

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 629.4.015:62-752:681.5

DOI: 10.18324/2077-5415-2026-2-7-14

Определение эквивалентных коэффициентов жёсткости и демпфирования для технического объекта с несколькими степенями свободы

С.К. Каргапольцев^{1а}, Р.С. Большаков^{2б}, А.К. Мозалевская^{2с}

¹ Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия

² Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского, 15, Иркутск, Россия

^а kck6262@mail.ru, ^б bolshakov_rs@mail.ru, ^с mozalevskaya@mail.ru

^а <https://orcid.org/0000-0002-4601-3099>, ^б <https://orcid.org/0000-0002-1187-5932>,

^с <https://orcid.org/0000-0002-0590-176X>

Статья поступила 03.04.2026, принята 28.04.2026

Цель – определение эквивалентных коэффициентов жёсткости и демпфирования для технического объекта с расчётной схемой, обобщённой для оценки взаимодействия подвижного состава и верхнего строения железнодорожного пути, в виде механической колебательной системы несколькими степенями свободы при действии внешних силовых и кинематических вибрационных возмущений. Результаты исследований базируются на методологии, характерной для теоретической механики, теории автоматического управления, теории цепей и теории колебаний механических колебательных системы, а также на традиционных теоретических позициях, представленных в фундаментальных научных разработках, посвящённых вибрациям в технике, динамике подвижного состава и верхнего строения пути. Совокупность используемых методов позволяет получить необходимые соотношения для определения коэффициентов жёсткости и демпфирования в различных точках обобщённой расчётной схемы взаимодействия подвижного состава и верхнего строения железнодорожного пути. Проведён анализ имеющихся методологических позиций в области динамики подвижного состава и верхнего строения пути. На основе полученных ранее результатов исследований сформирована обобщённая расчётная схема в виде механической колебательной системы. С учётом особенностей полученной расчётной схемы построена система дифференциальных уравнений движения рассматриваемого технического объекта. На основе полученной системы уравнений после использования преобразований Лапласа при нулевых начальных условиях сформирована система уравнений в операторной форме. Полученная система уравнений даёт возможность получить полную информацию о динамике взаимодействия подвижного состава и верхнего строения железнодорожного пути. Представленные результаты исследований могут быть применены для определения приведённых жёсткостей сложных технических объектов для определения динамических взаимодействий в узлах крепления соединительных элементов. Дальнейшие исследования будут связаны с оценкой изменения усилий в различных точках системы с зависимости от частоты внешнего возмущения.

Ключевые слова: вибрация; подвижной состав; железнодорожный транспорт; механические колебательные системы.

Identification of equivalent stiffness and damping coefficients for a technical object with multiple degrees of freedom

S.K. Kargapoltsev^{1а}, R.S. Bolshakov^{2б}, A.K. Mozalevskaya^{2с}

¹ Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia

² Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevsky St., Irkutsk, Russia

^а kck6262@mail.ru, ^б bolshakov_rs@mail.ru, ^с mozalevskaya@mail.ru

^а <https://orcid.org/0000-0002-4601-3099>, ^б <https://orcid.org/0000-0002-1187-5932>,

^с <https://orcid.org/0000-0002-0590-176X>

Received 03.04.2026, accepted 28.04.2026

The aim is to determine equivalent stiffness and damping coefficients for a technical object with a design scheme generalized to evaluate the interaction of rolling stock and the upper structure of a railway track, in the form of a mechanical oscillatory system with several degrees of freedom under the action of external force and kinematic vibration disturbances. The research results are based on the methodology typical of theoretical mechanics, the theory of automatic control, the theory of circuits and the theory of vibrations of mechanical oscillatory systems, as well as on traditional theoretical positions presented in fundamental scientific developments on vibrations in technology, dynamics of rolling stock and the upper structure of the track. The combination of the methods used makes it possible to obtain the necessary ratios for determining the coefficients of stiffness and damping at various points in the generalized design scheme of interaction between rolling stock and the upper structure of the railway track. The analysis of the available methodological positions in the field of dynamics of rolling stock and the upper structure of the track is carried out. Based on the previously obtained research

results, a generalized calculation scheme in the form of a mechanical oscillatory system has been formed. Taking into account the features of the calculation scheme obtained, a system of differential equations of motion of the technical object under consideration is constructed. Based on the system of equations obtained after using Laplace transformations under zero initial conditions, a system of equations in operator form is formed. The resulting system of equations makes it possible to obtain complete information about the dynamics of interaction between rolling stock and the upper structure of the railway track. The presented research results can be applied to determine the reduced stiffnesses of complex technical objects in order to identify dynamic interactions in the attachment points of connecting elements. Further research will be related to assessing changes in forces at various points of the system depending on the frequency of external excitation.

Keywords: vibration; rolling stock; railway transport; mechanical oscillating systems.

Введение. Нагрузка на элементы подвижного состава в условиях повышения веса и длины поездов в связи с увеличением объёмов погрузки или переориентацией грузопотоков кратно возрастает, что напрямую влияет на обеспечение безопасности перевозочных процессов и надёжности используемых технических средств, применяемых для реализации перевозочного процесса на железнодорожном транспорте.

Параметры динамического состояния в этом случае требуют развития более детализированных подходов, в том числе в связи с ростом максимальных скоростей движения поездов, увеличением средней нагрузки на ось подвижного состава при отсутствии достаточного финансирования процессов модернизации конструктивных элементов подвешивания [1–5]. Это обеспечивает выполнение основных задач железнодорожного транспорта [6], направленных в том числе и на поддержание технического состояния основных устройств в надлежащем состоянии. Также необходимо отметить влияние увеличения скоростей движения на сохранность верхнего строения пути при взаимодействии с подвижным составом [7–9].

Развитие научных исследований в этом направлении связано с построением математических моделей грузовых вагонов с учётом внешних воздействий, а также синтеза существующих расчётных схем подвижного состава, верхнего строения пути и формировании выражений для нахождения коэффициентов приведённой

жёсткости и демпфирования технического объекта [10–16].

Цель исследования заключается в определении коэффициентов приведённой жёсткости и демпфирования в расчётной схеме технического объекта в виде механической колебательной системы с несколькими степенями свободы.

Материалы и методы исследования. Железнодорожный состав поезда как техническая система в целом, так и составляющие её элементы подвержены динамическим процессам различного характера, так как реализация перевозочных процессов сопровождается колебаниями частей подвижного состава в различных плоскостях. Также необходимо отметить взаимные перемещения вагонов друг относительно друга, что инициирует соударения в узлах с неудерживающими связями, таких как автосцепки и шкворневые узлы, что создаёт повышенные динамические нагрузки, в том числе инерционного характера, которые негативно влияют на прочность и долговечность узлов и агрегатов подвижного состава железных дорог.

Железнодорожный подвижной состав обладает комплексной системой подвески и в составе поезда представляет собой сложную многоосную техническую систему, поэтому учёт и контроль динамических процессов в нынешних условиях особенно важны.

Грузовой вагон состоит из кузова, опирающегося на рамы тележек, и ходовых частей [19] (рис. 1).

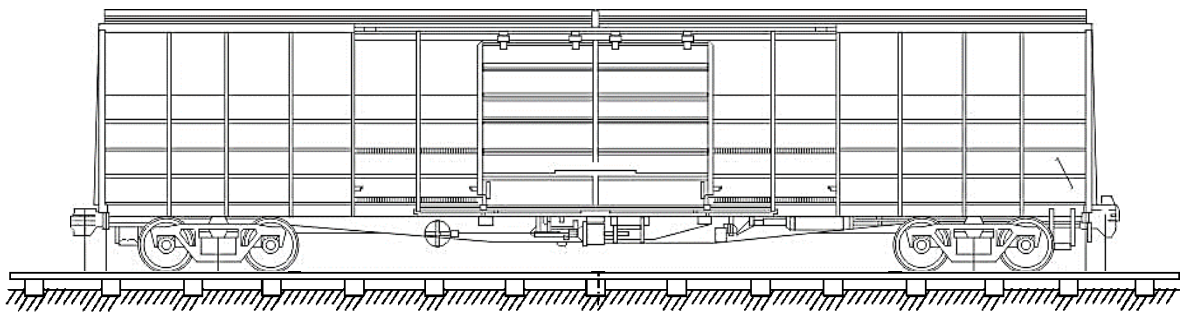


Рис. 1. Принципиальная схема грузового вагона при взаимодействии с верхним строением пути

Составные части вагона представляют собой упруго-массовую структуру, состоящую из связей различной физической природы: рычажные связи, гасители, колебаний, пружины и т. п.). Эти связи можно условно разделить на соединения между кузовом и рамами и между рамами и колёсными парами.

Для эффективного снижения уровня колебаний в структуре системы необходимо наличие демпфирующих элементов для рассеивания энергии колебаний. Таким образом, грузовой вагон как технический объект представляет собой сложную техническую систему, со

держашую упругие, демпфирующие, инерционные и рычажные связи [19].

В данном случае в расчётной схеме грузового вагона имеются массы кузова M и тележек m_1 и m_2 с моментами инерции J_1, J_2 соответственно, упругие элементы с жёсткостями $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{21}, k_{22}, k_{23}$, а также демпфирующие элементы с коэффициентами $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{21}, b_{22}, b_{23}$, расположенные параллельно упругим элементам. Твёрдое тело реализует малые колебания по координатам y и φ , тележки по координатам y_1, φ_1 и y_2, φ_2 (рис. 2, а, б).

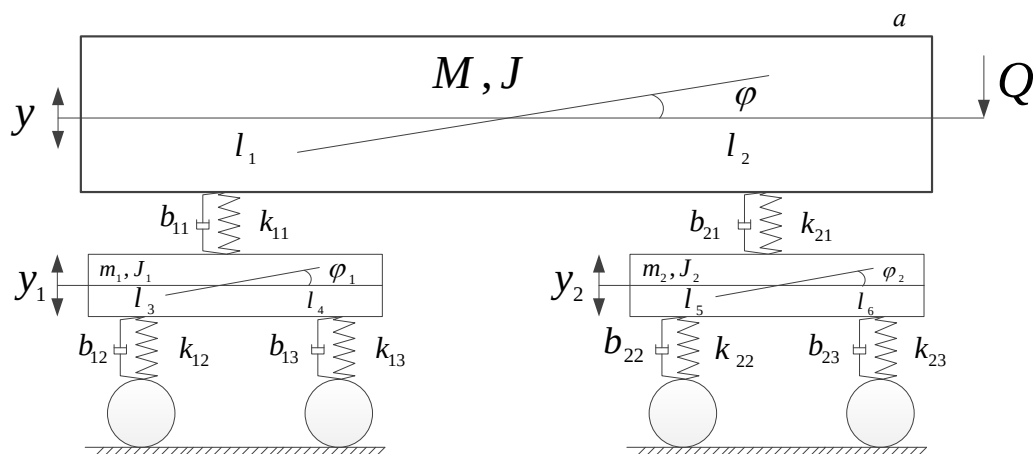


Рис. 2. Расчётная схема грузового вагона

Колебательные процессы, характерные для верхнего строения пути, исследуются при использовании аналогичных расчётных схем. Традиционно при моделировании динамических свойств верхнего строения пути используется расчётная схема балки на упругом основании,

позволяющая построить адекватную математическую модель, отражающую динамические процессы в исследуемой технической системе [20]. Расчётная схема, представленная на рис. 3, содержит упругие ($k_{14}, k_{15}, k_{16}, k_{17}, k_{24}, k_{25}, k_{26}, k_{27}$) и демпфирующие ($b_{14}, b_{15}, b_{16}, b_{17}, b_{24}, b_{25}, b_{26}, b_{27}$) элементы.

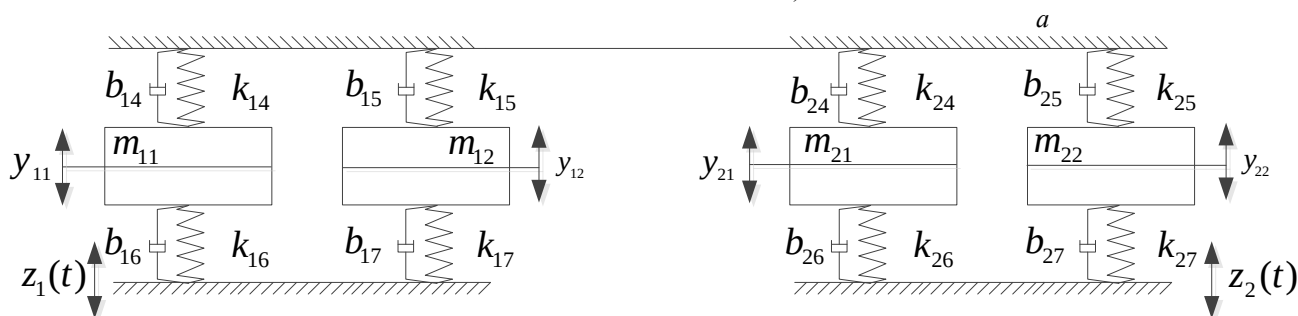


Рис. 3. Расчётная схема верхнего строения пути

На основании традиционных представлений, приведённых на рис. 2 и 3, может быть синтезирована обобщённая расчётная схема взаимовлияния верхнего строения железнодорожного пути и подвижного состава, как это показано на рис. 4.

пённая расчётная схема взаимовлияния верхнего строения железнодорожного пути и подвижного состава, как это показано на рис. 4.

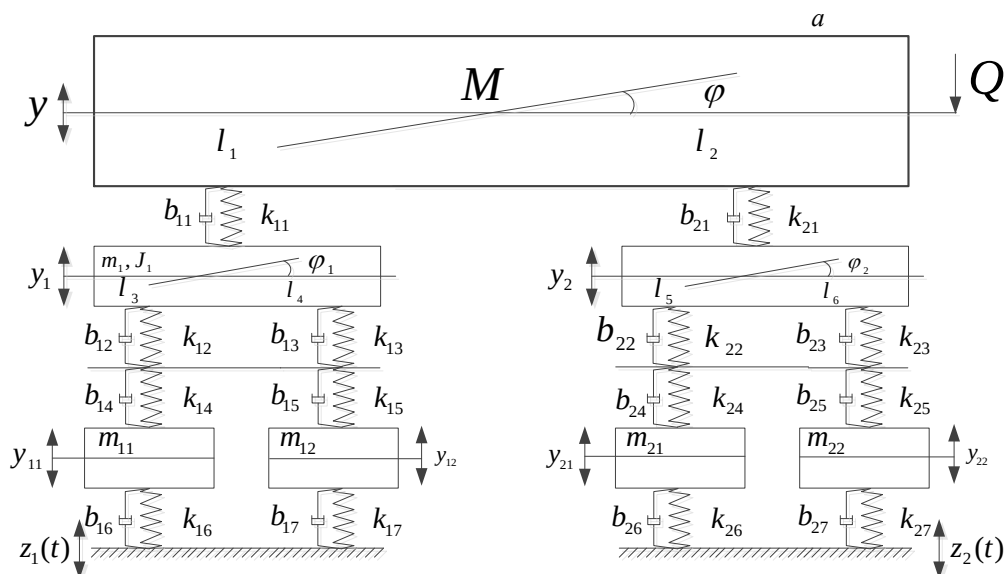


Рис. 4. Обобщённая расчётная схема исследуемого технического объекта

В системе имеются сила Q и кинематические возмущения $z_1(t)$ и $z_2(t)$. В настоящее время влияние вибрационных процессов, генерируемых железнодорожным транспортом, строго регламентируется, что делает необходимым определение уровня колебаний с использованием предварительных инженерных расчётов. Данные расчёты могут быть реализованы на основе обобщённой расчётной схемы, представленной на рис. 4, с необходимостью для практики точностью при условии, что единица подвижного состава представляет собой упруго-массовую систему [17]. В этом случае приближённые расчёты малых колебаний могут быть выполнены и без учёта влияния демпфирующих элементов в предположении того, что каждый инерционный элемент совершает только движения поступательного характера относительно положения статического равновесия. Для исследования динамических свойств рассматриваемого технического объекта необходимо построение его математической модели. Построим уравнения кинетической и потенциальной энергий, а также для энергии рассеяния для продольного расположения:

$$T = \frac{1}{2} M y'^2 + \frac{1}{2} J \varphi'^2 + \frac{1}{2} m_1 y_1'^2 + \frac{1}{2} J_1 \varphi_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 y_2'^2 + \frac{1}{2} J_2 \varphi_2'^2 + \frac{1}{2} m_{11} y_{11}'^2 + \frac{1}{2} m_{12} y_{12}'^2 + \frac{1}{2} m_{21} y_{21}'^2 + \frac{1}{2} m_{22} y_{22}'^2, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} k_{11} (y - \varphi l_1)^2 + \frac{1}{2} k_{21} (y + \varphi l_2)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(k_{12} + k_{13})(k_{14} + k_{15})}{(k_{12} + k_{13}) + (k_{14} + k_{15})} \right] (y_1 - \varphi l_3)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(k_{12} + k_{13})(k_{14} + k_{15})}{(k_{12} + k_{13}) + (k_{14} + k_{15})} \right] (y_1 + \varphi l_4)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(k_{22} + k_{23})(k_{24} + k_{25})}{(k_{22} + k_{23}) + (k_{24} + k_{25})} \right] (y_2 - \varphi l_5)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(k_{22} + k_{23})(k_{24} + k_{25})}{(k_{22} + k_{23}) + (k_{24} + k_{25})} \right] (y_2 + \varphi l_6)^2 + \\ & + \frac{1}{2} k_{16} y_{11}^2 + \frac{1}{2} k_{17} y_{12}^2 + \frac{1}{2} k_{26} y_{21}^2 + \frac{1}{2} k_{27} y_{22}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} b_{11} (y' - \varphi' l_1)^2 + \frac{1}{2} b_{21} (y'_0 + \varphi' l_2)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(b_{12} + b_{13})(b_{14} + b_{15})}{(b_{12} + b_{13}) + (b_{14} + b_{15})} \right] (y'_1 - \varphi' l_3)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(b_{12} + b_{13})(b_{14} + b_{15})}{(b_{12} + b_{13}) + (b_{14} + b_{15})} \right] (y'_1 + \varphi' l_4)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(b_{22} + b_{23})(b_{24} + b_{25})}{(b_{22} + b_{23}) + (b_{24} + b_{25})} \right] (y'_2 - \varphi' l_5)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(b_{22} + b_{23})(b_{24} + b_{25})}{(b_{22} + b_{23}) + (b_{24} + b_{25})} \right] (y'_2 + \varphi' l_6)^2 + \\ & + \frac{1}{2} b_{16} y_{11}'^2 + \frac{1}{2} b_{17} y_{12}'^2 + \frac{1}{2} b_{26} y_{21}'^2 + \frac{1}{2} b_{27} y_{22}'^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Для дальнейших выкладок преобразуем выражения (2) и (3):

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} k_{11} [y^2 - 2y_0 \varphi l_1 + (\varphi l_1)^2] + \\ & + \frac{1}{2} k_{21} [y^2 + 2y_0 \varphi l_2 + (\varphi l_2)^2] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(k_{12} + k_{13})(k_{14} + k_{15})}{(k_{12} + k_{13}) + (k_{14} + k_{15})} \right] \times \\ & \times [y_1^2 - 2y_1 \varphi l_3 + (\varphi l_3)^2] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(k_{12} + k_{13})(k_{14} + k_{15})}{(k_{12} + k_{13}) + (k_{14} + k_{15})} \right] \times \\ & \times [y_1^2 + 2y_1 \varphi l_4 + (\varphi l_4)^2] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(k_{22} + k_{23})(k_{24} + k_{25})}{(k_{22} + k_{23}) + (k_{24} + k_{25})} \right] \times \\ & \times [y_2^2 - 2y_2 \varphi l_5 + (\varphi l_5)^2] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(k_{22} + k_{23})(k_{24} + k_{25})}{(k_{22} + k_{23}) + (k_{24} + k_{25})} \right] \times \\ & \times [y_2^2 + 2y_2 \varphi l_6 + (\varphi l_6)^2] + \\ & + \frac{1}{2} k_{16} y_{11}^2 + \frac{1}{2} k_{17} y_{12}^2 + \frac{1}{2} k_{26} y_{21}^2 + \frac{1}{2} k_{27} y_{22}^2, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} b_{11} [y_0'^2 - 2y_0' \varphi' l_1 + (\varphi' l_1)^2] + \\ & + \frac{1}{2} b_{21} [y_0'^2 + 2y_0' \varphi' l_1 + (\varphi' l_1)^2] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(b_{12} + b_{13})(b_{14} + b_{15})}{(b_{12} + b_{13}) + (b_{14} + b_{15})} \right] \times \\ & \times [y_1'^2 - 2y_1' \varphi' l_3 + (\varphi' l_3)^2] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(b_{12} + b_{13})(b_{14} + b_{15})}{(b_{12} + b_{13}) + (b_{14} + b_{15})} \right] \times \\ & \times [y_1'^2 + 2y_1' \varphi' l_4 + (\varphi' l_4)^2] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(b_{22} + b_{23})(b_{24} + b_{25})}{(b_{22} + b_{23}) + (b_{24} + b_{25})} \right] \times \\ & \times [y_2'^2 - 2y_2' \varphi' l_5 + (\varphi' l_5)^2] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(b_{22} + b_{23})(b_{24} + b_{25})}{(b_{22} + b_{23}) + (b_{24} + b_{25})} \right] \times \\ & \times [y_2'^2 + 2y_2' \varphi' l_6 + (\varphi' l_6)^2] + \\ & + \frac{1}{2} b_{16} y_{11}'^2 + \frac{1}{2} b_{17} y_{12}'^2 + \frac{1}{2} b_{26} y_{21}'^2 + \frac{1}{2} b_{27} y_{22}'^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Система дифференциальных уравнений примет вид:

$$My'' + (b_{11} + b_{12})y' + (l_2 - l_1)\varphi' + (k_{11} + k_{12})y_0 + (l_2 - l_1)\varphi = Q_1, \quad (6)$$

$$m_1 y_1'' + \left[\frac{(b_{12} + b_{13})(b_{14} + b_{15})}{(b_{12} + b_{13}) + (b_{14} + b_{15})} \right] \times \\ \times [2y_1' - \varphi_1'(l_4 - l_3)] + \\ + \left[\frac{(k_{12} + k_{13})(k_{14} + k_{15})}{(k_{12} + k_{13}) + (k_{14} + k_{15})} \right] \times \\ \times [2y_1 - \varphi_1(l_4 - l_3)] = 0, \quad (7)$$

$$m_2 y_2'' + \left[\frac{(b_{22} + b_{23})(b_{24} + b_{25})}{(b_{22} + b_{23}) + (b_{24} + b_{25})} \right] \times \\ \times [2y_2' - \varphi_2'(l_6 - l_5)] + \\ + \left[\frac{(k_{12} + k_{13})(k_{14} + k_{15})}{(k_{12} + k_{13}) + (k_{14} + k_{15})} \right] \times \\ \times [2y_2 - \varphi_2(l_6 - l_5)] = 0, \quad (8)$$

$$m_{11} y_{11}'' + b_{16} y_{11}' + k_{16} y_{11} = b_{16} z_1'(t) + k_{16} z_1(t), \quad (9)$$

$$m_{12} y_{12}'' + b_{17} y_{12}' + k_{17} y_{12} = b_{17} z_1'(t) + k_{17} z_1(t), \quad (10)$$

$$m_{21} y_{21}'' + b_{26} y_{21}' + k_{26} y_{21} = b_{26} z_2'(t) + k_{26} z_2(t), \quad (11)$$

$$m_{22} y_{22}'' + b_{27} y_{22}' + k_{27} y_{22} = b_{27} z_2'(t) + k_{27} z_2(t), \quad (12)$$

$$J\varphi'' + (b_{11}l_1 + b_{12}l_2)\varphi' + (b_{12}l_2 - b_{11}l_1)y' + \\ + (k_{11}l_1 + k_{12}l_2)\varphi + (l_2 - l_1)y = 0, \quad (13)$$

$$J_1 \varphi_1'' + \left[\frac{(b_{12} + b_{13})(b_{14} + b_{15})}{(b_{12} + b_{13}) + (b_{14} + b_{15})} \right] \times \\ \times [\varphi_1'(l_3 + l_4) + y_1'(l_4 - l_3)] + \\ + \left[\frac{(k_{12} + k_{13})(k_{14} + k_{15})}{(k_{12} + k_{13}) + (k_{14} + k_{15})} \right] \times \\ \times [\varphi_1(l_3 + l_4) + y_1(l_4 - l_3)] = 0, \quad (14)$$

$$J_2 \varphi_2'' + \left[\frac{(b_{22} + b_{23})(b_{24} + b_{25})}{(b_{22} + b_{23}) + (b_{24} + b_{25})} \right] \times \\ \times [\varphi_2'(l_5 + k_6) + y_2'(l_5 - l_6)] + \\ + \left[\frac{(k_{12} + k_{13})(k_{14} + k_{15})}{(k_{12} + k_{13}) + (k_{14} + k_{15})} \right] \times \\ \times [\varphi_2(l_5 + k_6) + y_2(l_5 - l_6)] = 0. \quad (15)$$

Система уравнений движения в операторной форме будет выглядеть следующим образом:

$$M\bar{y}p^2 + (b_{11} + b_{12})\bar{y}p + (l_2 - l_1)\bar{\varphi}p + \\ + (k_{11} + k_{12})\bar{y}_0 + (l_2 - l_1)\bar{\varphi} = \bar{Q}, \quad (16)$$

$$m_1 \bar{y}_1 p^2 + \left[\frac{(b_{12} + b_{13})(b_{14} + b_{15})}{(b_{12} + b_{13}) + (b_{14} + b_{15})} \right] \times \\ \times [2\bar{y}_1 p - \bar{\varphi}_1 p(l_4 - l_3)] + \\ + \left[\frac{(k_{12} + k_{13})(k_{14} + k_{15})}{(k_{12} + k_{13}) + (k_{14} + k_{15})} \right] \times \\ \times [2\bar{y}_1 - \bar{\varphi}_1(l_4 - l_3)] = 0, \quad (17)$$

$$m_2 \bar{y}_2 p^2 + \left[\frac{(b_{22} + b_{23})(b_{24} + b_{25})}{(b_{22} + b_{23}) + (b_{24} + b_{25})} \right] \times \\ \times [2\bar{y}_2 p - \bar{\varphi}_2 p(l_6 - l_5)] + \\ + \left[\frac{(k_{22} + k_{23})(k_{24} + k_{25})}{(k_{22} + k_{23}) + (k_{24} + k_{25})} \right] \times \\ \times [2\bar{y}_2 - \bar{\varphi}_2(l_6 - l_5)] = 0, \quad (18)$$

$$m_{11} \bar{y}_{11} p^2 + b_{16} \bar{y}_{11} p + k_{16} \bar{y}_{11} = b_{16} \bar{p} z_1(t) + k_{16} \bar{z}_1(t), \quad (19)$$

$$m_{12} \bar{y}_{12} p^2 + b_{17} \bar{y}_{12} p + k_{17} \bar{y}_{12} = b_{17} \bar{p} z_1(t) + k_{17} \bar{z}_1(t), \quad (20)$$

$$m_{21} \bar{y}_{21} p + b_{26} \bar{y}_{21} p + k_{26} \bar{y}_{21} = b_{26} \bar{p} z_2(t) + k_{26} \bar{z}_2(t), \quad (21)$$

$$m_{22} \bar{y}_{22} p^2 + b_{27} \bar{y}_{22} p + k_{27} \bar{y}_{22} = b_{27} \bar{p} z_2(t) + k_{27} \bar{z}_2(t), \quad (22)$$

$$J\bar{\varphi}p^2 + (b_{11}l_1 + b_{12}l_2)\bar{\varphi}p + (b_{12}l_2 - b_{11}l_1)\bar{y}p + \\ + (k_{11}l_1 + k_{12}l_2)\bar{\varphi} + (l_2 - l_1)\bar{y} = 0, \quad (23)$$

$$J_1 \bar{\varphi}_1 p^2 + \left[\frac{(b_{12} + b_{13})(b_{14} + b_{15})}{(b_{12} + b_{13}) + (b_{14} + b_{15})} \right] \times \\ \times [\bar{\varphi}_1 p(l_3 + k_4) + \bar{y}_1 p(l_4 - l_3)] + \\ + \left[\frac{(k_{12} + k_{13})(k_{14} + k_{15})}{(k_{12} + k_{13}) + (k_{14} + k_{15})} \right] \times \\ \times [\bar{\varphi}_1(l_3 + k_4) + \bar{y}_1(l_4 - l_3)] = 0, \quad (24)$$

$$J_2 \bar{\varphi}_2 p^2 + \left[\frac{(b_{22} + b_{23})(b_{24} + b_{25})}{(b_{22} + b_{23}) + (b_{24} + b_{25})} \right] \times \\ \times [\bar{\varphi}_2 p(l_5 + k_6) + \bar{y}_2 p(l_5 - l_6)] + \\ + \left[\frac{(k_{22} + k_{23})(k_{24} + k_{25})}{(k_{22} + k_{23}) + (k_{24} + k_{25})} \right] \times \\ \times [\bar{\varphi}_2(l_5 + k_6) + \bar{y}_2(l_5 - l_6)] = 0. \quad (25)$$

Совокупности элементов в рассматриваемых точках системы представляют собой сложные виброизоляторы, поэтому с учётом этих условий в каждом узле системы могут быть найдены эквивалентные коэффициенты жёсткости и демпфирования, условия применения которых справедливы для возмущений любого характера [18].

Результаты исследования. На основании традиционных представлений, приведённых на рис. 2 и 3, может быть дополнена синтезированная обобщённая расчётная схема (рис. 4) взаимодействия пути и подвижного состава для выделения контуров для проведения дальнейшей детализированной процедуры определения коэффициентов жёсткости и демпфирования, как это показано на рис. 5.

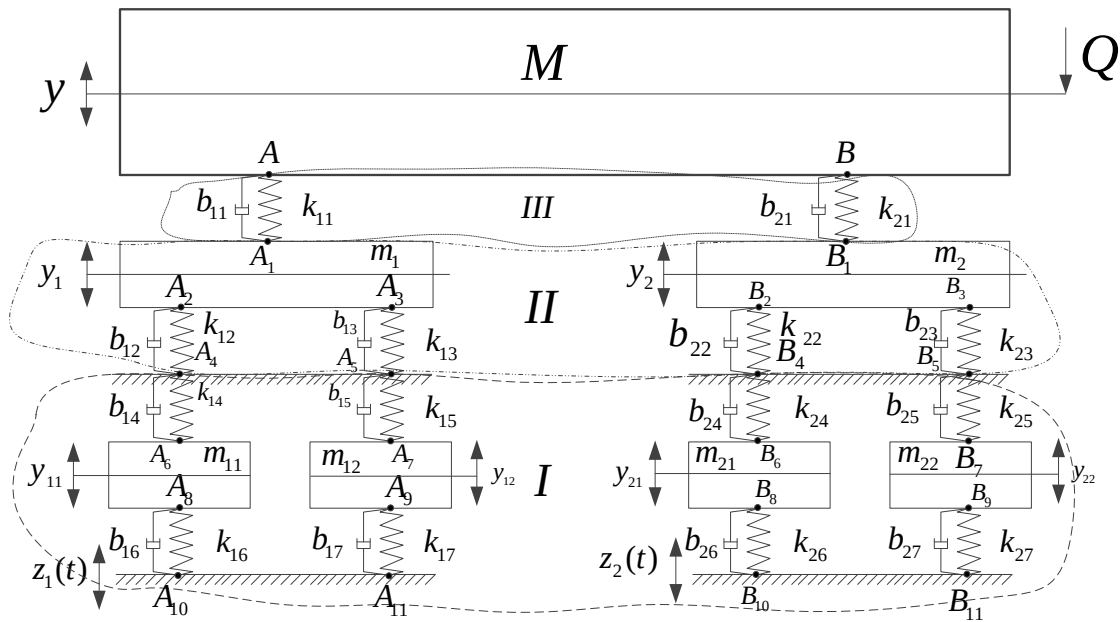


Рис. 5. Дополненная обобщённая расчётная схема технической системы для определения эквивалентных коэффициентов жёсткости и демпфирования

Рассмотрим технический объект в виде грузового вагона как механическую колебательную систему с кинематическим возбуждением возмущения $z_1(t)$ и $z_2(t)$ и силой Q , обусловленных колебаниями верхнего строения пути и кузова вагона соответственно. Контуром *I* обозначены элементы подрельсового основания. Контур *II* иллюстрирует совокупность элементов подвески технического объекта. Контуром *III* обозначено соединение

кузова транспортного средства с тележками. Углы поворота в данном случае неинформативны и принимаются равными 0, что обусловлено использованием понятия «сложный виброизолятор». С учётом информации о влиянии инерционных элементов на приведённые жёсткости получены эквивалентные коэффициенты жёсткости и демпфирования при $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ (табл.).

Таблица. Эквивалентные коэффициенты жёсткости и демпфирования частей технического объекта

Место соединения	Условия приведения к эквивалентному виброизолятору	Эквивалентные коэффициенты	
		жёсткости	демпфирования
1	2	3	4
$A_4 - A_{10}$ (аналогично для $A_5 - A_{11}$; $B_4 - B_{10}$; $B_5 - B_{11}$)	$\alpha_c = \frac{k_c}{k_*} = \frac{b_c}{b_*}$ ($c = 1, 2, 3, \dots, n$)	$\frac{(m_{11}p^2 + k_{16})k_{14}}{(m_{11}p^2 + k_{16} + k_{14})}$	$\frac{(m_{11}p^2 + b_{16}p)b_{14}p}{(m_{11}p^2 + b_{16}p + b_{14}p)}$
Левая ветвь контура <i>I</i> (аналогично правой ветви)	$\alpha_c = \frac{k_c}{k_*} = \frac{b_c}{b_*} Q$ ($c = 1, 2, 3, \dots, n$)	$\frac{(m_{11}p^2 + k_{16})k_{14}}{(m_{11}p^2 + k_{16} + k_{14})} + \frac{(m_{12}p^2 + k_{17})k_{15}}{(m_{12}p^2 + k_{17} + k_{15})}$	$\frac{(m_{11}p^2 + b_{16}p)b_{14}p}{(m_{11}p^2 + b_{16}p + b_{14}p)} + \frac{(m_{12}p^2 + b_{17}p)b_{15}p}{(m_{12}p^2 + b_{17}p + b_{15}p)}$
Контур <i>I</i>	$\alpha_c = \frac{k_c}{k_*} = \frac{b_c}{b_*} Q$ ($c = 1, 2, 3, \dots, n$)	$\frac{(m_{11}p^2 + k_{16})k_{14}}{(m_{11}p^2 + k_{16} + k_{14})} + \frac{(m_{12}p^2 + k_{17})k_{15}}{(m_{12}p^2 + k_{17} + k_{15})} + \frac{(m_{21}p^2 + k_{26})k_{24}}{(m_{21}p^2 + k_{26} + k_{24})} + \frac{(m_{22}p^2 + k_{27})k_{25}}{(m_{22}p^2 + k_{27} + k_{25})}$	$\frac{(m_{11}p^2 + b_{16}p)b_{14}p}{(m_{11}p^2 + b_{16}p + b_{14}p)} + \frac{(m_{12}p^2 + b_{17}p)b_{15}p}{(m_{12}p^2 + b_{17}p + b_{15}p)} + \frac{(m_{21}p^2 + b_{26}p)b_{24}p}{(m_{21}p^2 + b_{26}p + b_{24}p)} + \frac{(m_{22}p^2 + b_{27}p)b_{25}p}{(m_{22}p^2 + b_{27}p + b_{25}p)}$
Левая ветвь контура <i>II</i> (аналогично правой ветви)	—	$m_1 p^2 + k_{12} + k_{13}$	$m_2 p^2 + b_{12}p + b_{13}p$
Контур <i>II</i>	—	$m_1 p^2 + k_{12} + k_{13} + m_2 p^2 + k_{22} + k_{23}$	$m_2 p^2 + (b_{12} + b_{13})p + m_2 p^2 + (b_{22} + b_{23})p$

Окончание табл.

1	2	3	4
Контур III	–	$\sum_{c=1}^n k_c$	$\sum_{c=1}^n b_c p$
Суммарная левая ветвь контуров I и II (аналогично правой ветви)	$\alpha_c = \frac{k_c}{k_*} = \frac{b_c}{b_*}$ ($c = 1, 2, 3, \dots, n$)	$\left[\frac{(m_{11}p^2 + k_{16})k_{14}}{(m_{11}p^2 + k_{16} + k_{14})} + \frac{(m_{12}p^2 + k_{17})k_{15}}{(m_{12}p^2 + k_{17} + k_{15})} \right] \times$ $\frac{\times(m_1p^2 + k_{12} + k_{13})}{\frac{(m_{11}p^2 + k_{16})k_{14}}{(m_{11}p^2 + k_{16} + k_{14})} + \frac{(m_{12}p^2 + k_{17})k_{15}}{(m_{12}p^2 + k_{17} + k_{15})} + (m_1p^2 + k_{12} + k_{13})}$	$\left[\frac{(m_{11}p^2 + b_{16})b_{14}}{(m_{11}p^2 + b_{16} + b_{14})} + \frac{(m_{12}p^2 + b_{17})b_{15}}{(m_{12}p^2 + b_{17} + b_{15})} \right] \times$ $\frac{\times(m_1p^2 + b_{12} + b_{13})}{\frac{(m_{11}p^2 + b_{16})b_{14}}{(m_{11}p^2 + b_{16} + b_{14})} + \frac{(m_{12}p^2 + b_{17})b_{15}}{(m_{12}p^2 + b_{17} + b_{15})} + (m_1p^2 + b_{12} + b_{13})}$

Анализ полученных коэффициентов демпфирования показывает целесообразность расширения методологических основ в этом направлении, так как математические модели даже в линейной постановке представляют собой достаточно сложные выражения.

Заключение. Проведён анализ современного состояния научных исследований в направлении динамики подвижного состава железнодорожного транспорта и верхнего строения железнодорожного пути. На основании проведённых исследований сформирована обобщённая расчётная схема взаимодействия подвижного состава и верхнего строения пути с учётом существующих по-

ложений динамики вагонов и контактного взаимодействия пути и подвижного состава.

Получены эквивалентные коэффициенты жёсткости и демпфирования для различных точек контакта совокупностей упругих и демпфирующих элементов с учётом наличия детализированных представлений об инерционных свойствах верхнего строения пути.

Дальнейшие исследования будут посвящены изменению усилий в различных точках системы в зависимости от полученных эквивалентных приведённых коэффициентов жёсткости и демпфирования при действии внешних кинематических возмущений от железнодорожного пути.

Литература

- Стратегия развития железнодорожного транспорта в Российской Федерации до 2030 года: от 17 июня 2008 г. № 877-р: утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации. 2008. 17 июня.
- Махутов Н.А., Лапидус Б.М., Гаденин М.М., Титов Е.Ю. Задачи и перспективы развития научных исследований в рамках сотрудничества между ОАО «РЖД» и Российской академией наук. Железнодорожный транспорт. 2023; 7:6–11.
- Лапидус Б.М. Задачи опережающего развития российских железных дорог. Железнодорожный транспорт. 2023; (2):4–14.
- Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of oscillations. Structural mathematical modeling in problems of dynamics of technical objects. Cham : Springer Nature Switzerland AG, 2019. 521 p. ISBN 978-3-030-31294-7. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-31295-4>
- Liu C., Zhang X., Wang, R., Guo Q., Li J. Vibration-Based Detection of Axlebox Bearing Considering Inner and Outer Ring Raceway Defects. Lubricants. 2024, 12, 142. <https://doi.org/10.3390/lubricants12050142>
- Zhao X., Lu Y., Chang B., Chen L. Study on the Extraction Method for Track-Side Acoustic Features Based on Cyclic Stationary Analysis. Machines. 2023, 11, 957. <https://doi.org/10.3390/machines11100957>
- Zhao C., Wang L., Liu D., Gao X., Sheng X., Ping W. Vibration control mechanism of the metabarrier under train load via numerical simulation. Journal of Vibration and Control. 2019; 25(19-20):2553-2566. <https://doi.org/10.1177/1077546319866036>
- Mechanical engineer's handbook / ed. by D.B. Marghitu. – London : Academic Press, 2001. 876 p.
- Lockhart B. Mechanical engineering reference manual. New York: NY Research Press, 2015. 206 p.
- Xie B., Sheng M. Ultralow-frequency band gap in a quasi-zero-stiffness multi-resonator periodic hybrid structure // Wave Motion. 2021. Vol. 107. 102825.
- Design and numerical validation of quasi-zero-stiffness metamaterials for very low-frequency band gaps / C. Cai, J. Zhou, L. Wu, K. Wang, D. Xu, H. Ouyang // Composite Structures. 2020. Vol. 236. 111862.
- Georgios V., Spiliotis F., John S. Sakellariou. Vibration-Based Railway Suspension Monitoring Under Varying Operating Conditions via Robust Statistical Time Series Type Methods. e-Journal of Nondestructive Testing. 29(7). <https://doi.org/10.58286/29647>
- Каргапольцев С.К., Мозалевская А.К. Современные технологии диагностики остаточных напряжений. Системы. Методы. Технологии. 2024; 3(63):15-25. <https://doi.org/10.18324/2077-5415-2024-3-15-25>
- Korneev S.V., Bolshakov R.S. Applications of Control Theory Approaches to Assessing the Dynamical Interactions of Elements of Technical Objects. Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics), 2023. Omsk : IEEE, 2023. <https://doi.org/10.1109/Dynamics60586.2023.10349564>
- Bolshakov R.S., Sitov I.S. The estimation of dynamical condition of vibration technological machines at joint action of two external disturbances. In: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering: International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment, (IC-MTME). 2020, Vol. 971: IOP Publishing Ltd, 2020.042007. <https://www.doi.org/10.1088/1757-899X/971/4/042007>

16. Большаков Р.С., Гозбенко В.Е., Вьонг К.Ч. Возможности оценки динамических состояний железнодорожных транспортных средств: структурное математическое моделирование. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024; 24(2):125–134. – <https://www.doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-125-134>
17. Григорьев Н.В. Вибрация энергетических машин. Л.: Машиностроение, 1974, 464 с.
18. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1981. Т. 6. Защита от вибрации и ударов / Под ред. К.В. Фролова. 1981, 456 с.
19. Вериго М.Ф. Динамика вагонов. М.: ВЗИИТ, 1971. 176 с.
20. Коган А.Я. Динамика пути и его взаимодействие с подвижным составом. М.: Транспорт, 1997. 326 с.
8. Mechanical engineer's handbook / ed. by D.B. Marghitu. – London : Academic Press, 2001. 876 p.
9. Lockhart B. Mechanical engineering reference manual. – New York: NY Research Press, 2015. 206 p.
10. Xie B., Sheng M. Ultralow-frequency band gap in a quasi-zero-stiffness multi-resonator periodic hybrid structure // *Wave Motion*. 2021. Vol. 107. 102825.
11. Design and numerical validation of quasi-zero-stiffness metamaterials for very low-frequency band gaps / C. Cai, J. Zhou, L. Wu, K. Wang, D. Xu, H. Ouyang // *Composite Structures*. 2020. Vol. 236. 111862.
12. Georgios V., Spiliotis F., John S. Sakellariou. Vibration-Based Railway Suspension Monitoring Under Varying Operating Conditions via Robust Statistical Time Series Type Methods. *e-Journal of Nondestructive Testing*. 29(7). <https://doi.org/10.58286/29647>
13. Kargapoltsev S.K., Mozalevskaya A.K. Modern technologies of residual stress diagnostics. The system. Methods. Technologies. 2024; 3(63):15–25. – DOI 10.18324/2077-5415-2024-3-15-25. <https://doi.org/10.18324/2077-5415-2024-3-15-25>
14. Korneev S.V., Bolshakov R.S. Applications of Control Theory Approaches to Assessing the Dynamical Interactions of Elements of Technical Objects. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, 2023. – Omsk: IEEE, 2023. <https://doi.org/110.1109/Dynamics60586.2023.10349564>
15. Bolshakov R.S., Sitov I.S. The estimation of dynamical condition of vibration technological machines at joint action of two external disturbances. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering: International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment, (IC-MTMTE)*. 2020, Vol. 971: IOP Publishing Ltd, 2020. 042007. <https://www.doi.org/10.1088/1757-899X/971/4/042007>
16. Bolshakov R.S., Gozbenko V.E., Vyong K.C. Possibilities of estimating dynamic states of railway vehicles: structural mathematical modeling. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don)*. 2024;24(2):125-134. – <https://www.doi.org/10.23947/2687-1653-2024-24-2-125-134>
17. Grigoriev N.V. Vibration of energy machines. L.: Mashinostroenie, 1974, 464 p.
18. Vibrations in technology: A reference book. In 6 volumes/Ed. Council: V.N. Chelomey (prel.). Moscow: Mashinostroenie Publ., 1981, vol. 6. Protection from vibration and shock/Edited by K.V. Frolov. 1981, 456 pages.
19. Verigo M.F. Dynamics of wagons. Moscow : VZIIT, 1971. 176 p.
20. Kogan A.Ya. Dynamics of the track and its interaction with rolling stock. Moscow : Transport, 1997. 326 p.

References

1. Railway Transport Development Strategy in the Russian Federation until 2030: Order No. 877-r dated June 17, 2008: approved by the Order of the Government of the Russian Federation. 2008. June 17.
2. Makhutov N.A., Lapidus B.M., Gadenin M.M., and Titov E.Yu. Objectives and Prospects for the Development of Scientific Research within the Framework of Cooperation between Russian Railways and the Russian Academy of Sciences. *Railway transport*. 2023; 7:6–11.
3. Lapidus B.M. Tasks of advanced development of Russian railways. *Railway transport*. 2023; (2):4–14.
4. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of oscillations. Structural mathematical modeling in problems of dynamics of technical objects. Cham : Springer Nature Switzerland AG, 2019. 521 p. ISBN 978-3-030-31294-7. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-31295-4>
5. Liu, C.; Zhang, X.; Wang, R.; Guo, Q.; Li, J. Vibration-Based Detection of Axlebox Bearing Considering Inner and Outer Ring Raceway Defects. *Lubricants*. 2024, 12, 142. <https://doi.org/10.3390/lubricants12050142>
6. Zhao, X.; Lu, Y.; Chang, B.; Chen, L. Study on the Extraction Method for Track-Side Acoustic Features Based on Cyclic Stationary Analysis. *Machines*. 2023, 11, 957. <https://doi.org/10.3390/machines11100957>
7. Zhao C, Wang L, Liu D, Gao X, Sheng X, Ping W. Vibration control mechanism of the metabarrier under train load via numerical simulation. *Journal of Vibration and Control*. 2019;25(19-20):2553-2566. <https://doi.org/10.1177/1077546319866036>