$; *б* – $\varepsilon = 1,\ u = 0$; *в* – $\varepsilon = 1{,}5,\ u = 0{,}5$; *г* – $\varepsilon = 1{,}5,\ u = 0$

$$\frac{\sigma_{r1}}{q_{но}}=\frac{\sigma_{\varphi1}}{q_{но}}=\left(1+\frac{F_q}{4\eta_i^{0,5}}\arccos\left(1-2\eta_i\right)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2}\left(1+\bar z^2\right)^{-1}-\left(1+\mu\right)\left(1-\bar z\,\mathrm{arcctg}\,\bar z\right)\right);$$

$$\frac{\sigma_{z1}}{q_{но}}=-\left(1+\frac{F_q}{4\eta_i^{0,5}}\arccos\left(1-2\eta_i\right)\right)\left(1+\bar z^2\right)^{-1};$$

$$\frac{\sigma_{r2}}{q_{но}}=\frac{\sigma_{\varphi2}}{q_{но}}=\frac{\pi F_q\bar z}{8}\left(2\left(1+\mu\right)\left(\left(\bar a^2+\eta_i\bar z^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1-\eta_i\bar z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right)-$$
$$-\eta_i\bar z^2\left(\left(\bar a^2+\eta_i\bar z^2\right)^{-\frac{3}{2}}-\left(1+\eta_i\bar z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right);$$

$$\sigma_{z2}=\frac{\pi F_q\eta_i\bar z^3}{4}\left(2\left(1+\mu\right)\left(\left(\bar a^2+\eta_i\bar z^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+\eta_i\bar z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\right).$$

Используя полученные выражения для компонент напряжений на оси $z$, можно определить эквивалентные напряжения и начало пластических деформаций. При этом следует учесть, что

$$\sigma_r=\sigma_{r1}+\sigma_{r2},\ \sigma_\varphi=\sigma_{\varphi1}+\sigma_{\varphi2},\ \sigma_z=\sigma_{z1}+\sigma_{z2}.$$

На рис. 2 представлены графические зависимости эквивалентного напряжения $\bar\sigma_э(\bar\rho)$ и $\sigma_э(\bar z)$ на площадке контакта и на оси *z*, рассчитанные по энергетической теории сдвиговой деформации Мизеса для неровностей, расположенных на уровнях $u=0$ (*а*, *б*, *г*) и $u=0,5$ (*в*), при различных нагрузках (значениях $\varepsilon$):

$$\sigma_э=\sqrt{\left(\sigma_r-\sigma_\varphi\right)^2+\left(\sigma_\varphi-\sigma_z\right)^2-\left(\sigma_z-\sigma_r\right)^2}\,/\sqrt{2}.$$

При малых нагрузках, когда не сказывается взаимное влияние неровностей, зарождение пластической деформации происходит в приповерхностном слое в точке $z=0,481a_r$. С ростом взаимного влияния неровностей при $\varepsilon>0,7$ максимум эквивалентного напряжения на оси $z$ в приповерхностном слое исчезает и пластические деформации зарождаются на краю площадки контакта при $\bar\rho=1$. Эквивалентные напряжения на краю и в центре площадки контакта можно определить из выражений (18):

$$\bar\sigma_э(1)=\frac{1-2\mu}{\sqrt3}q_{r0},\ \bar\sigma_э(0)=\frac{1-2\mu}{2}q_{r0}. \qquad (19)$$

Для всего диапазона нагрузок (значений $\varepsilon$) отношение $\dfrac{\bar\sigma_э(1)}{\sigma_э(0)}=\dfrac{2}{\sqrt3}$,

т.е. является постоянным.

Из выражения (5) с учетом (19) определим предельное значение $\eta_{pi}$, при котором появляются пластические деформации на краю площадки контакта:

$$\eta_{pi}=\left(\frac{\pi\sqrt3}{4\left(1-2\mu\right)}F_Y-\frac{F_q}{4}\arccos\left(1-2\eta_{pi}\right)\right)^2,$$

где $F_Y=\dfrac{\theta\sigma_Y a_c}{\omega R_{\max}}$.

Соответствующее этому контурное давление

$$q_{cpi}=q_{ci}\big|_{\eta_i=\eta_{pi}},$$

где $q_{ci}$ определяется выражением (5).

В общем случае максимальное контактное давление, при котором начинается пластическая деформация, представляется выражением

$$q_{oP}=K_Y\sigma_Y,$$

где $K_Y$ – константа; $\sigma_Y$ – предел текучести.

Если без учета взаимного влияния неровностей для μ = 0,3 $K_Y=5$, то при взаимном влиянии неровностей для $\varepsilon=1$ и $u=0$ $K_Y=3,34$; для $\varepsilon=1,5$ и $u=0$ $K_Y=2,68$.

Таким образом, начало пластической деформации отдельной неровности зависит от общего напряженно-деформированного состояния полупространства.

### *Литература*


1. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
2. Огар, П.М Критерий пластичности при контактировании шероховатых поверхностей / П.М. Огар, А.А. Дайнеко, С.С. Клюс // Механики XXI веку. VI Всероссийская научно-техническая конференция с международным участием: сборник докладов. – Братск: Изд-во ГОУ ВПО «БрГУ», 2007. – С. 313–317.
3. Огар, П.М. Влияние характеристик стыка шероховатых уплотнительных поверхностей на герметичность / П.М. Огар, И.И. Корсак. – Братск: БрИИ, 1989. – 110 с. Деп. в ВИНИТИ, №6109 – В90.
4. Долотов, А.М. Основы теории и проектирование уплотнений гидропневмоарматуры летательных аппаратов / А.М. Долотов, П.М. Огар, Д.Е. Чегодаев. – М.: Изд-во МАИ, 2000. – 296 с.
5. Огар, П.М. Герметичность металлополимерных стыков шероховатых поверхностей / П.М. Огар, Р.Н. Шеремета, Д. Лханаг. – Братск: Изд-во БрГУ, 2006. – 159 с.
6. Огар, П.М. Моделирование упругого контакта тяжелонагруженых шероховатых поверхностей / П.М. Огар, О.Ю. Сухов, С.П. Ереско // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвуз. темат. сб. тр. – СПб.: СПбГАСУ. – 2002. – № 8. – С. 305–310.