

## ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 534.013; 622.24; 622.23.01

DOI: 10.18324/2077-5415-2024-2-7-13

## Бурильная колонна как цепочка упруго связанных цилиндрических элементов при крутильно-продольных автоколебаниях

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Статья поступила 10.05.2024, принята 17.05.2024

*Предложена дискретная модель бурильной колонны с роторным способом бурения при постоянной силе натяжения каната подвеса. Инерционные и упругие свойства колонны учтены в виде прямолинейной цепочки цилиндрических элементов, связанных между собой пружинами растяжения-сжатия и кручения. Каждый элемент заменяет одну или нескольких бурильных труб, в зависимости от степени приближения к бурильной колонне — как системы с равномерно распределенной инерцией по всей длине. Жесткость пружин определяется упругими свойствами труб, а сами элементы считаются неупругими. Предполагается, что каждый элемент цепочки может перемещаться вдоль оси вертикальной скважины и совершать вращательное движение вокруг этой оси. Ведущая труба бурильной колонны закручивается с постоянной угловой скоростью, а с нижней утяжеленной трубой жестко связано долото, оказывающее дробяще-скалывающее действие на породу в забое при вращении. Для долота сила и момент лобового сопротивления со стороны забоя скважины определяются с учетом нелинейной зависимости от скорости погружения инструмента и потери прочности породы от создаваемого силового воздействия — непрерывного при вращении и импульсивного при возможных ударах. Для долота учитывается возможность возникновения жестких эффектов *stick-slip*, когда его погружение или вращение прерываются микроударами остановок. Описываются крутильно-продольные автоколебания без учета возможности контактов отдельных цилиндрических элементов со стенкой скважины и допускается нарушение контакта долота с забоем скважины, завершающееся ударом. Дан полный алгоритм численного моделирования возникающих автоколебаний для предложенной модели.*

**Ключевые слова:** теория бурения; роторное бурение; бурильная колонна; крутильно-продольные автоколебания; сила лобового сопротивления; эффекты *stick-slip*.

## A drill string as a chain of elastically connected cylindrical elements during torsional-longitudinal self-oscillations

V.A. Koronатов

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Received 10.05.2024, accepted 17.05.2024

*A discrete model of a drill string with a rotary drilling method with a constant tension force of the suspension rope is proposed. The inertial and elastic properties of the column are taken into account in the form of a rectilinear chain of cylindrical elements interconnected by tension-compression and torsion springs. Each element replaces one or more drill pipes, depending on the degree of approximation to the drill string – as a system with evenly distributed inertia along its entire length. The stiffness of the springs is determined by the elastic properties of the pipes, and the elements themselves are considered non-elastic. It is assumed that each element of the chain can move along the axis of the vertical well and make a rotational movement around this axis. The leading pipe of the drill string is twisted at a constant angular velocity, and a chisel is rigidly connected to the lower weighted pipe, which has a crushing and chipping effect on the rock in the face during rotation. For a chisel, the force and moment of drag from the bottom of the well are determined taking into account the nonlinear dependence on the rate of immersion of the tool and the loss of rock strength from the created force action – continuous during rotation, and impulsive with possible impacts. For the chisel, the possibility of hard *stick-slip* effects is taken into account when its immersion or rotation is interrupted by micro-shocks of stops. Torsional-longitudinal self-oscillations are described without taking into account the possibility of contacts of individual cylindrical elements with the wall of the well and a violation of the contact of the bit with the bottom of the well, ending with a blow, is allowed. A complete algorithm for numerical simulation of the arising self-oscillations for the proposed model is given.*

**Keywords:** drilling theory; rotary drilling; drill string; torsional-longitudinal self-oscillations; drag force; *stick-slip* effects.

**Введение.** Моделировать процесс погружения буровой колонны (БК) раньше не удавалось. Что, по мнению автора, является следствием неверного подхода к определению силы лобового сопротивления, действующей на долото со стороны забоя скважины [1; 2]. Наблюдения показывают, что при погружении твердого тела сопротивление, оказываемое со стороны более прочной среды, будет сильнее, чем со стороны менее прочной, при всех прочих равных условиях. Если на породу оказывать достаточно сильное силовое воздействие, приводящее к потере ее первоначальной прочности, то сила лобового сопротивления станет уменьшаться. Ранее используемые силы не учитывают этого. Обычно принимается во внимание лишь зависимость от скорости погружения тела в виде квадратичного закона [3], как это делается в воздушных средах. Лобовое сопротивление часто заменяют силой сухого бокового трения [4; 5], что позволяло моделировать эффекты *stick-slip* — прерывистые движения долота, но также без учета погружения БК. Попытки учесть данные промышленной практики [5–8] о прямой пропорциональной зависимости от скорости погружения и обратной — от угловой скорости вращения долота оказались тоже неудачными. Стандартный вид такой зависимости приводит к физическим и математическим некорректностям вблизи нулевого значения у этих скоростей. Что не давало возможности моделировать низкочастотные колебания БК, а также переходные режимы бурения и *stick-slip*-эффекты. А изучение, например, эффектов *stick-slip*, крайне нежелательных в промышленной практике, в настоящее время весьма актуально [9–15]. При моделировании процессов бурения сложилась практика, когда погружение БК вообще не учитывается. Учесть погружение БК удавалось для безостановочных режимов бурения только с помощью эмпирических соотношений [5; 6; 16–19].

Использование эмпирических соотношений не позволяет надеяться на приемлемую точность проводимых расчетов и соблюдение необходимой строгости в математическом описании процессов бурения. В работах автора [1; 2; 20; 21] для перехода к более точному моделированию процесса бурения предложено использовать следующие принципы, которые приводятся ниже с краткими комментариями, выделенными курсивом:

1. Потерю прочности породы при силовом воздействии следует ожидать в результате образования микро- и макротрещин, нарушающих ее целостность. Снижение прочности породы обычно проявляется ростом числа и размеров таких трещин, затухающих по мере удаления от места силового воздействия. *Указанное является хорошо известным фактом, но при расчетах учет появления трещин вызывал трудности из-за непредсказуемости места, размеров и формы их образования и отсутствия количественной оценки их влияния на прочность.*

2. Силовое воздействие долота на прочность породы предложено определять не напрямую, а косвенно, через такие кинематические величины: угловую скорость — при непрерывном действии вращающегося долота и начальную скорость ударов —

при импульсивном действии. Эти кинематические величины считаются прямо пропорциональными указанным силовым действиям. *Влияние непрерывного или импульсивного силового воздействия на изменение прочности грунта ранее не обсуждалось и не принималось во внимание. Для их определения в механике каких-либо методов не предлагается.*

3. Силу лобового сопротивления следует определять с учетом степени силового воздействия на прочность грунта, а не только в зависимости от скорости погружения, как это делалось ранее. Чем прочнее грунт, тем больше будет сила лобового сопротивления при всех других равных условиях. *Существующая классическая квадратичная зависимость силы сопротивления от скорости погружения для этого не приспособлена и не позволяет это делать.*

4. Аналитическое выражение для силы лобового сопротивления следует выбирать в ином виде, отличном от ранее используемой квадратичной зависимости от скорости. Например, в виде аппроксимации Паде 1-й степени от скорости погружения и кинематических величин, характеризующих силовое действие долота. *Аппроксимация Паде, в отличие от других ранее используемых аналитических выражений, позволяет учесть динамику изменения прочностных свойств среды при силовом действии на нее — что удается делать не напрямую, а косвенно.*

5. Возможность начала погружения долота или его отсутствие можно определять через сравнение предельно допустимого динамического напряжения породы с обычным, возникающим в близлежащей области воздействия. *Это позволяет определить критическую угловую скорость долота и ввести эталонный удар, сравнение с которым определяет возможность или невозможность погружения долота в грунт.*

Указанные принципы были введены и опробованы в работах автора на введенных одно- [20] двухмассовых [1; 2] моделях БК при изучении крутильных и крутильно-продольных автоколебаний, возникающих при роторном и ударно-вращательном бурении. На них было показано моделирование процесса бурения с возможностью кратковременных заклиниваний вращательного и поступательного движения долота — *stick-slip*-эффектами. На таких упрощенных моделях БК впервые было показано возникновение хаотичных режимов бурения, представляющих наглядные примеры проявления детерминированного хаоса.

В работе дано обобщение ранее введенной модели БК [1; 2] для описания крутильно-продольных автоколебаний. В введенной модели принимается во внимание масса не только двух труб БК — обыкновенной верхней и нижней утяжеленной, но и остальных тоже. Учтено распределение массы по всей длине БК. Делается это с помощью дискретного моделирования, когда БК заменяется на однородную цепочку жестких массивных элементов, упруго связанных друг с другом. Описание возникающих колебаний БК в этом случае сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет для проведения численных расчетов использовать стандартные компьютерные программы.

Они в настоящее время развиты достаточно хорошо, в том числе и для случаев со сложными граничными условиями. Если БК считать непрерывно-распределенной системой, что является более правильным подходом, то ее описание свелось бы к рассмотрению системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Существующие методы нахождения решений для таких уравнений в настоящее время развиты далеко не так хорошо, как хотелось бы. Что создает трудности в их применении.

Кроме того, уточнено, что возникающие *stick-slip*-эффекты могут носить только жесткий характер, когда вращение или погружение долота заканчиваются микроударами остановок. А сами такие микроудары, наряду с обычными ударами долота о забой скважины, могут влиять на потерю прочности грунта. Это было принято во внимание при нахождении лобового сопротивления.

**Описание модели.** БК (см. рисунок) разобьем на элементы, каждый из которых будет представлять заданное число последовательно соединенных между собой бурильных труб, выбор числа которых определяет степень приближения к исходной распределенной системе. Считается, что вся масса  $m$  каждого такого элемента сосредоточена в верхней его части — заштрихованные тела в виде абсолютно твердых полых цилиндров пренебрежимо малой длины с осевым моментом инерции  $I$ ; остальная часть элементов считается невесомой и упругой, подобная пружинам, учитывающим возникающие деформации кручения и растяжения-сжатия с жесткостями соответственно  $c_\varphi$  и  $c_x$ . Общая длина недеформированного элемента принимается равной  $L$ . Положение  $i$ -го элемента устанавливается через координаты  $\varphi_i, x_i$ , определяющие для верхнего сечения соответственно угол поворота и положение его центра относительно устья скважины на оси, направленной вниз по вертикали ( $i = 1 \div n$ , где  $n$  — число массивных элементов цепочки).

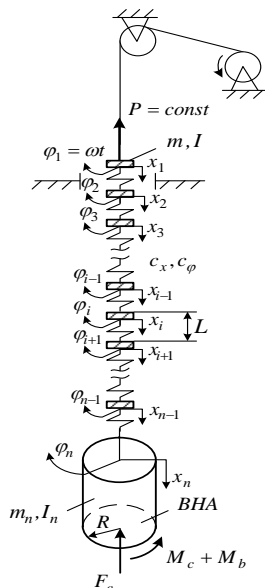


Рис. Модель бурильной колонны в виде цепочки труб

Верхний полый цилиндр первого такого элемента закручивается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , и на него действует постоянная сила подвеса  $P$ , необходимая для частичной разгрузки веса колонны. В самом низу БК имеется  $n$ -й элемент с утяжеленными бурильными трубами — ВНА, который, в отличие от других элементов, считается абсолютно жестким (на рисунке цилиндр радиуса  $R$ ). Для такого более массивного элемента масса равна  $m_n$ , а осевой момент инерции —  $I_n$ , отличные от аналогичных параметров обыкновенных бурильных труб. С утяжеленной бурильной трубой жестко связано долото радиуса  $R$  дробяще-скалывающего действия, на которое со стороны породы в забое скважины действует сила лобового сопротивления [1; 2; 21]:

$$F_c = F_0 \frac{\dot{x}_n + \Delta}{\dot{x}_n + bR|\dot{\varphi}_n| + b_1 u_- e^{-\vartheta(x_n - x_{**})} + \Delta}. \quad (1)$$

Здесь учитывается потеря прочности породы от возможных микроударов остановки долота в погружении или вращении, а также и от обычных ударов БК при завершении возможных кратковременных отрывов долота от поверхности забоя. Были приняты такие обозначения:  $F_0$  — максимальное значение силы, подлежащей определению;  $b, b_1, a, \Delta$  — коэффициенты аппроксимации, которые находятся экспериментально, где первые три из них пропорциональны потере прочности породы в продольном направлении в результате образования трещин соответственно от непрерывного и импульсивного силового воздействия (предполагается, что  $b_1 = b/a$ );  $\vartheta$  — коэффициент затухания, характеризующий быстроту восстановления прочностных свойств грунта по мере удаления от места удара;  $x_n, \varphi_n$  — соответственно продольная координата и угол поворота, определяющие положение долота;  $\langle \cdot \rangle$  точкой обозначается дифференцирование по времени  $t$ . Заметим, что формула (1) выражает прямую пропорциональную зависимость от скорости погружения  $\dot{x}_n$  и обратную — от угловой скорости вращения  $\dot{\varphi}_n$  долота, что соответствует экспериментальным и данным промышленной практики [5–8]. В формуле (1) учтена также сила комбинированного удара [21], которая считается прямо пропорциональной его обобщенной начальной скорости  $u_- = \dot{x}_{n-} + aR|\dot{\varphi}_{n-}|$ , где  $\dot{x}_{n-} = \dot{x}_n$ ;  $\dot{\varphi}_{n-} = \dot{\varphi}_n$  — начальные скорости составляющих комбинированного удара, соответственно, прямого и вращательного, определяемые через текущие скорости  $\dot{x}_n, \dot{\varphi}_n$  в момент нанесения ударов. Знак модуля означает, что разные направления как вращения долота, так и вращательной составляющей удара не будут приводить к отличиям в образовании трещин, уменьшающих прочность породы. При отсутствии ударов следует принять, что  $\dot{x}_{n-} \equiv 0$ ;  $\dot{\varphi}_{n-} \equiv 0$ . Функция  $\exp[-\vartheta(x_n - x_{**})]$  определяет

предполагаемый закон затухания силы удара при удалении от места удара, где  $x_{**}$  — координата, определяющая глубину, на которой происходит последний удар породоразрушающего инструмента о забой: либо вследствие микроудара остановки в погружении ( $x_n = x_{**}$ ) или вращения долота [21], либо при восстановлении контакта после кратковременного отрыва долота от поверхности породы. В формуле (1) учитывается только последний из возможных ударов, предполагая быстрое затухание трещин, когда  $\vartheta \gg 1$ .

В забое скважины, кроме силы лобового сопротивления  $F_c$ , возникает момент вращения  $M_c$ , который определяется согласно закону Кулона:  $M_c = -\rho F_c$ , где  $\rho$  — удельный коэффициент момента вращения на единицу давления в забое:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \text{sign} \dot{\varphi}_n, & \text{if } \dot{\varphi}_n \neq 0; \\ [-\rho_1, \rho_1], & \text{if } \dot{\varphi}_n \equiv 0, (\epsilon_\rho = \rho_1 / \rho_0 \geq 1) \end{cases}$$

Влияние промывочной жидкости на работу долота учитывается моментом вязкого сопротивления:  $M_b = -\mu \dot{\varphi}_n$ , где  $\mu$  — коэффициент вязкого

сопротивления. На каждый  $i$ -й элемент цепочки со стороны упругой части БК — пружин растяжения-сжатия и кручения передаются нелинейные продольная сила

$$-c_x(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1} - 2L) \left[ 1 + c_1(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1} - 2L)^2 \right]$$

и момент кручения:

$$-c_\varphi(2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1}) \left[ 1 + c_2(2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1})^2 \right],$$

где  $c_1, c_2$  — поправочные коэффициенты для учета нелинейных составляющих деформаций растяжения-сжатия и кручения. Силы трения о стенки скважины для принимаемой модели отсутствуют, так как скважина и БК задаются прямолинейной формы, а действие указанных сил не способствует изменению этого.

**Уравнения движения для введенной модели.** Крутильно-продольные колебания цепочки элементов БК (см. рисунок) будут описываться следующей системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\varphi}_1 = 0; \\ m\ddot{x}_1 = mg - c_x(x_1 - x_2 - L) \left[ 1 + c_1(x_1 - x_2 - L)^2 \right]; \\ I\ddot{\varphi}_2 = -c_\varphi(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3) \left[ 1 + c_2(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3)^2 \right]; \\ m\ddot{x}_2 = mg - c_x(2x_2 - x_1 - x_3 - 2L) \left[ 1 + c_1(2x_2 - x_1 - x_3 - 2L)^2 \right]; \\ \dots \dots \dots \\ I\ddot{\varphi}_i = -c_\varphi(2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1}) \left[ 1 + c_2(2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1})^2 \right]; \\ m\ddot{x}_i = mg - c_x(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1} - 2L) \left[ 1 + c_1(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1} - 2L)^2 \right]; \\ \dots \dots \dots \\ I\ddot{\varphi}_{n-1} = -c_\varphi(2\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2} - \varphi_n) \left[ 1 + c_2(2\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2} - \varphi_n)^2 \right]; \\ m\ddot{x}_{n-1} = mg - c_x(2x_{n-1} - x_{n-2} - x_n - 2L) \left[ 1 + c_1(2x_{n-1} - x_{n-2} - x_n - 2L)^2 \right]; \\ \text{if } x_n \geq x_{**} : \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}_n \equiv 0 : |\varphi_n - \varphi_{n-1}| \left[ 1 + c_2(\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 \right] < \rho_1 m_n g \begin{cases} f(t), & \text{if } \dot{x}_n \equiv 0; \\ \frac{n_1}{k_\pi}, & \text{if } \dot{x}_n > 0. \end{cases} \\ \dot{\varphi}_n \neq 0; \dot{x}_n + aR|\dot{\varphi}_n| > u_{-\pi} : I_n \ddot{\varphi}_n = -c_\varphi(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \left[ 1 + c_2(\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 \right] - \\ \mu \dot{\varphi}_n - \rho_0 m_n g \text{sign} \dot{\varphi}_n \begin{cases} f(t), & \text{if } \dot{x} \equiv 0; \\ n_1 G(t), & \text{if } \dot{x} > 0; \end{cases} \\ \dot{x}_n \equiv 0 : |\dot{\varphi}_n| \leq \frac{\Delta}{bR} \left[ \frac{n_1}{f(t)} - 1 - \frac{b_1}{\Delta} u_- \right], \text{if } u_- \leq u_{-*}; \\ \dot{x}_n > 0; \dot{x}_n + aR|\dot{\varphi}_n| > u_{-*} : \ddot{x}_n = g[f(t) - n_1 G(t)]; \end{array} \right. \\ \text{if } x_n < x_{**} : \left\{ \begin{array}{l} I_n \ddot{\varphi}_n = -c_\varphi(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \left[ 1 + c_2(\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 \right] - \mu \dot{\varphi}_n; \\ \ddot{x}_n = gf(t). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2)$$

По аналогии с работами [1; 2; 21], здесь принимаются такие обозначения:

$$f(t) = 1 - \frac{c_x}{m_n g} (x_n - x_{n-1} - L) \left[ 1 + c_1(x_n - x_{n-1} - L)^2 \right];$$

$$G(t) = \frac{\dot{x}_n + \Delta}{\dot{x}_n + bR|\dot{\phi}_n| + b_1 u_- e^{-\vartheta(x_n - x_{**})} + \Delta};$$

$$k = 1 + \frac{bR}{\Delta}|\dot{\phi}_n| + \frac{b_1}{\Delta} u_- e^{-\vartheta(x_n - x_{**})};$$

$$k_\pi = \frac{b_1}{\dot{x}_n + \Delta} u_{-\pi} + 1,$$

где  $f(t)$  — функция влияния, используемая для определения силы осевого давления на долото;  $G(t)$  — переменная часть для силы лобового сопротивления в формуле (1);  $k$  — коэффициент динамичности на погружение, определяющий меру силового воздействия на породу в забое;  $k_\pi$  — предельное значение коэффициента динамичности на верчение. Предположение о затухании силы удара по закону  $\exp[-\vartheta(x_n - x_{**})]$  скажется на определении критических начальных обобщенных скоростей, характеризующих эталонные удары на погружение и вращение:

$$u_{-*} = \frac{\Delta}{b_1} \left[ \frac{n_1}{f(t)} - 1 \right] e^{-\vartheta(x_n - x_{**})};$$

$$u_{-\pi} = \frac{\dot{x}_n + \Delta}{b_1} \times$$

$$\left\{ \frac{n_{\tau 1}(1 + c_2)}{(\phi_n - \phi_{n-1})[1 + c_2(\phi_n - \phi_{n-1})^2]} - 1 \right\} e^{-\vartheta(x_n - x_{**})},$$

здесь  $u_{-*}, u_{-\pi}$  — критические значения начальных обобщенных скоростей комбинированного удара долота соответственно на погружение и вращение, превышение которых приводит к началу внедрения инструмента по нормали к поверхности забоя или в касательном направлении;  $n_{\tau 1} = \tau_1 / \tau_0$  — запас прочности породы по касательным напряжениям;  $\tau_1$  — предельно допустимое касательное напряжение;  $\tau_0$  — эталонное касательное напряжение, которое возникает в контрольной точке на расстоянии  $R$  от оси вращения при необходимости поворота долота на угол в один радиан. Кроме того, как и ранее [1; 2], считается:  $r = 1 - P/(mg)$ ;  $n_1 = \sigma_1 / \sigma_0$  — запас прочности грунта от действия силы тяжести трубы ВНА, где  $\sigma_1$  — предельно допустимое нормальное напряжение грунта;  $\sigma_0 = m_n g / S$ , где  $S$  — усредненная площадь пятна контакта долота с породой.

В сравнении с работой [21], уточнены условия отсутствия погружения долота:

$$\dot{x}_n \equiv 0 : |\dot{\phi}_n| \leq \frac{\Delta}{bR} \left[ \frac{n_1}{f(t)} - 1 - \frac{b_1}{\Delta} u_- \right], \text{ if } u_- \leq u_{-*},$$

что было необходимо для описания завершения возможного отрыва БК от породы в забое, а также в случаях жесткой остановки, возникающих при *stick-slip*-эффектах в виде микроударов, при нанесении эталонного удара  $u_- = u_{-*}$ , когда  $x_n = x_{**}$ . После

микроударов остановки прекращение погружения может наблюдаться только для не вращающегося долота ( $|\dot{\phi}_n| \equiv 0$ ), а для вращающегося — будет наблюдаться лишь мгновенная остановка.

Кроме того, учтено, что условием погружения долота в породу будет  $\dot{x}_n + aR|\dot{\phi}_n| > u_{-*}$ , а условием вращения — выполнение неравенства  $\dot{x}_n + aR|\dot{\phi}_n| > u_{-\pi}$ , т. е. чтобы действие возможного микроудара остановки на грунт было сильнее соответствующего эталонного удара с учетом затухания трещин от ранее нанесенного микроудара.

В записанной системе уравнений первая нижняя подсистема при  $x_n > x_{**}$  определяет взаимодействие долота с породой при наличии контакта; вторая подсистема при  $x_n \leq x_{**}$  — состояние отрыва долота от забоя. Вторая подсистема необходима для определения начальных скоростей для составляющих комбинированного удара  $\dot{x}_{n-} = \dot{x}|_{x_n=x_{**}}$ ;  $\dot{\phi}_{n-} = \dot{\phi}|_{x_n=x_{**}}$  в формуле (1) при возобновлении контакта долота с породой после его отрыва.

Начальные условия при моделировании начала процесса погружения БК можно принять, выбрав начало координат в устье скважины, такими:

$$\Phi_{10} = 0; \Phi_{20} = 0; \dots \Phi_{i0} = 0; \dots \Phi_{n0} = 0; \quad x_{10} = -L; x_{20} = 0;$$

$$\dots x_{i0} = (i - 2)L; \dots x_{n0} = (n - 2)L;$$

$$\dot{\phi}_{10} = \omega; \dot{\phi}_{20} = 0; \dots \dot{\phi}_{i0} = 0; \dots \dot{\phi}_{n0} = 0; \quad \dot{x}_{10} = 0; \dot{x}_{20} = 0;$$

$$\dots \dot{x}_{i0} = 0; \dots \dot{x}_{n0} = 0.$$

Теорема импульсов для составляющих комбинированного удара в момент соприкосновения долота с грунтом забоя, когда  $x_n = x_{**}$ , а также связь между нормальным  $S_n$  и касательным  $S_\tau$  ударными импульсами в соответствии с гипотезой Рауса приводят к незамкнутой системе уравнений:

$$\begin{cases} m_n \dot{x}_{n0} - m_n \dot{x}_{n-} = S_n; \\ I_n \dot{\phi}_{n0} - I_n \dot{\phi}_{n-} = S_\tau; \\ S_\tau = \rho S_n. \end{cases} \quad (3)$$

Чтобы замкнуть систему для определения начальных скоростей  $\dot{x}_{n0}, \dot{\phi}_{n0}$  после каждого нового удара возможного отрыва долота от породы в забое, необходимо использовать дополнительное равенство, определяющее начальную обобщенную скорость погружения долота в послеударном движении [21]:

$$\dot{x}_{n0} + aR|\dot{\phi}_{n0}| = \dot{x}_{n-} + aR\dot{\phi}_{n-} - u_{-*}. \quad (4)$$

Сравнение текущих ударов с эталонным позволяет устанавливать, когда долото начнет погружаться в грунт, а когда — нет. В первом случае должно:

$$(\dot{x}_{n-} + aR|\dot{\phi}_{n-}|) > u_{-*}, \text{ а во втором: } (\dot{x}_{n-} + aR|\dot{\phi}_{n-}|) \leq u_{-*}.$$

Приняв обозначение  $q = m_n / I_n$  и решая систему уравнений (3) совместно с уравнением (4), согласно

полученным результатам в [21; 22] находим значения  $\dot{x}_{n0}, \dot{\phi}_{n0}$ :

$$a) \dot{x}_{n0} = \dot{x}_{n-} - \frac{u_{-*}}{1 + \rho_0 Raq}; \dot{\phi}_{n0} = |\dot{\phi}_{n-}| - \frac{\rho_0 q u_{-*}}{1 + \rho_0 Raq},$$

$$\text{если } \dot{x}_{n-} > \frac{u_{-*}}{1 + \rho_0 Raq}; |\dot{\phi}_{n-}| > \frac{\rho_0 q u_{-*}}{1 + \rho_0 Raq}.$$

$$b) \dot{x}_{n0} = 0; \dot{\phi}_{n0} = |\dot{\phi}_{n-}| - \rho_0 q \dot{x}_{n-},$$

$$\text{если } \dot{x}_{n-} \leq \frac{u_{-*}}{1 + \rho_0 Raq}; |\dot{\phi}_{n-}| > \frac{\rho_0 q u_{-*}}{1 + \rho_0 Raq}.$$

$$c) \dot{x}_{n0} = \dot{x}_{n-} + aR|\dot{\phi}_{n-}| - u_{-*}; \dot{\phi}_{n0} = 0,$$

$$\text{когда } \dot{x}_{n-} > \frac{u_{-*}}{1 + \rho_1 Raq}; |\dot{\phi}_{n-}| \leq \frac{\rho_1 q u_{-*}}{1 + \rho_1 Raq}.$$

$$d) \dot{x}_{n0} = 0; \dot{\phi}_{n0} = 0,$$

$$\text{когда } \dot{x}_{n-} \leq \frac{u_{-*}}{1 + \rho_1 Raq}; |\dot{\phi}_{n-}| \leq \frac{\rho_1 q u_{-*}}{1 + \rho_1 Raq}.$$

Начальная угловая скорость долота после микроудара остановки погружения ( $\dot{x}_n = 0$ ), согласно [21; 22], определяется так:

$$a) \dot{\phi}_{n0} = \dot{\phi}_{**} - \rho_0 q \dot{x}_{**} - u_{-*},$$

$$\text{если } \dot{x}_{**} \leq \frac{1}{1 + \rho_0 Raq} u_{-*}; \dot{\phi}_{**} > \frac{\rho_0 q}{1 + \rho_0 Raq} u_{-*}.$$

$$b) \dot{\phi}_{n0} = 0,$$

$$\text{если } \dot{x}_{**} \leq \frac{1}{1 + \rho_1 Raq} u_{-*}; \dot{\phi}_{**} \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 Raq} u_{-*}.$$

Начальная скорость погружения долота после микроудара остановки вращения ( $\dot{\phi}_n = 0$ ) определяется так:

$$a) \dot{x}_{n0} = \dot{x}_{**} + aR\dot{\phi}_{**} - u_{-\pi},$$

$$\text{если } \dot{x}_{**} > \frac{1}{1 + \rho_1 Raq} u_{-\pi}; \dot{\phi}_{**} \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 Raq} u_{-\pi}.$$

$$b) \dot{x}_{n0} = 0,$$

$$\text{если } \dot{x}_{**} \leq \frac{1}{1 + \rho_1 Raq} u_{-\pi}; \dot{\phi}_{**} \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 Raq} u_{-\pi}.$$

В итоге можно полностью описать послееударное состояние БК в целом как цепочки элементов, и в

частности, отдельно самого долота. Необходимые для этого начальные условия для системы уравнений (2) найдены, что дает возможность проводить численное моделирование работы БК в процессе погружения.

**Заключение.** Предложенная модель БК позволяет:

1. Учесть распределение инерции по длине колонны в виде цепочки массивных цилиндрических элементов с упругими связями — что делается впервые при учете погружения.

2. Математическое описание свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений — что существенно облегчает изучение динамических процессов в сравнении с системой уравнений в частных производных.

3. Для долота моменты возможных кратковременных остановок погружения и вращения фиксируются в жестком режиме — в виде микроударов остановок, что является характерным для грунтов. А возникающие *stick-slip*-эффекты будут жесткими. Такое уточнение описания *stick-slip*-эффектов тоже делается впервые.

4. При определении силы лобового сопротивления долота со стороны породы впервые учитывается потеря прочности от возможных микроударов остановок долота в погружении и вращении.

5. Уточнены критические значения для начальных обобщенных скоростей эталонных ударов долота на погружение и вращение, а через них и условия переключения режимов погружения и вращения при работе породоразрушающего инструмента.

К недостаткам принятой модели следует отнести следующее:

1. Модель не позволяет учитывать возможности контакта отдельных бурильных труб со стенкой скважины.

2. Модель не способна учесть влияние бокового трения, а, значит, и степень разгрузки осевого давления БК на долото.

3. Сведение распределенной системы к дискретной снижает точность проводимых расчетов.

Приведенная модель еще далека от реальных случаев бурения. Результаты численного моделирования носили бы чисто иллюстративный характер, поэтому они здесь не приводятся.

Данная работа является одной из первых работ автора перехода к моделям БК как системы с распределенными параметрами с учетом погружения. И где принимаются во внимание микроудары остановок в погружении и вращении долота, уточняющие динамические процессы для породоразрушающего инструмента в грунтовых средах и возникающие режимы бурения.

#### Литература

1. Koronotov V.A. Axial-torsional vibrations of drill strings with crush-and-shear hybrid bits at constant tension of suspension cables // Journal of Mining Science. 2023. V. 59, № 1. P. 39-52.
2. Коронатов В.А. Крутильно-продольные автоколебания бурильной колонны с долотом дробяще-скалывающего действия при постоянном натяжении каната подвеса //

Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2023. № 1. С. 45-60.

3. Сагомоян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
4. Белокобыльский С.В., Ветюков М.М., Нагаев Р.Ф. О фрикционных автоколебаниях бурильной колонны // Изв. АН СССР. Машиноведение. 1982. № 2. С. 15-20.
5. Белокобыльский С.В. Динамика систем с сухим трением и ее приложение к задачам горной механики. М.: Машиностроение, 2002. 209 с.

