

УДК 630.232.337

DOI: 10.18324/2077-5415-2026-2-107-115

Моделирование процесса заполнения борозды уплотняющими катками лесопосадочной машины

М.А. Гнусов^a, Д.Ю. Дручинин^b, А.В. Школьных^c, М.Н. Лысыч^d

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, ул. Тимирязева, 8, г. Воронеж, Россия

^a mgnusov@ya.ru, ^b druchinin.denis@rambler.ru, ^c alex.hk525@gmail.com, ^d miklynea@yandex.ru.

^a <https://orcid.org/0000-0003-1653-4595>, ^b <https://orcid.org/0000-0003-2128-2687>,

^c <https://orcid.org/0009-0002-3311-5907>, ^d <https://orcid.org/0000-0002-3764-3873>

Статья поступила 25.02.2026, принята 31.03.2026

Проанализированы современные подходы к математическому моделированию взаимодействия рабочих органов лесохозяйственных машин с почвенной средой, что позволило обосновать выбор метода динамики частиц (DEM) в качестве методологической основы исследования. Выявлено, что дискретизация почвенной среды на сферические элементы с описанием их механического движения на основе второго закона Ньютона обеспечивает высокую физическую и геометрическую адекватность модели. Установлено, что форма уплотняющих катков задаётся совокупностью 128 элементарных треугольников, построенных на 68 базовых точках, а их движение описывается аналитическими выражениями, учитывающими поступательное и вращательное перемещение. Определено, что для оценки эффективности работы уплотняющих катков целесообразно использовать три численных показателя: среднюю плотность почвы в борозде, высоту бугорка над бороздой и среднюю силу сопротивления движению. Предложены аналитические зависимости указанных критериев оптимизации от расстояния между катками и угла наклона наклонного катка в виде полиномов второго порядка, полученные методом наименьших квадратов. Построены картограммы оптимизации, позволяющие визуализировать благоприятные области факторного пространства для каждого из критериев. Сформирована общая оптимальная область, в пределах которой обеспечивается максимальная эффективность процесса заполнения борозды. Установлено, что оптимальное расстояние между катками составляет 10,8–12,4 см, а оптимальный угол наклона катка – 15–17°, при этом плотность почвы в борозде достигает не менее 1,60 г/см³, высота бугорка – не менее 20 мм, а сила сопротивления не превышает 800 Н. Обоснована возможность использования полученных аналитических зависимостей для прогнозирования показателей качества заполнения борозды без проведения длительных компьютерных экспериментов.

Ключевые слова: математическая модель; заполнение борозды; метод динамики частиц (DEM); уплотняющие катки; оптимизация; плотность почвы; сила сопротивления; компьютерный эксперимент; параметры.

Modeling the process of furrow filling using compacting rollers of a forest planting machine

M.A. Gnusov^a, D.Yu. Druchinin^b, A.V. Shkolnykh^c, M.N. Lysych^d

Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov; 8, Timiryazev, St., Voronezh, Russia

^a mgnusov@ya.ru, ^b druchinin.denis@rambler.ru, ^c alex.hk525@gmail.com, ^d miklynea@yandex.ru.

^a <https://orcid.org/0000-0003-1653-4595>, ^b <https://orcid.org/0000-0003-2128-2687>,

^c <https://orcid.org/0009-0002-3311-5907>, ^d <https://orcid.org/0000-0002-3764-3873>

Received 25.02.2026, accepted 31.03.2026

This article analyzes current approaches to mathematical modeling of the interaction between forestry machinery working parts and the soil environment, substantiating the choice of the particle dynamics model (DEM) as the research methodology. It is found that discretizing the soil environment into spherical elements with a description of their mechanical motion based on Newton's second law ensures high physical and geometric adequacy of the model. It is established that the shape of the compacting rollers is determined by a set of 128 elementary triangles constructed on 68 base points, and their motion is described by analytical expressions accounting for translational and rotational displacement. It is determined that three numerical indicators are appropriate for assessing the effectiveness of compacting rollers: average soil density in the furrow, hummock height above the furrow, and average resistance force. Analytical relationships between the specified optimization criteria, the distance between rollers, and the inclination angle of the inclined roller are proposed in the form of second-order polynomials obtained using the least squares method. Optimization cartograms are constructed to visualize favorable areas of the factor space for each criterion. A general optimal region has been formed, within which the maximum efficiency of the furrow filling process is ensured. It has been established that the optimal distance between rollers is 10.8–12.4 cm, and the optimal roller inclination angle is 15–17°, while the soil density in the furrow reaches at least 1.60 g/cm³, the tubercle height is at least 20 mm, and the resistance force does not exceed 800 N. The possibility of using the obtained analytical relationships to predict furrow filling quality indicators without conducting lengthy computer experiments is substantiated.

Keywords: mathematical model; furrow filling; Discrete Element Method (DEM); compacting rollers; optimization; soil density; resistance force; computer experiment; parameters.

Введение и обзор литературы по теме исследования. Проблема моделирования взаимодействия деформируемых сред с рабочими органами машин является предметом интенсивных исследований на протяжении нескольких десятилетий. Анализ литературных источников позволяет выделить два основных подхода к математическому описанию подобных процессов: континуальный, основанный на применении уравнений механики сплошных сред (метод конечных элементов – МКЭ), и дискретный, рассматривающий среду как совокупность отдельных взаимодействующих частиц.

Континуальные подходы, в частности МКЭ, хорошо зарекомендовали себя для моделирования упругих и пластических деформаций материалов с относительно малыми перемещениями. Однако их применение для задач, связанных с большими деформациями, фрагментацией среды, образованием сыпучих масс и свободными поверхностями, каким является процесс заполнения борозды, сопряжено с существенными вычислительными сложностями и необходимостью частого перестроения расчётной сетки, что приводит к значительным затратам машинного времени и потенциальным ошибкам вычислений.

В качестве альтернативы континуальным методам в последние годы широкое распространение получили дискретные методы, и в частности, метод динамики частиц (Discrete Element Method, DEM), относящийся к классу методов крупных частиц. Как показывают многочисленные исследования, данный метод является высокоэффективным инструментом для моделирования поведения сыпучих и гранулированных материалов, к которым может быть отнесена и почвенная среда.

Сущность метода динамики частиц заключается в том, что исследуемая среда дискретизируется на конечное число элементов, как правило, сферической формы. Каждый элемент рассматривается как самостоятельное физическое тело, движение которого подчиняется законам классической ньютоновской динамики. Взаимодействие между элементами, а также между элементами и граничными условиями (рабочими органами машин) описывается с помощью реологических моделей, чаще всего – вязко-упругой модели с сухим и вязким трением. Такой подход позволяет естественным образом моделировать такие сложные явления, как сыпучесть, уплотнение, рыхление, образование борозд и валов, что невозможно или крайне затруднительно в рамках континуального подхода [1–8].

Широкое применение метода динамики частиц в агроинженерных задачах, подтверждённое корреляцией результатов компьютерного моделирования с данными натурных экспериментов, обусловило целесообразность его использования в качестве основы для математического описания процесса заполнения борозды почвой в данном исследовании.

Таким образом, анализ литературных источников демонстрирует, что выбранный методологический аппарат является современным, научно обоснованным и наиболее адекватным для решения поставленной

задачи. Он позволяет учесть ключевые физико-механические аспекты процесса: дискретность почвенной среды, возможность относительного перемещения ее отдельных частей, сложный характер контактного взаимодействия между частицами почвы и с поверхностями уплотняющих катков. Это обеспечивает необходимый уровень детализации для последующего определения профиля борозды, распределения плотности почвы в ее объеме и оценки силовых нагрузок на рабочие органы [8–12].

Актуальность. Актуальность проведения теоретических исследований процессов взаимодействия рабочих органов лесохозяйственных машин с почвенной средой обусловлена необходимостью повышения эффективности и снижения энергоёмкости технологических операций. Одной из таких операций, играющих ключевую роль в лесном хозяйстве, является заполнение борозды почвой после высадки посадочного материала. Качество выполнения данного процесса, характеризующееся равномерностью профиля борозды и оптимальным распределением плотности почвы, напрямую влияет на дальнейшее развитие корневой системы растений и, как следствие, на урожайность.

Разработка математических моделей, адекватно описывающих данный процесс, сопряжена со значительными методологическими трудностями. Высокие требования к физической и геометрической адекватности модели обусловлены необходимостью точного определения конечного профиля борозды и пространственного распределения плотности почвы. Это, в свою очередь, требует детального представления в модели сложной геометрии уплотняющих катков, учета их поступательного и вращательного движения, а также адекватного описания поведения почвенной среды и ее многокомпонентного взаимодействия с рабочими органами [12–16].

В связи с этим, центральной задачей настоящего исследования является разработка высокдетализированной математической модели процесса заполнения борозды почвой, позволяющей с достаточной для инженерных расчетов точностью прогнозировать результирующие показатели и энергетические затраты. Решение данной задачи открывает возможности для виртуального проектирования и оптимизации конструктивных и технологических параметров уплотняющих катков, что является современным и ресурсосберегающим подходом в машиностроении [17–20].

Методика и результаты моделирования. Для теоретического исследования процесса заполнения борозды почвой разработана математическая модель процесса. Для того чтобы определить профиль борозды и распределение плотности почвы в ней, модель должна иметь достаточно высокую физическую и геометрическую адекватность. В модели необходимо представить с высокой детализацией форму уплотняющих катков, их поступательное и вращательное движение. Не менее сложным объектом для моделирования является почва и её взаимодействие с уплотняющими катками.

В качестве методологической основы данного исследования был применён метод динамики частиц, относящийся к классу методов крупных частиц. Его широкое использование при построении моделей рассматриваемого типа обусловило целесообразность применения для математического описания моделируемого процесса.

В рамках метода динамики частиц исследуемая среда (в данном случае почва) разбивается на отдельные

элементы шарообразной формы (рис. 1). Элементы имеют ряд параметров, которыми могут быть заданы физические свойства почвы. Однако, в отличие от приближения сплошной среды, в методе динамики частиц элементы могут двигаться в пространстве, как отдельные друг от друга физические тела, подчиняясь законам классической динамики. При этом элементы могут взаимодействовать между собой и с рабочими поверхностями уплотняющих катков (см. рис. 1).

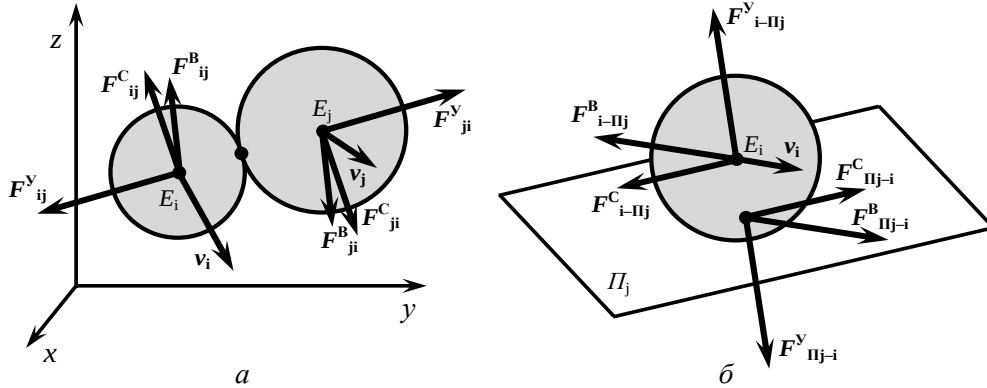


Рис. 1. Силы, возникающие при контакте двух элементов почвы (а) и между элементом почвы и рабочей поверхностью уплотняющих катков (б): F^y – упругие силы; F^C и F^B – силы сухого и вязкого трения. Векторные величины обозначены жирным шрифтом

Каждый i -й элемент почвы в модели задаётся шестью переменными:

– расположение в пространстве задаётся декартовыми координатами x_i, y_i, z_i ;

– скорость движения задаётся компонентами v_{xi}, v_{yi}, v_{zi} .

Механическое движение элементов как отдельных тел описывается с помощью второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} i = 1 \dots N_3; \\ m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_2} \left(\left(c_{ij} \left(\frac{d_i + d_j}{2} - r_{ij} \right) \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}} + \left(k_{ij}^c \frac{v_{xi} - v_{xj}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_j|} + k_{ij}^s (v_{xi} - v_{xj}) c_{ij} \left(r_{ij} - \alpha_0 \frac{d_i + d_j}{2} \right), r_{ij} < \alpha_0 \frac{d_i + d_j}{2}; \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 0, r_{ij} \geq \alpha_0 \frac{d_i + d_j}{2}; \right) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N_B} \left(\left(c_{i-\pi_j} \left(\frac{d_i}{2} - r_{i-\pi_j} \right) \frac{(x_i - x_{i-\pi_j})}{r_{i-\pi_j}} + \left(k_{ij}^c \frac{v_{xi} - v_{x_{i-\pi_j}}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_{\pi_j}|} + k_{ij}^s (v_{xi} - v_{x_{i-\pi_j}}) c_{ij} \left(r_{i-\pi_j} - \alpha_0 \frac{d_i}{2} \right), r_{i-\pi_j} < \alpha_0 \frac{d_i}{2}; \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 0, r_{i-\pi_j} \geq \alpha_0 \frac{d_i}{2}; \right) \right); \right. \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_3} \left(\left(c_{ij} \left(\frac{d_i + d_j}{2} - r_{ij} \right) \frac{(y_i - y_j)}{r_{ij}} + \left(k_{ij}^c \frac{v_{yi} - v_{yj}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_j|} + k_{ij}^s (v_{yi} - v_{yj}) c_{ij} \left(r_{ij} - \alpha_0 \frac{d_i + d_j}{2} \right), r_{ij} < \alpha_0 \frac{d_i + d_j}{2}; \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 0, r_{ij} \geq \alpha_0 \frac{d_i + d_j}{2}; \right) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N_n} \left(\left(c_{i-\pi_j} \left(\frac{d_i}{2} - r_{i-\pi_j} \right) \frac{(y_i - y_{i-\pi_j})}{r_{i-\pi_j}} + \left(k_{ij}^c \frac{v_{yi} - v_{y_{i-\pi_j}}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_{\pi_j}|} + k_{ij}^s (v_{yi} - v_{y_{i-\pi_j}}) c_{ij} \left(r_{i-\pi_j} - \alpha_0 \frac{d_i}{2} \right), r_{i-\pi_j} < \alpha_0 \frac{d_i}{2}; \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 0, r_{i-\pi_j} \geq \alpha_0 \frac{d_i}{2}; \right) \right); \right. \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{N_3} \left(\left(c_{ij} \left(\frac{d_i + d_j}{2} - r_{ij} \right) \frac{(z_i - z_j)}{r_{ij}} + \left(k_{ij}^c \frac{v_{zi} - v_{zj}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_j|} + k_{ij}^s (v_{zi} - v_{zj}) c_{ij} \left(r_{ij} - \alpha_0 \frac{d_i + d_j}{2} \right), r_{ij} < \alpha_0 \frac{d_i + d_j}{2}; \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 0, r_{ij} \geq \alpha_0 \frac{d_i + d_j}{2}; \right) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{N_A} \left(\left(c_{i-\pi_j} \left(\frac{d_i}{2} - r_{i-\pi_j} \right) \frac{(z_i - z_{i-\pi_j})}{r_{i-\pi_j}} + \left(k_{ij}^c \frac{v_{zi} - v_{z_{i-\pi_j}}}{|\vec{v}_i - \vec{v}_{\pi_j}|} + k_{ij}^s (v_{zi} - v_{z_{i-\pi_j}}) c_{ij} \left(r_{i-\pi_j} - \alpha_0 \frac{d_i}{2} \right), r_{i-\pi_j} < \alpha_0 \frac{d_i}{2}; \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 0, r_{i-\pi_j} \geq \alpha_0 \frac{d_i}{2}; \right) \right) - m_i g, \end{cases} \quad (1)$$

где i – номер элемента; N_3 – количество элементов; m_i – масса элемента; t – время; j – номер элемента, возможно контактирующего с i -м элементом; c_{ij} – коэффициент жёсткости взаимодействия элементов i и j (рассчитывается через объёмный модуль упругости почвы) k_{ij}^C и k_{ij}^B – коэффициенты сухого трения элементов i и j друг о друга;

d_i – диаметр i -го элемента; r_{ij} – расстояние между центрами элементов i и j ; α_0 – коэффициент ограничения взаимодействия между элементами (находится в диапазоне 1,0...1,1); N_{Π} – количество элементарных поверхностей уплотняющих катков; $c_{i-\Pi j}$, $k_{i-\Pi j}^C$ и $k_{i-\Pi j}^B$ – коэффициенты жёсткости, сухого и вязкого трения при взаимодействии элемента i с поверхностью j ; $r_{i-\Pi j}$ – расстояние от центра i -го элемента до j -й поверхности; $x_{i-\Pi j}$, $y_{i-\Pi j}$, $z_{i-\Pi j}$ – декартовы координаты точки-проекции центра элемента i на поверхность j ; $v_{x\Pi j}$, $v_{y\Pi j}$, $v_{z\Pi j}$ – компоненты скорости центра j -й элементарной поверхности; $|\dots|$ – модуль вектора; g – ускорение свободного падения.

Расстояние r_{ij} между центрами элементов рассчитывается на каждом шаге интегрирования через координаты центров по теореме Пифагора:

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.$$

Решением данной системы дифференциальных уравнений второго порядка являются функции $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$, определяющие траектории движения элементов почвы и позволяющие оценить качество заполнения борозды почвой и энергетические затраты.

Элементарные поверхности уплотняющих катков задаются аналитическими уравнениями, с помощью которых определяется расстояние $r_{i\Pi j}$ между центром элемента i и элементарной поверхностью j .

Коэффициент жёсткости взаимодействия элементов c_{ij} рассчитывается с использованием справочных данных по объёмному модулю упругости почвы E :

$$c_{ij} = E \cdot \frac{\pi d_3}{4} k_3 \quad (2)$$

где E – объёмный модуль упругости почвы; d_3 – диаметр элемента; k_3 – коэффициент заполнения пространства, учитывающий несплошность заполнения пространства (просветы между элементами) при случайной плотной упаковке элементов почвы.

Для того чтобы представить в модели форму уплотняющих катков, используется совокупность из 128 элементарных треугольников, построенных на 68 базовых точках (рис. 2).

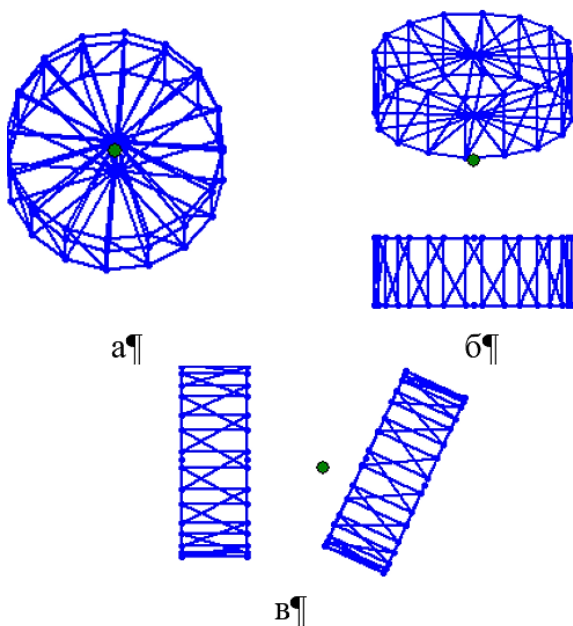


Рис. 2. Представление в модели рабочих поверхностей уплотняющих катков: проекции XZ (а), XY (б), YZ (в)

Уплотняющие катки задаются в модели следующим образом. Положение центра системы из двух катков x , y , z меняется с течением времени t следующим образом.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + vt; \\ y(t) &= y_0; \\ z(t) &= \begin{cases} z_0 + (z_p - z_0) \frac{t}{t_n}, & t < t_n; \\ z_p, & t \geq t_n, \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

где x_0 , y_0 , z_0 – положение центра системы из двух катков в начальный момент времени ($t = 0$); v – скорость продольного движения сажалки; z_p – вертикальная координата системы из двух катков в рабочем положении; t_n – длительность процесса заглубления уплотняющих катков (в основных компьютерных экспериментах $t_n = 0,25$ с).

Каждый уплотняющий каток состоит из 34 точек. Две точки катка (P_1 , P_2 для опорного, P_{35} , P_{36} для наклонного) расположены на его оси и задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} x_{P1} &= x; \quad y_{P1} = y - \frac{B}{2} - \Delta y_1; \quad z_{P1} = z; \\ x_{P2} &= x; \quad y_{P2} = y + \frac{B}{2} - \Delta y_1; \quad z_{P2} = z; \\ x_{P35} &= x + \Delta x; \quad y_{P35} = y - \frac{B}{2} + \Delta y_2; \quad z_{P35} = z; \\ x_{P36} &= x + \Delta x; \quad y_{P36} = y + \frac{B}{2} + \Delta y_2; \quad z_{P36} = z, \end{aligned} \quad (4)$$

где x_{Pi} , y_{Pi} , z_{Pi} – координаты точки P_i ; B – высота цилиндра катка; Δx – смещение в продольном направлении наклонного катка относительно опорного катка; Δy_1 и Δy_2 – расстояния от центра системы катков до центров опорного и наклонного катков.

При этом расстояние (просвет) между катками Δy определяется как:

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 - B. \quad (5)$$

Остальные 32 точки каждого катка расположены по окружности оснований цилиндра и задаются следующими выражениями:

$$\begin{cases} i = 3 \dots 18; \\ x_{Pi} = x_{P1} + \frac{D}{2} \cos \left(2\pi \frac{i-2}{16} + \omega t \right); \\ y_{Pi} = y_{P1}; \\ z_{Pi} = z_{P1} + \frac{D}{2} \sin \left(2\pi \frac{i-2}{16} + \omega t \right); \\ i = 19 \dots 34; \\ x_{Pi} = x_{P2} + \frac{D}{2} \cos \left(2\pi \frac{i-18}{16} + \omega t \right); \\ y_{Pi} = y_{P2}; \\ z_{Pi} = z_{P2} + \frac{D}{2} \sin \left(2\pi \frac{i-18}{16} + \omega t \right); \end{cases} \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 37 \dots 52; \\ x_{Pi} = x_{P35} + \frac{D}{2} \cos \left(2\pi \frac{i-36}{16} + \omega t \right); \\ y_{Pi} = y_{P35}; \\ z_{Pi} = z_{P35} + \frac{D}{2} \sin \left(2\pi \frac{i-36}{16} + \omega t \right); \\ i = 53 \dots 68; \\ x_{Pi} = x_{P36} + \frac{D}{2} \cos \left(2\pi \frac{i-52}{16} + \omega t \right); \\ y_{Pi} = y_{P36}; \\ z_{Pi} = z_{P36} + \frac{D}{2} \sin \left(2\pi \frac{i-52}{16} + \omega t \right), \end{array} \right. \quad (7)$$

где D – диаметр катка; ω – угловая скорость вращения катка.

Наклон одного из катков на угол α производится следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} i = 35 \dots 68; \\ x_{\Pi} = \frac{x_{P35} + x_{P36}}{2}; y_{\Pi} = \frac{y_{P35} + y_{P36}}{2}; z_{\Pi} = \frac{z_{P35} + z_{P36}}{2}; \\ r_i = \sqrt{(y_i - y_{\Pi})^2 + (z_i - z_{\Pi})^2}; \\ \varphi_i = \text{Arctan} \frac{z_i - z_{\Pi}}{y_i - y_{\Pi}}; \\ y'_{Pi} = y_{\Pi} + r_i \cos(\varphi_i - \alpha); \\ z'_{Pi} = z_{\Pi} + r_i \sin(\varphi_i - \alpha), \end{array} \right. \quad (8)$$

где x_{Π} , y_{Π} , z_{Π} – координаты центра наклонного катка, относительно которого производится наклон катка на угол α ; r_i , φ_i – полярные координаты точек i ; y'_{Pi} , z'_{Pi} – координаты y_{Pi} , z_{Pi} точек катка после наклона.

После задания координат точек уплотняющих катков задаются 128 элементарных треугольников рабочих поверхностей. В частности, для опорного катка треугольники задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (P_1, P_{2+i}, P_{3+i}), i = 1 \dots 15; \\ \Delta_{16} &= (P_1, P_{2+16}, P_{3+0}); \\ \Delta_{i+16} &= (P_2, P_{18+i}, P_{19+i}), i = 1 \dots 15; \\ \Delta_{32} &= (P_2, P_{18+16}, P_{19+0}); \\ \Delta_{i+32} &= (P_{2+i}, P_{3+i}, P_{19+i}), i = 1 \dots 15; \\ \Delta_{48} &= (P_{18}, P_3, P_{19}), \\ \Delta_{i+48} &= (P_{2+i}, P_{18+i}, P_{19+i}), i = 1 \dots 15; \\ \Delta_{64} &= (P_{18}, P_{19}, P_{34}). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичным образом задаются треугольники для наклонного катка.

В процессе моделирования рассчитывается взаимодействие каждого из элементов почвы с каждой элементарной треугольной поверхностью. Для каждого элемента i почвы рассчитываются расстояния:

- $r_{i-T\Pi}$ – до плоскости внутри треугольников;
- $r_{i-T\Pi k}$ – до рёбер треугольников;
- $r_{i-T\Pi Bk}$ – до вершин треугольников.

Если расстояние до какого-то из перечисленных геометрических объектов составит меньше радиуса элемента $d_i/2$, определяются координаты точки проекции элемента на данный геометрический объект $x_{\Pi i}$, $y_{\Pi i}$, $z_{\Pi i}$ и определяется величина и направление упруго-вязкой силы взаимодействия элемента i с геометрическим объектом (j, k) . Силы, действующие на один элемент со стороны других элементов и различных геометрических объектов, суммируются и образуют ре-

зультирующую силу, под действием которой элемент совершает механическое движение.

Разработанная математическая модель представляет собой совокупность большого количества дифференциальных уравнений второго порядка. Решение системы производится численно, методом Рунге-Кутты второго порядка.

В начальный момент времени в нижней части модельного пространства размещается 34 033 элемента почвы таким образом, чтобы они образовывали заданный профиль борозды. Начальная скорость задается равной нулю.

Элементы упруго-вязко взаимодействуют со стенками модельного пространства, что исключает их выход из области моделирования.

Уплотняющие катки в начальный момент времени помещаются при заданной координате x_k оси вертикально расположенного катка. В процессе всего компьютерного эксперимента уплотняющие катки движутся с постоянной поступательной скоростью v_k и постоянной скоростью вращения ω_k .

В рамках построения математической модели были сформулированы следующие базовые допущения:

- почвенная масса в границах отдельного элемента моделируется как сплошная среда;
- перемещение элементов почвы подчиняется законам классической динамики и заключается в их механическом взаимодействии как между собой, так и с поверхностями уплотняющих катков;
- каждый элемент почвы является однородным телом, что подразумевает постоянство его объёмной плотности;
- характер силового механического взаимодействия между соседними элементами аппроксимирован линейной вязкоупругой моделью;
- механические свойства элементов почвы определяются исключительно четырьмя параметрическими константами: диаметром, массой, коэффициентами жесткости и вязкости.

Таким образом, разработана математическая модель процесса заполнения борозды почвой, позволяющая определить профиль борозды и распределение плотности почвы в ней после прохода уплотняющих катков.

Для оценки эффективности уплотняющих катков и технологических параметров с помощью модели рассчитываются три численных показателя, определяющих качество заполнения борозды почвой и энергетические затраты. Для определения показателей качества в процессе компьютерного эксперимента рассчитываются две функции:

- $S(y, z)$ – функция поперечного профиля борозды, принимающая значение 1 или 0, в зависимости от того, содержит ли поперечное сечение почву при данных координатах (y, z) .
- $\rho(y, z)$ – функция распределения плотности почвы в поперечном сечении борозды.

Для получения функций $S(y, z)$ и $\rho(y, z)$ производится усреднение вдоль направления движения x на протяжении 1 м, от положения x_1 за уплотняющими катками, соответствующего началу установившегося режима обработки до положения x_2 , соответствующего моменту времени окончания компьютерного эксперимента. Функции $S(y, z)$ и $\rho(y, z)$ изображаются ниже в виде

оттенков красного цвета (рис. 4). С точки зрения численной и алгоритмической реализации функции представляют собой переменные массивы размером 120×40 .

По функции $S(y, z)$ определяется средняя высота h бугорка над бороздой следующим образом

$$h = \frac{b}{y_2 - y_1} \sum_{i=[y_1/b]}^{[y_2/b]} \max_{j=1 \dots 40} \left(z_j, \begin{cases} S(ib, j) = 1; \\ S(ib, j+1) = 0; \end{cases} \right) - h_0 \quad (10)$$

где b – шаг дискретизации пространства; y_1 и y_2 – координаты, между которыми расположена борозда; [...] – операция округления до целого числа; z_j – реальная высота, соответствующая высоте j после дискретизации пространства; h_0 – высота расположения поверхности почвы.

Средняя плотность почвы в борозде ρ определяется следующим образом:

$$\rho = \frac{b^2}{(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)} \sum_{i=[y_1/b]}^{[y_2/b]} \sum_{j=[z_1/b]}^{[z_2/b]} \rho(ib, jb) \quad (11)$$

где z_1 и z_2 – вертикальные координаты, соответствующие дну и верхней части борозды.

По результатам моделирования определяется средняя сила сопротивления движению уплотняющих катков F_x

$$F_x = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \sum_{\tau=[t_1/\Delta t]}^{[t_2/\Delta t]} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_n} (F_{i-\Pi_j}^\tau)_x \quad (12)$$

где t_1 и t_2 – моменты времени, в которые производится усреднение силы сопротивления; Δt и τ – величина и порядковый номер шага интегрирования уравнений движения по времени; N_s и N_n – количество элементов и элементарных треугольных поверхностей; $(F_{i-\Pi_j}^\tau)_x$ – продольная декартова компонента силы взаимодействия между элементом i и поверхностью Π_j на шаге интегрирования τ .

На этапе предварительного исследования были определены два основных конструктивных параметра, влияющих на эффективность заполнения борозды:

Δy – расстояние между уплотняющими катками в поперечном к движению направлении;

α – угол ориентации наклонного катка.

Для исследования одновременного влияния данных факторов проведена серия из девяти компьютерных экспериментов, в которых расстояние Δy варьировали на уровнях 10, 13, 16 см, угол α на уровнях 15, 25, 35° (табл. 1)

Таблица 1. Результаты оптимизационных компьютерных экспериментов

Номер комп. эксп.	Расстояние между катками Δy , см	Угол наклона наклонного катка α , градусы	Средняя плотность почвы в борозде ρ , г/см ³	Средняя высота бугорка над бороздой h , мм	Средняя сила сопротивления движению F_x , Н
1	10	15	1,604	19,4	791,2
2	10	25	1,595	18,3	707,8
3	10	35	1,569	14,5	602,2
4	13	15	1,591	20,0	798,8
5	13	25	1,580	15,8	711,0
6	13	35	1,530	16,6	583,0
7	16	15	1,565	17,1	787,6
8	16	25	1,531	10,9	672,8
9	16	35	1,435	5,9	555,6

Для каждого из девяти оптимизационных компьютерных экспериментов создавались комбинации уплотняющих катков, от которых можно было ожидать высокой эффективности (рис. 3).

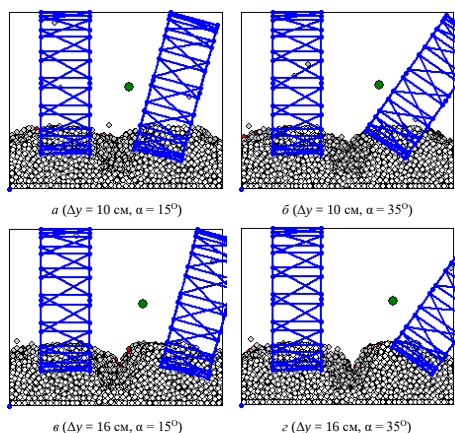


Рис. 3. Несколько комбинаций параметров Δy и α уплотняющих катков

В качестве показателей эффективности заполнения борозды – критериев оптимизации – использовали следующие показатели:

ρ – средняя плотность почвы в борозде;

h – средняя высота бугорка над бороздой;

F_x – средняя сила сопротивления движению уплотняющих катков (сила, с которой тянет трактор сажалку).

В процессе решения задачи оптимизации необходимо определить оптимальные значения факторов $\Delta y^{\text{опт}}$ и $\alpha^{\text{опт}}$, обеспечивающих максимум критериев ρ и h и минимум критерия F_x :

$$\begin{cases} \rho(\Delta y, \alpha) \rightarrow \max; \\ h(\Delta y, \alpha) \rightarrow \max; \\ F_x(\Delta y, \alpha) \rightarrow \min; \end{cases} \Rightarrow \Delta y^{\text{опт}}, \alpha^{\text{опт}}. \quad (13)$$

Для дальнейшего решения задачи оптимизации определены аналитические выражения функций $\rho(\Delta y, \alpha)$, $h(\Delta y, \alpha)$, $F_x(\Delta y, \alpha)$ в виде многочленов второго порядка:

$$K(\Delta y, \alpha) = k_1 \cdot \Delta y^2 + k_2 \cdot \alpha^2 + k_3 \cdot \Delta y \cdot \alpha + k_4 \cdot \Delta y + k_5 \cdot \alpha + k, \quad (14)$$

где K – один из критериев оптимизации (ρ , h или F_x); $k_1 \dots k_6$ – параметры полинома.

Полиномиальная аппроксимация не только облегчает поиск области экстремума функций, но и позволяет сгладить исходный набор данных.

Параметры $k_1 \dots k_6$ определялись методом наименьших квадратов (МНК), который позволяет добиться минимального отклонения аппроксимирующей функции от набора данных компьютерных экспериментов:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{КЭ}}} (K_{\text{аналит.}}(\Delta y^i, \alpha^i) - K_{\text{КЭ}}^i(\Delta y^i, \alpha^i))^2 \rightarrow \min \quad (15)$$

$$\rho(\Delta y, \alpha) = -1,907 \cdot 10^{-3} \Delta y^2 - 1,967 \cdot 10^{-4} \alpha^2 - 7,917 \cdot 10^{-4} \Delta y \cdot \alpha + 0,056 \Delta y + 0,016 \alpha + 1,143 \quad (16)$$

$$h(\Delta y, \alpha) = -0,346 \Delta y^2 + 5,833 \cdot 10^{-3} \alpha^2 - 0,053 \Delta y \cdot \alpha + 9,30 \Delta y + 0,066 \alpha - 33,521 \quad (17)$$

$$F_x(\Delta y, \alpha) = -1,267 \Delta y^2 - 0,108 \alpha^2 - 0,358 \Delta y \cdot \alpha + 37,158 \Delta y - 0,555 \alpha + 633,64, \quad (18)$$

где единицами измерения ρ являются г/см³, h – мм, F_x – Н, Δy – см, α – градусы.

Заключение. Полученные формулы $\rho(\Delta y, \alpha)$, $h(\Delta y, \alpha)$, $F_x(\Delta y, \alpha)$ позволяют без проведения длительных компьютерных экспериментов оценить показатели эффективности заполнения борозды.

Для визуального анализа зависимостей $\rho(\Delta y, \alpha)$, $h(\Delta y, \alpha)$, $F_x(\Delta y, \alpha)$ построены графики (рис. 4). Для более точного количественного анализа данные графики перестроены в картограммы оптимизации с помощью линий уровня (рис. 5). Пример использования картограммы показан на рис. 5, а. Если расстояние между катками составляет $\Delta y = 14$ см (точка А), а угол ориентации наклонного катка составляет $\alpha = 30^\circ$ (точка В), то восстанавливая перпендикуляры из точек А и В, получим точку пересечения С, соответствующую на картограмме данному набору параметров. Точка С расположена между линиями уровня 1,50 и 1,55 кг/м³, но ближе к линии уровня 1,55 кг/м³. Таким образом, плотность почвы в борозде ρ составляет около 1,53 кг/м³. Аналогичным образом могут быть определены показатели h и F_x по картограммам на рис. 5, б и в.

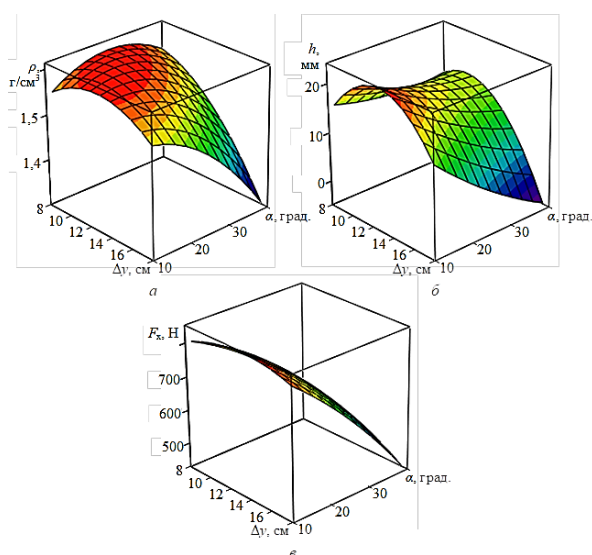


Рис. 4. Графики влияния длины расстояния между катками Δy и угла наклона катка α на среднюю плотность почвы в борозде (а), среднюю высоту бугорка над бороздой h (б) и среднюю силу сопротивления движения F_x (в)

где i и $N_{\text{КЭ}}$ – порядковый номер и общее количество компьютерных экспериментов ($N_{\text{КЭ}} = 9$); $K_{\text{аналит.}}$ – искомая полиномиальная зависимость критерия K от факторов Δy и α ; $K_{\text{КЭ}}^i$ – значения критерия K , определённые в i -м компьютерном эксперименте с параметрами Δy^i и α^i . Для аппроксимации методом МНК использовали математическую пакет программ MathCAD 13 (приложение Б).

В результате получены следующие аналитические формулы для показателей качества заполнения борозды:

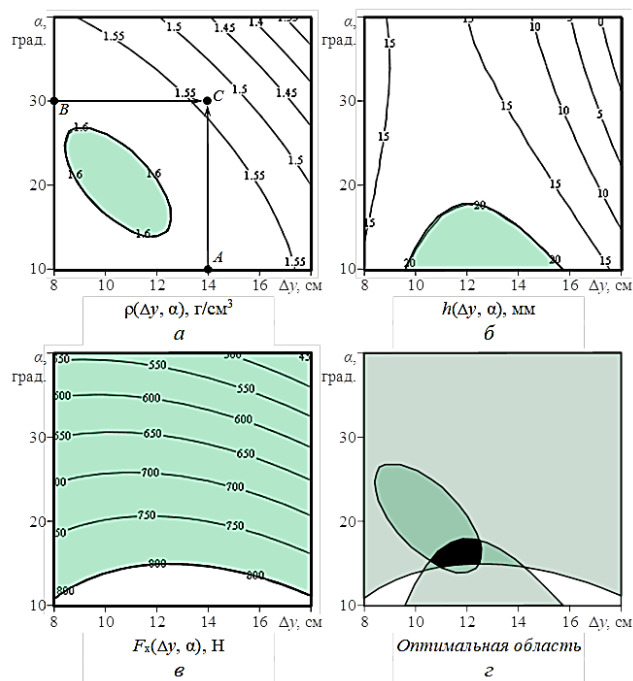


Рис. 5. Картограммы оптимизации конструктивных параметров уплотняющих катков

На каждой картограмме выделены благоприятные области факторного пространства (Δy , α), в которых критерии имеют искомые максимальные или минимальные значения. Выделены области, в которых плотность почвы в борозде ρ превышает 1,60 кг/м³ (рис. 5, а), высота бугорка над бороздой h превышает 20 мм (рис. 5, б), сила сопротивления продольному движению не превышает 800 Н (рис. 5, в).

Пересечение трёх благоприятных областей формирует общую оптимальную область. По расположению оптимальной области в факторном пространстве можно сделать вывод, что оптимальное расстояние между катками составляет 10,8...12,4 см, оптимальный угол наклона катка составляет 15...17°. При этом плотность почвы в борозде составит не менее 1,60 кг/м³, высота бугорка над бороздой – не менее 20 мм, сила сопротивления продольному движению – не более 800 Н.

Таким образом, в результате решения двухфакторной задачи оптимизации установлено, что оптимальное расстояние между катками составляет 10,8...12,4 см, оптимальный угол наклона катка составляет 15...17°. При этом плотность почвы в борозде составит не менее 1,60 кг/м³, высота бугорка над бороздой – не менее

20 мм, сила сопротивления продольному движению – не более 800 Н.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 25-19-00876, <https://rscf.ru/project/25-19-00876/>.

Литература

- Hu M., Gao T., Dong X.W., Tan Q.T., Yi C., Wu F., Bao A.H. Simulation of soil-tool interaction using smoothed particle hydrodynamics (SPH) // *Soil & Tillage Research*. 2023. Vol. 229. Art. 105671. DOI: 10.1016/j.still.2023.105671 [Sun X., Li N., Chen D., Chen G., Sun C., Shi M., Gao X., Wang K., Hezam I. M. A Forest Fire Prediction Model Based on Cellular Automata and Machine Learning // *IEEE Access*. 2024. Vol. 12. P. 55389–55403. DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3389035
- Song W., Ren L., Wang J., Ma Y., Guo Y., Han M., Zhao H. Methods for constructing soil dynamic models under intelligent cultivation: dynamic interaction mechanisms between farming tools with complex structures and soil // *Agriculture*. 2025. Vol. 15, No. 13. Art. 1355. DOI: 10.3390/agriculture15131355 [Charuk A., Gawdzińska K., Dunaj P. Finite element modeling of the dynamic response of plywood // *Materials*. 2024. Vol. 17, No. 17. Art. 4358. DOI: 10.3390/ma17174358.
- Маковкин Г.А., Лихачева С.Ю. Применение МКЭ к решению задач механики деформируемого твердого тела // Н. Новгород : Изд-во ННГАСУ. 2012.
- Кобелев Н.Б., Половников В.А., Девятков В.В. Имитационное моделирование. 2020.
- Wang J., Li X., Feng H., Zhang Y., Sun K. Modeling soilplant-machine dynamics using discrete element method: a review // *Agriculture*. 2023. Vol. 13, No. 5. Art. 1260. DOI: 10.3390/agriculture13051260 [Han J., Shen K., Guo Y., Xiong H., Lin J. Discrete element simulations of flexible ribbon-like particles // *Powder Technology*. 2023. Vol. 429. Art. 118950. DOI: 10.1016/j.powtec.2023.118950.
- Курбатова Н.В., Наседкин А.В. Конечноэлементное моделирование в ANSYS, математическое моделирование и вычислительная математика, трехмерное тело неканонической формы // *Навигатор в мире науки и образования*. 2017. № 2. С. 58–58.
- Иродов И.Е. Основные законы механики // М. : Высш. шк. 1985
- Николаев В.А. Совершенствование технических средств обработки почвы. 2010.
- Мазуров Б.Т. Математическое моделирование при исследовании геодинамики. 2019.
- Строгалева В.П., Толкачева И.О. Имитационное моделирование. 2018.
- Шкурин И.Г., Шкурин Ю.А., Сухолентцев А.И. Контактное взаимодействие рабочих органов с твердыми частицами и их износ при относительном перемещении // *Современные автомобильные материалы и технологии (самит-2017)*. 2017. С. 266–269.
- Hu M., Gao T., Dong X.W., Tan Q.T., Yi C., Wu F., Bao A.H. Simulation of soil-tool interaction using smoothed particle hydrodynamics (SPH) // *Soil & Tillage Research*. 2023. Vol. 229. Art. 105671. DOI: 10.1016/j.still.2023.105671 [Peltola H., Palander T., Mäkelä A., et al. Precision modeling of fuel consumption to select the most efficient logging method for cut-to-length timber harvesting // *Forests*. 2024. Vol. 16, No. 2. Art. 294. DOI: 10.3390/f20100294.]
- Егоров И.Е., Литвин Л.Ф. Традиционные методы исследования и моделирование почв // *Эрозионные и русловые процессы*. 2010. С. 196–219.
- Bradley A.C., Jaksa M.B., Kuo Y.L. Ground response of rolling dynamic compaction – a finite element modelling approach // *Frontiers in Built Environment*. 2024. Vol. 9. Art. 1334090. DOI: 10.3389/fbuil.2023.1334090 [Kim I., Seo J., Woo H., Choi B. Assessing Rutting and Soil Compaction Caused by Wood Extraction Using Traditional and Remote Sensing Methods // *Forests*. 2025. Vol. 16, No. 1. Art. 86. DOI: 10.3390/f16010086.
- Туманова М.Е. Сравнительный анализ решения задачи Коши методом Рунге-Кутты с методами Эйлера // XXV Международная научно-практическая конференция «Innovative trends of science and practice, tasks and ways to solve them» / PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES. 2022. Т. 28. С. 452–456.
- Бартенев И.М. Качение уплотняющих катков в лесопосадочных машинах по деформируемой поверхности / И.М. Бартенев // Труды

Всесоюзного научно-исследовательского института агролесомелиорации. Том 2(64). Волгоград : Волгоградская правда, 1971. С. 54–68.

- Бартенев И. Автоматизация процесса посадки растений / И.М. Бартенев // *Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета*. 2012. № 75. С. 384–396.
- Бартенев И.М. Расчёт и проектирование лесохозяйственных машин [Текст] : учеб. пособие / И.М. Бартенев. Воронеж, 2010. 339 с.
- Шабанов М.Л. Воздействие бороздообразующих и уплотняющих рабочих органов лесопосадочных машин на почвенную среду / М.Л. Шабанов, М.Н. Лысич, Р.В. Мирзеханов // *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика*. 2014. Т. 2, № 3–3(8–3). С. 277–280. DOI 10.12737/4248.
- Свиридов Л.Т. Технологии, машины и оборудование в лесном хозяйстве : учеб. пособие / Л.Т. Свиридов, В.И. Вершинин ; под общ. ред. Л.Т. Свиридова; Воронежская государственная лесотехническая академия. Воронеж : Воронежская государственная лесотехническая академия, 2002. 312 с.

References

- Hu M., Gao T., Dong X.W., Tan Q.T., Yi C., Wu F., Bao A.H. Simulation of soil-tool interaction using smoothed particle hydrodynamics (SPH) // *Soil & Tillage Research*. 2023. Vol. 229. Art. 105671. DOI: 10.1016/j.still.2023.105671 [Sun X., Li N., Chen D., Chen G., Sun C., Shi M., Gao X., Wang K., Hezam I.M. A Forest Fire Prediction Model Based on Cellular Automata and Machine Learning // *IEEE Access*. 2024. Vol. 12. P. 55389–55403. DOI: 10.1109/ACCESS.2024.3389035
- Song W., Ren L., Wang J., Ma Y., Guo Y., Han M., Zhao H. Methods for constructing soil dynamic models under intelligent cultivation: dynamic interaction mechanisms between farming tools with complex structures and soil // *Agriculture*. 2025. Vol. 15, No. 13. Art. 1355. DOI: 10.3390/agriculture15131355 [Charuk A., Gawdzińska K., Dunaj P. Finite element modeling of the dynamic response of plywood // *Materials*. 2024. Vol. 17, No. 17. Art. 4358. DOI: 10.3390/ma17174358.
- Makovkin G.A., Likhacheva S.Yu. Application of FEM to solving problems of solid mechanics // N. Novgorod: Publishing house of NNGASU. 2012.
- Kobeleev N.B., Polovnikov V.A., Devyatkov V.V. Simulation modeling. 2020.
- Wang J., Li X., Feng H., Zhang Y., Sun K. Modeling soilplant-machine dynamics using discrete element method: a review // *Agriculture*. 2023. Vol. 13, No. 5. Art. 1260. DOI: 10.3390/agriculture13051260 [Han J., Shen K., Guo Y., Xiong H., Lin J. Discrete element simulations of flexible ribbon-like particles // *Powder Technology*. 2023. Vol. 429. Art. 118950. DOI: 10.1016/j.powtec.2023.118950.
- Kurbatova N.V., Nasedkin A.V. Finite element modeling in ANSYS, mathematical modeling and computational mathematics, three-dimensional body of non-canonical shape // *Navigator in the world of science and education*. 2017. No. 2. P. 58–58.
- Irodov I.E. Basic laws of mechanics // M. : Vyssh. shk. 1985.
- Nikolaev V.A. Improvement of technical means of soil cultivation. 2010.
- Mazurov B.T. Mathematical modeling in the study of geodynamics. 2019.
- Strogaleva V.P., Tolkacheva I.O. Simulation modeling. 2018.
- Shkurin I.G., Shkurina Yu. A., Sukholentsev A. I. Contact interaction of working bodies with solid particles and their wear during relative movement // *Modern automotive materials and technologies (summit-2017)*. 2017. P. 266–269.

12. Hu M., Gao T., Dong X.W., Tan Q.T., Yi C., Wu F., Bao A.H. Simulation of soil–tool interaction using smoothed particle hydrodynamics (SPH) // *Soil & Tillage Research*. 2023. Vol. 229. Art. 105671. DOI: 10.1016/j.still.2023.105671 [Peltola H., Palander T., Mäkelä A., et al. Precision modeling of fuel consumption to select the most efficient logging method for cut-to-length timber harvesting // *Forests*. 2024. Vol. 16, No. 2. Art. 294. - DOI: 10.3390/f20100294.].
13. Egorov I.E., Litvin L.F. Traditional methods of soil research and modeling // *Erosion and channel processes*. 2010. P. 196–219.
14. Bradley A.C., Jaksa M.B., Kuo Y.L. Ground response of rolling dynamic compaction – a finite element modeling approach // *Frontiers in Built Environment*. 2024. Vol. 9. Art. 1334090. DOI: 10.3389/fbuil.2023.1334090. [Kim I., Seo J., Woo H., Choi B. Assessing Rutting and Soil Compaction Caused by Wood Extraction Using Traditional and Remote Sensing Methods // *Forests*. 2025. Vol. 16, No. 1. Art. 86. DOI: 10.3390/f16010086.
15. Tumanova M.E. Comparative analysis of the solution of the Cauchy problem by the Runge-Kutta method with Euler methods // XXV International Scientific and Practical Conference "Innovative trends of science and practice, tasks and ways to solve them" / *PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES*. 2022. Vol. 28. Pp. 452–456.
16. Bartenev I.M. Rolling of compaction rollers in forest planting machines on a deformable surface / I.M. Bartenev // *Transactions of the All-Union Research Institute of Agroforestry*. Vol. 2 (64). Volgograd: Volgogradskaya Pravda, 1971. Pp. 54–68.
17. Bartenev I.M. Automation of the planting process / I.M. Bartenev // *Polythematic online electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University*. 2012. No. 75. Pp. 384–396.
18. Bartenev I.M. Calculation and design of forestry machines [Text]: textbook. manual / I.M. Bartenev. Voronezh, 2010. 339 p.
19. Shabanov M.L. Impact of furrow-forming and compacting working bodies of forest planting machines on the soil environment / M.L. Shabanov, M.N. Lysych, R.V. Mirzekhanov // *Current areas of scientific research in the 21st century: theory and practice*. 2014. Vol. 2, No. 3–3 (8–3). P. 277–280. DOI 10.12737/4248.
20. Sviridov L.T. Technologies, machines and equipment in forestry: a textbook / L.T. Sviridov, V.I. Vershinin; under the general editorship of L.T. Sviridov; Voronezh State Forest Engineering Academy. Voronezh: Voronezh State Forest Engineering Academy, 2002. 312.