НАУЧНАЯ ДИСКУССИЯ

УДК 531.31; 531.36; 531.44 DOI: 10.18324/2077-5415-2024-3-34-37

Об отсутствии парадокса Пенлеве для тормозной колодки

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
kortavik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X
Статья поступила 06.09.2024, принята 27.09.2024

Данная статья является продолжением публикаций автора о парадоксе Пенлеве. Тормозную колодку ошибочно относят к системам с парадоксом Пенлеве из-за возможности отрицательной реакции со стороны вращающегося диска, — такого в реальности не должно быть. К столь противоречивому результату приходят из-за неполной расчетной схемы, которая принималась за основу при составлении уравнения статики. Считалось невозможным нарушение контакта колодки с вращающимся диском, а направление вращения должно оставаться неизменным. Такой вариант расчетной схемы может соответствовать только обычной колодке — когда ее длина и высота не столь сильно отличаются друг от друга. Неучтенным оказался вариант колодки экстремальных размеров, когда высота существенно больше длины или наоборот. В этом случае колодка может занять равновесное положение только после кратковременного отрыва от диска. А диск либо сразу остановится, либо продолжит вращение в противоположном направлении с последующей остановкой-заклиниванием — что раньше не предусматривалось. Критические геометрические размеры колодки являются главной причиной возникновения значительных по величине моментов трения, приводящих к удару трением. Причем и при обычных, не очень больших значениях коэффициента трения тоже. Именно из-за отсутствия варианта уравнения статики для такого послеударного равновесия получался неправдоподобный результат — отрицательная реакция. Обоснования вышесказанного сделаны при использовании традиционного подхода, когда используется закон Амонтона – Кулона без соблюдения необходимого для этого условия: контактирующие тела должны совершать прямолинейное поступательное движение относительно друг друга. Отсутствие возможности парадокса показано и при новом подходе, когда для корректного применения закона о трении используется метод кинематических зон. Здесь в дополнение к ранее опубликованным результатам сделано уточнение максимального значения силы трения, исправляющее ранее допущенную ошибку. По мнению автора, второй подход будет более обоснованным.

Ключевые слова: сухое трение; закон Амонтона – Кулона; тормозная колодка; парадокс Пенлеве; метод кинематических зон.

On the absence of the Painlevé paradox for the brake pad

V.A. Koronatov

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
kortavik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X
Received 06.09.2024, accepted 27.09.2024

The article presents a continuation of the author's publications on the Painlevé paradox. The brake pad is mistakenly attributed to systems with the Painlevé paradox due to the possibility of a negative reaction from the rotating disc, which doesn't occur in reality. Such a contradictory result is achieved due to an incomplete calculation scheme, which is taken as the basis for the compilation of the static equation. It was considered impossible to break the contact of the pad with the rotating disk, and the direction of rotation should remain unchanged. This version of the design scheme can only correspond to a regular block - when its length and height are not so different from each other. The option of a block of extreme dimensions, when the height is significantly greater than the length or vice versa, was not taken into account. In this case, the pad can take an equilibrium position only after a short separation from the disk. And the disk will either stop immediately or continue to rotate in the opposite direction, followed by stopping and jamming - which was not envisaged before. The critical geometric dimensions of the pad is the main reason for the occurrence of significant friction moments leading to frictional impact. Moreover, even with ordinary, not very large values of the friction coefficient, the same frictional impact occurs. It was precisely because of the absence of a version of the statics equation for such a post-shock equilibrium that an implausible result was obtained - a negative reaction. The justifications for the above were made using the traditional approach, when the Amonton-Coulomb law is used without observing the necessary condition for this: the contacting bodies must perform a rectilinear translational motion relative to each other. The absence of the possibility of paradox is also shown in the new approach, when the method of kinematic zones is used to correctly apply the law of friction. In addition to previously published results, the paper provides a clarification of the maximum value of the friction force, which corrects a previously made error. According to the author, the second approach will be more justified.

Keywords: dry friction; Amonton-Coulomb law; brake pad; Painlevé paradox; kinematic zone method.

Введение. Под парадоксами Пенлеве принято понимать нереальные случаи, которые возникают при использовании закона о трении Амонтона – Кулона при описании механических систем. Под нереальными случаями подразумевают возможность отрицательных значений для сил реакций опор — где они в принципе не должны быть, например, со стороны твердой опоры, либо неоднозначность в определении неизвестных сил, когда равно возможен выбор любого варианта из найденных значений. Впервые на такие системы обратил внимание Пенлеве при подготовке своей книги о трении [1]. Поскольку возникающие трудности, как правило, не поддаются объяснениям законами механики, они вызывают большой интерес и получили название «парадоксы Пенлеве». Вопросы, связанные с решением возникающих парадоксов, играют большую роль для механики. В данной статье уделено внимание одному из таких парадоксов, возникающему при описании работы тормозной колодки [2]. Тормозная колодка — одна из простейших систем, на примере которой можно наглядно демонстрировать возникающие трудности. Предпринята очередная попытка объяснить возникающий парадокс, используя обычный подход — непосредственно применяя закон Амонтона – Кулона [3; 4] и относительно новый, созданный автором — метод кинематических зон [5; 6]. Второй подход, по мнению автора, является более обоснованным, поскольку позволяет применить закон о трении более строго — когда соблюдается необходимое условие закона о трении. Обычный подход здесь будет недостаточно строг, но он интересен тем, что дал возможность учесть влияние динамики процесса на торможение — для такой системы это было не столь очевидным. Ему уделено основное внимание, а метод кинематических зон рассмотрен весьма поверхностно, лишь только для того, чтобы внести поправку в ранее допущенную ошибку. Приведено доказательство обоими методами об отсутствии парадокса Пенлеве для тормозной колодки, об ошибочности его наличия. Следует отметить, что данному вопросу посвящено большое количество работ, в том числе и в солидных научных журналах. В этих работах приведены разные подходы к объяснению парадокса Пенлеве: только уравнением статики — [7], использования гипотезы об ударе трением — [8], с помощью клинового стопора — [9–12], лагранжевого формализма — [13], учета упругих деформаций — [10; 14; 15], экспериментальной проверки — [16], метода кинематических зон — [17; 18], поиска решений сингулярной системы уравнений — [19; 20].

Общепринятая расчетная схема тормозной колодки. На рисунке показана классическая модель тормозной колодки, где приняты следующие обозначения: размеры d, h определяют соответственно место приложения для прижимной силы P и высоту колодки; r, ω — радиус и частота вращения диска, M — момент, заставляющий вращаться диск; N, F – соответственно реакция и сила трения, действующие на колодку. Сила трения ищется согласно закону Амонтона – Кулона по формуле:

$$F = \begin{cases} -f_0 N sign\dot{\omega}, \textit{ при } \dot{\omega} \neq 0; \\ [-F_1; F_1], \textit{ при } \dot{\omega} \equiv 0; \\ \textit{где } F_1 = f_1 N, \end{cases}$$

где коэффициент трения $f = \begin{cases} f_0 sign(\dot{\omega}), \textit{ при } \dot{\omega} \neq 0; \\ [-f_1; f_1], \textit{ при } \dot{\omega} \equiv 0. \end{cases}$

Для дальнейшего введем обозначение безразмерного геометрического параметра: $\lambda = h/d,$ характеризующий размеры прямоугольной колодки.

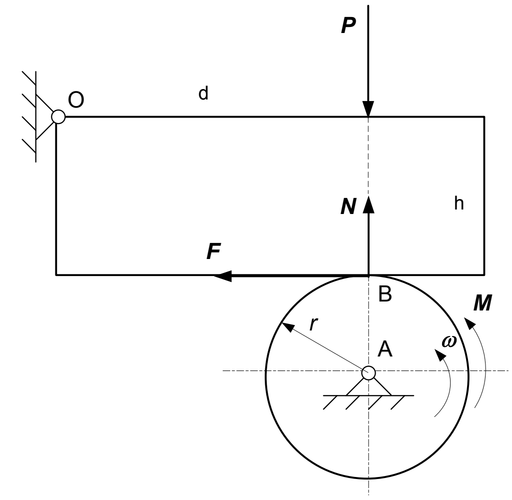

Рис. Классическая модель тормозной колодки

Обычно подразумевается, что размеры колодки мало отличаются друг от друга, тогда величина λ будет не столь велика или мала. Предполагается также, что после прижатия колодки к диску достигается равновесное положение без возможности потери контакта, с сохранением направления вращения. Тогда равновесное положение колодки будет описываться уравнением статики:

$$(N - P) - \lambda f_0 N = 0, \quad (1)$$

из которого следует, что:

$$N = \frac{P}{1 - f_0 \lambda}. \quad (2)$$

Полученное равенство (2) и давало основание усомниться в справедливости закона Амонтона – Кулона, так как при $1 - f_0\lambda < 0$, реакция $N < 0$, что не может соответствовать действительности. Кроме того, возникала неопределенность и при $1 - f_0\lambda = 0$ в определении N. Все это давало повод отнести тормозную колодку к системам с парадоксом Пенлеве. Но это не так, что будет обосновано ниже.

Колодка экстремальных размеров. В дополнение к вышесказанному будем полагать, что колодка может иметь и не столь обычные размеры, когда введенный параметр λ — велик или мал. Для определенности в дальнейшем будем считать, что $\lambda >> 1$, т. е. $h >> d$, когда высота значительно больше размера, определяющего место приложения прижимной силы (длины колодки). Именно в таких случаях равенство (2) может давать противоречивый результат даже при обычных, не столь больших значениях коэффициента трения f_0.

Возможность реакции N принимать отрицательное значение должна означать, что уравнение статики (1) при $1 - f_0\lambda < 0$ выполняться не будет. Колодка при указанных параметрах занять равновесное положение не сможет, что очевидно, и странно, почему на это не обращалось внимания. Такое может наблюдаться в моменты кратковременного нарушения контакта колодки с вращающимся диском во время подпрыгивания — что имеет экспериментальное подтверждение [16]. Это говорит о том, что торможение нельзя считать чисто статическим процессом, что подразумевалось при использовании уравнения статики. Необходимо принимать во внимание и возможную динамику происходящего. Отрыв колодки от диска может возникать при большом значении момента трения в виде удара трением. Когда вращающийся диск как бы натыкается на непреодолимое препятствие, после чего он либо останавливается, либо меняет направление своего вращения на противоположное. В случае остановки вращения сила трения исчезнет, а послеударное условие равновесия для колодки, ранее воспринимаемое как неопределенное при $1 - f_0\lambda = 0$, примет вид: $N - P = 0 \;\Rightarrow\; N = P$. В случае изменения направления вращения диска вследствие удара сила трения, действующая на колодку после восстановления контакта прижатием, в сравнении с тем, что показано на рисунке, изменит свое направление на противоположное. Приведенный рисунок с изменившимся направлением силы трения после удара (он отдельно не показан) следует воспринимать как расширение прежней расчетной схемы, ее дополнение. Уравнение статики для послеударного равновесия колодки примет вид:

$$(N - P) + \lambda f_0 N = 0, \tag{3}$$

из которого следует уже нормальное выражение для определения реакции:

$$N = \frac{P}{1 + f_0\lambda}, \tag{4}$$

что не дает оснований говорить о парадоксе Пенлеве.

Следует заметить, что при таком послеударном равновесии колодки дальнейшее вращение диска может быстро застопориться, если момент от силы сопротивления трением будет больше вращающего момента, т. е. когда $hf_0P/(1 + f_0\lambda) > M$. Возникновение удара трением перед отрывом колодки от вращающегося диска гарантируется большим значением момента от силы трения, который определяется через $hf_0P/(1 - f_0\lambda)$, когда $1 - f_0\lambda << 1$ и $h/(1 - f_0\lambda) >> 1$. Именно геометрический параметр $\lambda >> 1$ будет играть здесь главную роль в случае рассмотрения колодки экстремальных размеров. Коэффициент трения f_0 может иметь обычные небольшие значения. Аналогичные рассуждения можно было привести и для других случаев колодки экстремальных размеров, когда $\lambda << 1$.

Вышесказанное является доказательством отсутствия парадокса Пенлеве для тормозной колодки. А существующее мнение об обратном является следствием неполноты ранее используемой расчетной схемы, когда возможность послеударного равновесного положения колодки не учитывалась. Неучтенная динамика вращающегося диска может вносить свои коррективы, что не принималось во внимание.

Использование метода кинематических зон. Приведенные выше обоснования строились на предположении о справедливости закона Амонтона – Кулона без соблюдения необходимого для этого условия: контактирующие тела должны совершать прямолинейное поступательное движение относительно друг друга. Всякий закон должен использоваться с соблюдением необходимых условий, если таковые имеются. Возможность соблюдения необходимого условия при использовании закона о трении дает метод кинематических зон [17; 18], согласно которому силу трения со стороны диска, который можно воспринимать как буксующее на месте колесо, следует определять по формуле:

$$F = F_0 \frac{r|\omega| + \Delta}{r|\omega|(b+1) + \Delta}, \tag{5}$$

где Δ, b – коэффициенты аппроксимации, которые определяются экспериментально; знак модуля учитывает возможность изменения направления вращения; максимальное значение силы трения определялось как $F_0 = F|_{\omega\equiv 0} = fP$. Последнее было неправильно. F_0 следует искать из условия окончания состояния покоя в момент начала вращения диска. С учетом скачка трения, определяемого через $\varepsilon = f_1 / f_0$, приходим к системе:

$$\begin{cases} \omega \equiv 0,\ f \in [0; f_1],\ F = fN: \\ M - rF = 0. \end{cases} \Rightarrow F_0 = \frac{M}{\varepsilon r}.$$

Тогда из равенства $(N - P) + \lambda F = 0$ следует окончательное выражение для силы трения со стороны диска во время вращения:

$$F = \frac{\lambda M}{\varepsilon r} \frac{r|\omega| + \Delta}{r|\omega|(b+1) + \Delta}, \tag{6}$$

где динамика вращения диска учтена через текущую угловую скорость ω, а знак модуля означает, что направление вращения здесь роли не играет. Искомое выражение реакции будет равно:

$$N = P + \frac{\lambda M}{\varepsilon r} \frac{r|\omega| + \Delta}{r|\omega|(b+1) + \Delta}, \tag{7}$$

исключающее возможность парадокса Пенлеве. Найденные выражения учитывают динамику вращающегося диска, а также показывают возможность удара трением при $\lambda >> 1$.

Заключение. Приведено обоснование отсутствия парадокса Пенлеве для тормозной колодки. Сделано это двумя способами: обычным и новым, использующим метод кинематических зон. Обычным способом показано, что причиной существующего заблуждения о существовании парадокса является неполная расчетная схема, которая давала возможность использовать только один вариант уравнения статики. Влияние динамики процесса на равновесие колодки не предусматривалось, без учета которой мог возникнуть неправильный результат — реакция могла стать отрицательной. Выявлено, что наиболее сильно динамика может проявляться для колодок экстремальных размеров, когда возникают удары трением. Парадокс Пенлеве ранее фиксировался именно для таких случаев.

Для метода кинематических зон приведено уточнение значения максимальной силы трения, а через нее и более правильное использование самого метода. По мнению автора, второй метод более строг и обоснован.

Литература

1. Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. Самсонов В.А. Очерки о механике. Некоторые задачи, явления и парадоксы. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная механика». Ин-т компьютерных исслед., 2001. 80 с.
3. Крагельский И.В., Щедров В.С. Развитие науки о трении. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 234 с.
4. Крагельский И.В. Трение и износ. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во «Машиностроение», 1968. 480 с.
5. Коронатов В.А. О применении закона Кулона при скольжении тел, движущихся не поступательно, и парадоксах Пенлеве // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 4 (44). С. 25-35.
6. Коронатов В.А. О корректном применении закона Кулона при использовании экспериментальных характеристик трения. Аппроксимация кривой Штрибека // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 3 (43). С. 35-43.
7. Андронов А.А., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная механика». Ин-т компьютерных исслед., 2010. 164 с.
8. Самсонов В.А. Динамика тормозной колодки и «удар трением» // Прикладная математика и механика. 2005. Т. 69, № 6. С. 912-921.
9. Журавлев В.Ф. О «парадоксе» тормозной колодки // Доклады Акад. наук. 2017. Т. 474, № 3. С. 301-302.
10. Журавлев В.Ф. Некорректные задачи механики // Вестн. Московского гос. технического ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 2 (113). С. 77-85.
11. Журавлев В.Ф. 500 лет истории закона сухого трения // Вестн. Московского гос. технического ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 2 (53). С. 21-31.
12. Журавлев В.Ф. К истории закона сухого трения // Изв. Рос. акад. наук. Механика твердого тела. 2013. № 4. С. 13-19.
13. Козлов В.В. Трение по Пенлеве и лагранжева механика // Доклады Акад. наук. 2011. Т. 438, № 6. С. 758-761.
14. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Парадоксы Пенлеве и динамика тормозной колодки // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59, № 3. С. 366-375.
15. Досаев М.З., Самсонов В.А. Особенности динамики систем с упругими элементами и сухим трением // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 4. С. 426-435.
16. Иванова Т.Б., Ердакова Н.Н., Караваев Ю.Л. Экспериментальное исследование тормозной колодки // Доклады Акад. наук. 2016. Т. 471, № 4. С. 421-424.
17. Коронатов В.А. Финал парадокса Пенлеве для тормозной колодки // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 2 (42). С. 44-48.
18. Коронатов В.А. Парадоксы Пенлеве для классических механических систем с сухим трением и ключ к их решению // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО' 20): материалы VII Междунар. конф. (7-12 сент. 2020 г.). Улан-Удэ, 2020. С. 121-124.
19. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. К столетию проблемы парадокса Пенлеве // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. № 2. С. 7-33.
20. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. Идеализация, математическое моделирование и парадокс Пенлеве // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. Сер. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. № 2. С. 53-66.

References

1. Penleve P. Lectures on friction. M.: Gostekhizdat, 1954. 316 p.
2. Samsonov V.A. Essays on mechanics: Some problems, phenomena and paradoxes. M.; Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haotichnaya mekhanika». In-t komp'yuternyh issled., 2001. 80 p.
3. Kragel'skij I.V., Shchedrov V.S. The development of the science of friction. M.: Izd-vo AN SSSR, 1956. 234 p.
4. Kragel'skij I.V. Friction and wear. 2-e izd., pererab. i dop. M.: Izd-vo «Mashinostroenie», 1968. 480 p.
5. Koronatov V.A. On the application of Coulomb's law in the sliding of bodies moving non-translationally and the paradoxes of Painlev // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 4 (44). P. 25-35.
6. Koronatov V.A. On the correct application of Coulomb's law when using experimental friction characteristics. Approximation of the Shtribek curve // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 3 (43). P. 35-43.
7. Andronov A.A., Zhuravlev V.F. Dry friction in problems of mechanics. M.; Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haotichnaya mekhanika». In-t komp'yuternyh issled., 2010. 164 p.
8. Samsonov V.A. Dynamics of the brake pad and “friction shock” // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2005. V. 69, № 6. P. 912-921.
9. Zhuravlev V.F. About the "paradox" of the brake pad // Doklady Akad. nauk. 2017. V. 474, № 3. P. 301-302.
10. Zhuravlev V.F. Incorrect problems of mechanics // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Instrument Engineering. 2017. № 2 (113). P. 77-85.
11. Zhuravlev V.F. 500 years of the history of the law of dry friction // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Ser. Series Natural Sciences. 2014. № 2 (53). P. 21-31.
12. Zhuravlev V.F. On the history of the law of dry friction // Mechanics of Solids. 2013. № 4. P. 13-19.
13. Kozlov V.V. Penlev friction and Lagrangian mechanics // Doklady Akad. nauk. 2011. V. 438, № 6. P. 758-761.
14. Nejmark Yu.I., Fufaev N.A. Paradoxes of Penlev and dynamics of brake pads // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1995. V. 59, № 3. P. 366-375.
15. Dosaev M.Z., Samsonov V.A. Features of the dynamics of systems with elastic elements and dry friction // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2021. V. 85, № 4. P. 426-435.
16. Ivanova T.B., Erdakova N.N., Karavaev Yu.L. Experimental study of a brake pad // Doklady Akad. nauk. 2016. V. 471, № 4. P. 421-424.
17. Koronatov V.A. The finale of the Painlevet paradox for the brake pad // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 2 (42). P. 44-48.
18. Koronatov V.A. Painlev's paradoxes for classical mechanical systems with dry friction and the key to their solution // Matematika, ee prilozheniya i matematicheskoe obrazovanie (MPMO\' 20): materialy VII Mezhdunar. konf. (7-12 sent. 2020 g.). Ulan-Ude, 2020. P. 121-124.
19. Nejmark Yu.I., Smirnova V.N. To the centenary of the problem of the Penlev paradox // Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Ser. Mathematical modeling and optimal control. 2001. № 2. P. 7-33.
20. Nejmark Yu.I., Smirnova V.N. Idealization, mathematical modeling and the Penlev paradox // Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Ser. Mathematical modeling and optimal control. 1999. № 2. P. 53-66.