

## Бурильная колонна как цепочка упруго связанных цилиндрических элементов при крутильных автоколебаниях с жесткими эффектами *stick-slip*

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Статья поступила 28.11.2023, принята 10.02.2024

*Бурильная колонна моделируется цепочкой цилиндрических элементов, имеющих упругие связи кручения с кубической нелинейностью. Каждый элемент состоит из одной или нескольких бурильных труб, в зависимости от степени приближения к распределенной системе. Уточнены условия, определяющие начало погружения или остановки вращающегося долота в грунтовой среде. Отрицается правомерность существующих попыток использования аналогий с воздушными средами при нахождении силы лобового сопротивления. Они не позволяют моделировать сам процесс погружения из-за возникающих некорректностей физического и математического характера, исключают жесткий характер остановок долота в виде микроударов. Для избегания этого аналитический вид классических выражений силы лобового сопротивления заменяется аппроксимацией Паде 1-й степени от скорости погружения. Это позволяет учесть влияние силового воздействия на уменьшение прочности грунта, что для рассматриваемых задач является обязательным. Делается это на основании предположения, что силовое воздействие будет прямо пропорционально угловой скорости долота при непрерывном воздействии и начальной скорости микроударов в моменты кратковременных остановок долота. Уточнены причины возникновения и режимы эффектов *stick-slip* в механике. Они могут вызываться не только сухим трением при скольжении тел, как это принято считать, но и силой лобового сопротивления долота при бурении грунтовых сред с учетом изменения их прочности. Могут наблюдаться как мягкие режимы, когда скорость уменьшается до нуля непрерывно, так и жесткие, когда погружение или вращение долота заканчиваются пластическим или упругим микроударом, приводящим к изменению скорости скачком. При скольжении тел с гладкими поверхностями возникают мягкие режимы эффектов *stick-slip*, а при бурении — жесткие. Жесткие режимы возможны и при скольжении тел с не столь гладкими поверхностями, когда влияние введенной фронтальной силы сопротивления — поверхностного аналога лобового сопротивления на передней границе пятна контакта — достигает макроуровня.*

**Ключевые слова:** теория бурения; бурильная колонна; крутильные автоколебания; сила лобового сопротивления; жесткие остановки в грунтах; эффекты *stick-slip*.

## Drill string as a chain of elastically connected cylindrical elements with torsional self-oscillations with rigid *stick-slip* effects

V.A. Koronotov

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Received 28.11.2023, accepted 10.02.2024

*The drill string is modeled by a chain of cylindrical elements having elastic torsion bonds with cubic nonlinearity. Each element consists of one or more drill pipes, depending on the degree of approximation to a distributed system. The conditions determining the beginning of immersion or stopping of a rotating chisel in ground media are clarified. The validity of existing attempts to use analogies with air environments in finding the drag force is denied. These attempts do not allow simulating the diving process itself due to emerging physical and mathematical inaccuracies, and exclude the harsh nature of chisel stops in the form of micro-impacts. To avoid this, the analytical form of the classical expressions for the drag force is replaced by the 1st degree Padé approximation of the sinking speed. This makes it possible to take into account the influence of force on the reduction in soil strength, which is mandatory for the problems under consideration. This is done on the basis of the assumption that the force effect will be directly proportional to the angular velocity of the chisel – with continuous impact, and the initial velocity of micro-impacts – at the moments of short-term stops of the chisel. The causes and modes of “stick-slip” effects in mechanics are clarified. They can be caused not only by dry friction when sliding bodies, as is commonly believed, but also by the force of the drag of the bit when drilling ground media, taking into account changes in their strength. Both soft modes can be observed, when the speed decreases to zero continuously, and hard modes – when the immersion or rotation of the bit ends with a plastic or elastic microstroke, leading to a change in speed by a jump. When sliding bodies with smooth surfaces, soft modes of “stick-slip” effects occur, and when drilling, they are hard. Rigid modes are also possible when sliding bodies with not so smooth surfaces, when the influence of the introduced frontal drag force – the surface analogue of drag at the front boundary of the contact spot, reaches the macro level.*

**Keywords:** drilling theory; drill string; torsional self-oscillations; drag force; hard stops in the ground; *stick-slip* effects.

**Введение.** До недавнего времени при моделировании ведения буровых работ возникали трудности в воспроизведении самого процесса погружения бурильной колонны (БК) при углублении забоя скважины и нахождении моментов возможных остановок-заклиниваний в работе долота [1–6]. Для решения этих вопросов пытались использовать аналогию движения твердого тела в воздушных средах. Силу лобового сопротивления со стороны грунтовых сред искали в одном из привычных аналитических выражений, используемых в механике для похожих задач, а момент остановки погружения или вращения долота искали только в мягком режиме, когда текущая скорость обращалась в ноль, непрерывно уменьшаясь [3–8]. Но такая аналогия имеет существенный недостаток: для грунтовых сред или горных пород (в дальнейшем — грунта) не учитывается их прочность. Причем как статическая, так и динамическая, учитывающая изменение прочности грунта от текущего силового воздействия на него. Как следует определять само силовое воздействие на грунт, тоже было непонятно, стереомеханическая теория удара ответа на это не дает. Именно из-за перечисленных здесь причин, по мнению автора, и возникали трудности в моделировании процессов бурения.

Наблюдения показывают, что если оказывать непрерывное силовое действие на грунт за счет воздействия вращающимся долотом или импульсивное — при нанесении ударов, — то можно добиться погружения БК. Это говорит об уменьшении лобового сопротивления за счет снижения прочности опорной среды в результате оказанного силового воздействия. Чтобы это учесть, предложено вводить силу лобового сопротивления в виде аппроксимации Паде 1-й степени от скорости погружения и кинематических величин, косвенно определяющих меру силового воздействия [8]. Эти кинематические величины считаются прямо пропорциональными соответствующим силовым действиям на грунт. Для непрерывного действия это угловая скорость долота, а для импульсивного — начальная скорость ударов. Кроме того, замечено, что в грунтовых средах остановка погружения или вращения твердого тела происходят в жестком режиме, заканчиваясь микроударами остановки. Это объясняется тем, что при снижении силового воздействия перед движущимся телом в конце погружения возникает непреодолимый слой грунта [9], который сохраняет свою прочность, близкую к первоначальной. А на поверхности забоя могут возникать выступы (неровности), прочность которых еще достаточна для создания сопротивления вращению долота.

Скорость погружения или вращения долота будут принимать нулевое значение не непрерывно уменьшаясь, а скачком [9] — что тоже можно учесть при новом аналитическом виде для силы лобового сопротивления. Само силовое воздействие на грунт — и непрерывное, и импульсивное — определяется не напрямую, а через сравнение с критической угловой скоростью вращения долота или с вводимым эталонным ударом, которые являются наибольшими из возможных перед началом погружения [8].

В недавних работах автора (см. [https://elibrary.ru/author\\_profile.asp?id=352075](https://elibrary.ru/author_profile.asp?id=352075)) такой новый подход был показан сначала при моделировании буровых работ, а затем — при моделировании проникания ударника в грунт при однократном и многократных ударах. Ввиду важности затрагиваемых вопросов для указанных прикладных задач в данной работе приведено подробное описание и дан алгоритм для численного моделирования такого подхода на примере крутильных автоколебаний бурильной колонны с долотом дробяще-скалывающего действия и с учетом распределения массы по длине колонны в виде элементов, состоящих из одной или нескольких труб.

**Модель бурильной колонны.** БК будем представлять в виде цепочки элементов — полых цилиндров с одинаковыми моментами инерции  $I$  и массами  $m$ , связанных друг с другом посредством упругих связей с крутильной жесткостью  $c_\phi$  (см. рис.). Каждый такой элемент объединяет заданное число  $j$  обыкновенных бурильных труб как единое жесткое целое, имеющее общую длину  $L$ ; задаваемое число  $n$  элементов определяется степенью приближения распределения инерционных свойств колонны данной цепочкой. Для  $i$ -го элемента ( $i = 1 \div n$ ) угол поворота поперечного сечения определяется через координату  $\phi_i$ . Верхний цилиндр первого такого элемента закручивается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , и на него действует постоянная сила подвеса  $P$ , а в самом низу БК имеется  $n$ -й элемент с утяжеленными бурильными трубами — ВНА (на рис. 1 — цилиндр радиуса  $R$ ). Для такого более массивного элемента масса равна  $m_n$ , а осевой момент инерции —  $I_n$ , отличные от аналогичных параметров обыкновенных бурильных труб. Положение нижнего сечения  $n$ -го элемента определяется через координату  $x_n$  (см. рис.) по отношению к устью скважины. С утяжеленной бурильной трубой жестко связано долото радиуса  $R$  дробяще-скалывающего действия, на которое со стороны породы в забое скважины действует сила лобового сопротивления [8]:

$$F_c = F_0 \frac{\dot{x}_n + \Delta}{\dot{x}_n + bR|\dot{\phi}_n| + \Delta}. \quad (1)$$

Такой вид позволяет учитывать дробяще-скалывающее действие вращающегося долота, уменьшающее прочность породы. Здесь  $F_0$  — максимальное значение силы, подлежащая определению;  $b, \Delta$  — коэффициенты аппроксимации, которые находятся экспериментально; точкой  $\langle \cdot \rangle$  обозначается дифференцирование по времени  $t$ . Для упрощения расчетов считается, что дробяще-скалывающее действие долота на породу в среднем непрерывно, когда действие каждого зубца шарошки начинается сразу же после окончания действия ранее активного зубца, без задержек по времени. Такое воздействие ведет к потере прочности породы, а его сила предполагается пропорциональной модулю угловой скорости

долота  $|\dot{\varphi}_n|$ . Формула (1) выражает прямую пропорциональную зависимость от скорости погружения  $\dot{x}_n$  и обратную — от  $|\dot{\varphi}_n|$ , что хорошо согласуется с данными промышленной практики [1–3; 10]. В забое скважины, кроме силы лобового сопротивления  $F_c$ , возникает момент сопротивления верчению  $M_c$ , который определяется согласно закону Кулона, по формуле:  $M_c = -\rho F_c$ , где  $\rho$  — удельный коэффициент момента верчения на единицу давления в забое:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \text{sign} \dot{\varphi}_n, & \text{if } \dot{\varphi}_n \neq 0; \\ \rho = [-\rho_1, \rho_1], & \text{if } \dot{\varphi}_n \equiv 0, (\varepsilon_p = \rho_1 / \rho_0 \geq 1) \end{cases}$$

Влияние промывочной жидкости на работу долота учитывается моментом вязкого сопротивления:  $M_b = -\mu \dot{\varphi}_n$ , где  $\mu$  — коэффициент вязкого сопротивления. На каждый  $i$ -й элемент цепочки со стороны соседних пружин передается момент кручения:  $-c_\varphi(2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1})[1 + c_2(2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1})^2]$ , где  $c_2$  — поправочный коэффициент жесткости для учета нелинейной составляющей деформации кручения.

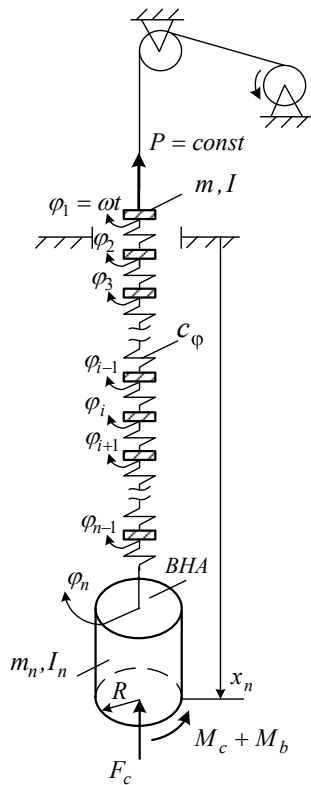


Рис. Модель буровой колонны

Силы трения о стенки скважины для принимаемой модели отсутствуют, так как скважина и БК задаются прямолинейной формы, а действие указанных сил не способствуют изменению этого. Поэтому роль утяжеленных нижних труб БК, предназначенных для увеличения силы осевого давления на долото, здесь не столь существенна.

Допустимые остановки долота в погружении или вращении будут считаться жесткими, завершающимися

пластическими микроударами — что исключит возможность мгновенной смены знака для скоростей. В противном случае в моменты упругих микроударов окончательная остановка происходила бы не сразу, а после нескольких отскоков с возможностями мгновенной смены направления скорости погружения или вращения долота. Микроудары остановок по своей силе могут быть не столь малыми и будут также влиять на уменьшение прочности породы, что раньше не учитывалось. В данной модели сказанное будет приниматься во внимание уточнением формулы (1) при нахождении силы лобового сопротивления. Для этого вначале следует определить начальные скорости таких микроударов и способы их нахождения в погружении и вращении долота. Возникающие эффекты *stick-slip* с микроударами остановки, в отличие от обычных, предлагается называть жесткими.

Заметим, что, как было отмечено выше, сила микроудара может быть не очень малой, поэтому приставка микро- здесь выбрана не столь удачно. Тем не менее, сохраним ее для обозначения ударов остановки.

**Жесткие эффекты *stick-slip* на погружении.** При бурении, вследствие действия упругих сил сопротивления, долото в своем вращательном движении может притормаживать или даже останавливаться. Вследствие этого происходит снижение силового воздействия на буримую породу, и перед долотом может возникнуть слой грунта, где прочность еще достаточная для создания преграды погружению. В подобных случаях погружение заканчивается микроударом остановки [9], а текущая скорость  $\dot{x}_n$ , достигнув некоторого небольшого значения  $\dot{x}_{**}$ , уменьшится до нуля скачком. Такая скорость  $\dot{x}_{**}$  перед жесткой остановкой погружения являлась бы начальной скоростью микроудара остановки, если бы движение долота было поступательным. Но долото имеет и вращательную составляющую движения, угловая скорость которой  $\dot{\varphi}_n$ , достигнув некоторого значения  $\dot{\varphi}_{**}$ , в момент микроудара тоже претерпевает некоторые скачкообразные изменения. В момент остановки погружения вращение долота может прекратиться или продолжиться, но уже с меньшей угловой скоростью. Из-за наличия вращения долота микроудар остановки был назван комбинированным, составляющими которого являются прямой и вращательный удары [8]. Силу каждой составляющей микроудара будем характеризовать их начальными скоростями — соответственно  $\dot{x}_- \equiv \dot{x}_{**}$  и  $\dot{\varphi}_- \equiv \dot{\varphi}_{**}$ , которые необходимы для определения силового действия на породу такого микроудара в целом [8] через его начальную обобщенную скорость  $u_- = \dot{x}_{**} + aR|\dot{\varphi}_{**}|$ , где  $a$  — коэффициент аппроксимации, определяемый экспериментально. Для точного обнаружения момента жесткой остановки из дифференциальных уравнений погружения и вращения долота следует искать такие  $\dot{x}_{**}$  и  $\dot{\varphi}_{**}$ , при которых возможный микроудар был бы неспособен преодолеть прочность грунта. Для этого вводится условие, которое должно проверять, будет ли микроудар с начальной обобщенной скоростью  $u_-$  соответствовать эталонному удару

$u_{-*} = (\dot{x}_- + aR|\dot{\phi}_-|)_*$  — максимальному по силе из всех возможных, при котором погружение долота не может начаться. Учитывая, что после комбинированного удара с начальной скоростью  $u_-$ , согласно [8], у долота возникает лобовое сопротивление:

$$F_c = F_0 \frac{\Delta}{b_1 u_- + \Delta}, \quad (2)$$

а значение начальной обобщенной скорости для эталонного удара находится [8] как:

$$u_{-*} = \frac{\Delta}{b_1} \left( \frac{n_1}{r} - 1 \right), \quad (3)$$

то дополнительное условие остановки будет таким [9]:

$$\dot{x}_{**} + aR|\dot{\phi}_{**}| = u_{-*}, \quad (4)$$

Здесь  $b_1 = b/a$ ,  $n_1 = \sigma_1/\sigma_0$  — запас прочности грунта от действия силы тяжести БК;  $\sigma_0 = m_n g/S$  — обычное статическое нормальное напряжение грунта, возникающее под действием силы тяжести утяжеленных труб;  $\sigma_1$  — предельно допустимое статическое нормальное напряжение для данного грунта, определяемое экспериментально;  $S$  — площадь поперечного сечения долота. Начальные скорости  $\dot{x}_{**}$ ,  $\dot{\phi}_{**}$ , составляющие комбинированного микроудара остановки, определяются в процессе численного интегрирования из дифференциальных уравнений движения долота для поступательного и вращательного составляющих движения. Численный счет следует прекратить, как только будет достигнуто выполнение равенства (4) с заданной точностью.

Начало погружения долота после длительной остановки определяется аналогично тому, как это делалось в работе [8], только в качестве наносимых ударов следует подразумевать микроудары остановок.

$$|\dot{\phi}_n| > \frac{\Delta}{bR} \left( \frac{n_1}{r} - 1 - \frac{b_1}{\Delta} u_{-*} \right) = 0. \quad (5)$$

Условие (5) говорит, что после микроудара остановки для продолжения погружения будет достаточно начала вращения долота.

Такие повторяющиеся прерывания погружения микроударами остановки приводят к эффектам *stick-slip*, которые, в отличие от обычных, следует назвать жесткими, и они будут характерны для бурения. Аналогичную жесткую остановку, если она происходит, следует ожидать и при верчении (вращении) долота.

**Жесткие эффекты *stick-slip* на вращении.** В зоне контакта долота и породы, наряду с нормальными, возникают касательные напряжения, закон изменения которых заранее неизвестен. Начало вращения долота относительно породы может быть возможным только лишь тогда, когда для всех точек на поверхности контакта скальвующее действие долота на выступы (неровности) породы станет достаточным для их устранения. При неизменном моменте верчения (кручения) минимальные скальвующие (касательные) силы будут возникать

в точках пятна контакта наиболее удаленных от оси вращения, т. е. на расстоянии  $R$ . Для одной из таких точек, которую будем считать контрольной, определим условия для возможности начала верчения долота. При всех равных условиях именно в таких точках возникают минимальные касательные напряжения, а превышение ими предельно допустимого значения будет означать начало вращения долота. В дальнейшем будем полагать, что все выступы (неровности) на поверхности пятна контакта в среднем одинаковы — по размерам и прочностным свойствам. Такое допущение оправданно, если считать опорную среду однородной, а силовое действие, создаваемое долотом, является равномерным. Здесь не ставится задача определения закона распределения касательных напряжений в пятне контакта — это непростая задача, и она нуждается в отдельном рассмотрении. Для определения возможности остановки или начала верчения долота достаточно будет проверить условия прочности по касательным напряжениям в одной из таких контрольных точек.

При сохранении выступов неровностей хотя бы в одной точке момент кручения, создаваемый упругой частью БК, будет уравновешен, в соответствии с законом Кулона, моментом сопротивления верчению:  $-c_\phi(\phi_n - \phi_{n-1})[1 + c_2(\phi_n - \phi_{n-1})^2] - \rho N = 0$ , где  $N$  — реакция опоры;  $\rho$  — коэффициент верчения. Отсутствие вращения может сохраниться и при нанесении долотом холостого комбинированного удара с начальной обобщенной скоростью  $u_-$ . Такой удар приведет к изменению прочности породы [8], а значит, и реакции опоры:  $N = F_0 \frac{\dot{x}_n + \Delta}{\dot{x}_n + b_1 u_- + \Delta}$ . Здесь учтено, что и при

остановке вращения погружение долота может сохраниться — когда  $\dot{x}_n$  было велико. Наиболее сильный из таких ударов, как и в случае определения условий на погружение долота в грунт, также можно считать эталонным ударом, только теперь уже на верчение, который будет иметь заранее неизвестную начальную обобщенную скорость:  $u_{-\pi} = (\dot{x}_- + aR|\dot{\phi}_-|)_\pi$ . Индекс  $\langle \pi \rangle$  введен для обозначения величин, определяющих микроудар вращения. Для определения  $u_{-\pi}$  запишем условие отсутствия вращения (верчения) долота после нанесения такого эталонного удара:

$$-c_\phi(\phi_n - \phi_{n-1})[1 + c_2(\phi_n - \phi_{n-1})^2] - \rho F_0 \frac{1}{k_\pi} = 0,$$

где  $k_\pi = \frac{b_1}{\dot{x}_n + \Delta} u_{-\pi} + 1$ ;  $F_0 = \begin{cases} k_\pi r m_n g, & \text{if } \dot{x}_n \equiv 0; \\ n_1 m_n g, & \text{if } \dot{x}_n > 0. \end{cases}$  — со-

ответственно предельное значение коэффициента динамичности на верчение, наибольшее значение силы лобового сопротивления. Деля обе части данного равенства на  $RS$ , где  $S$  — площадь выделяемого сечения в зоне контакта, получим:

$$-\frac{1}{RS} c_\phi(\phi_n - \phi_{n-1})[1 + c_2(\phi_n - \phi_{n-1})^2] - \frac{\rho F_0}{RS} \frac{1}{k_\pi} = 0.$$

Введя обозначение  $B = \frac{\rho F_0}{RS} = \frac{\rho}{R} \sigma$  и принимая во

внимание, что

$$F_{\tau} = \frac{1}{R} c_{\varphi} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) \left[ 1 + c_2 (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 \right];$$

$\tau = \frac{F_{\tau}}{S}$  — касательное напряжение, возникающее в контрольной точке на выделяемой площадке  $S$  в зоне контакта долота с породой, получим:  $-\tau - B \frac{1}{k_{\pi}} = 0$ . Что

можно представить в таком виде:  $\tau_{\partial} = \frac{\tau}{k_{\pi}} \Rightarrow$

$\tau_{\partial 1} = \frac{\tau_1}{k_{\pi}}$  — соответственно динамическое и предельно допустимое динамические касательные напряжения.

Начало верчения долота начнется, когда  $\frac{\tau_1}{k_{\pi}} = \tau$ , где

$\tau = \frac{\tau_0}{1 + c_2} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) \left[ 1 + c_2 (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 \right]$  и было учтено,

что  $F_{\tau 0} = F_{\tau} |_{\varphi_n - \varphi_{n-1} = 1}$  — эталонная касательная сила в выбранной контрольной точке, определяющая возможность поворота долота на один радиан;

$\tau_0 = \frac{F_{\tau 0}}{S} = \frac{1}{RS} c_{\varphi} (1 + c_2)$  — эталонное касательное напряжение, возникающее под действием  $F_{\tau 0}$ . Начальная обобщенная скорость эталонного комбинированного удара на верчение находится как:

$$u_{-\pi} = \frac{\dot{x}_n + \Delta}{b_1} \left\{ \frac{n_{\tau 1} (1 + c_2)}{(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \left[ 1 + c_2 (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 \right]} - 1 \right\}. \quad (6)$$

Здесь  $n_{\tau 1} = \frac{\tau_1}{\tau_0}$  — запас прочности породы по касательным напряжениям в сравнении с эталонным напряжением  $\tau_0$ . Здесь дополнительное условие остановки вращения долота будет таким:

$$\dot{x}_{**} + aR |\dot{\varphi}_{**}| = u_{-\pi}, \quad (7)$$

где  $\dot{x}_{**}, \dot{\varphi}_{**}$  вычисляются из дифференциальных уравнений движения долота.

Начало вращения долота после остановки выражается таким условием:

$$c_{\varphi} |\varphi_n - \varphi_{n-1}| \left[ 1 + c_2 (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 \right] = \frac{\rho_1 m_n g}{k_{\pi}} \begin{cases} k_{\pi} r, & \text{if } \dot{x}_n \equiv 0; \\ n_1, & \text{if } \dot{x}_n > 0. \end{cases} \quad (8)$$

Заметим, что эффекты *stick-slip*, вызванные силами сухого трения при скольжении тела, в отличие от рассмотренных выше, можно было бы назвать мягкими. Обычно в таких случаях подразумевается, что скорость движения — скольжения тела — непрерывно уменьшается до нуля при наступлении кратковременных остановок, без каких-либо резких скачков [11–13]. Такое ошибочно распространялось раньше и на случаи бурения [14–20]. Но вышесказанное говорит о том, что подобные

эффекты *stick-slip* будут не мягкими, а жесткими. Физические причины будут другими — вследствие действия силы и момента лобового сопротивления, где учитывается изменение прочности грунта от силового воздействия. Условием погружения долота в породу будет:

$$\dot{x}_n + aR |\dot{\varphi}_n| > u_{-*}, \quad (9)$$

а условием вращения — выполнение неравенства:

$$\dot{x}_n + aR |\dot{\varphi}_n| > u_{-\pi}, \quad (10)$$

т. е. чтобы действие возможного микроудара на грунт было сильнее соответствующего эталонного удара.

Начальная угловая скорость долота после микроудара остановки погружения ( $\dot{x}_n = 0$ ), согласно [8], определяется так ( $q = m_n / I_n$ ):

а)  $\dot{\varphi}_{n0} = \dot{\varphi}_{**} - \rho_0 q \dot{x}_{**} - u_{-*}$ , если:

$$\dot{x}_{**} \leq \frac{1}{1 + \rho_0 R a q} u_{-*}; \quad \dot{\varphi}_{**} > \frac{\rho_0 q}{1 + \rho_0 R a q} u_{-*}.$$

б)  $\dot{\varphi}_{n0} = 0$ , если:

$$\dot{x}_{**} \leq \frac{1}{1 + \rho_1 R a q} u_{-*}; \quad \dot{\varphi}_{**} \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 R a q} u_{-*}.$$

Начальная скорость погружения долота после микроудара остановки вращения ( $\dot{\varphi}_n = 0$ ) определяется так:

а)  $\dot{x}_{n0} = \dot{x}_{**} + aR \dot{\varphi}_{**} - u_{-\pi}$ , если:

$$\dot{x}_{**} > \frac{1}{1 + \rho_1 R a q} u_{-\pi}; \quad \dot{\varphi}_{**} \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 R a q} u_{-\pi}.$$

б)  $\dot{x}_{n0} = 0$ , если:

$$\dot{x}_{**} \leq \frac{1}{1 + \rho_1 R a q} u_{-\pi}; \quad \dot{\varphi}_{**} \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 R a q} u_{-\pi}.$$

Микроудар остановки погружения может привести к микроудару остановки вращения долота и наоборот: микроудар вращения — к микроудару остановки погружения. Микроудар остановки погружения приводит к нарушению плавности изменения угловой скорости долота и наоборот: микроудар остановки вращения — скорости погружения. Возможные эффекты *stick-slip* в погружении и вращении для долота могут возникать либо одновременно, либо отдельно друг от друга.

**Уравнения движения.** Микроудары остановок по своей силе могут быть не столь малыми, поэтому их следует учесть. А при нахождении силы лобового сопротивления, вместо соотношения (1), в дальнейшем будет использована формула [8]:

$$F_c = F_0 \frac{\dot{x}_n + \Delta}{\dot{x}_n + bR |\dot{\varphi}_n| + b_1 u_{-} e^{-\vartheta(x_n - x_{n0})} + \Delta}. \quad (11)$$

Здесь  $\vartheta$  — коэффициент затухания, характеризующий быстроту восстановления прочностных свойств грунта по мере удаления от места нанесения микроудара; функция  $e^{-\vartheta(x_n - x_{n0})}$  определяет предполагаемый закон затухания силы удара;  $x_{n0}$  — координата, определяющая место нанесения последнего из нанесенных

микроударов. В формуле (11) учитывается только последний микроудар из предположения быстрого затухания возникающих трещин, когда  $\vartheta \gg 1$ .

Для дальнейшего принимаются следующие обозначения:  $k$  — коэффициент динамичности, определяющий меру силового воздействия долота на породу в забое ( $k_\pi$  — предельное значение коэффициента на верчение);  $G(t)$  — переменная часть для силы лобового сопротивления в формуле (11) — которые определяются по формулам [8]:

$$k = 1 + \frac{bR}{\dot{x}_n + \Delta} |\dot{\varphi}_n| + \frac{b_1}{\dot{x}_n + \Delta} u_- e^{-\vartheta(x_n - x_{n0})}; \quad (12)$$

$$G(t) = \frac{\dot{x}_n + \Delta}{\dot{x}_n + bR|\dot{\varphi}_n| + b_1 u_- e^{-\vartheta(x_n - x_{n0})} + \Delta};$$

$$G(t) \Big|_{\dot{\varphi}_n=0} = \frac{1}{k_\pi}.$$

и вводится параметр для определения силы осевого давления на долото:  $r = 1 + \frac{(n-1)mg - P}{m_n g}$ . Крутильные коле-

бания цепочки элементов БК на рис. будут описываться следующей системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} &\ddot{\varphi}_1 = 0; \\ &I\ddot{\varphi}_2 = -c_\varphi(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3) \left[ 1 + c_2(2\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_3)^2 \right]; \\ &\dots\dots\dots \\ &I\ddot{\varphi}_i = -c_\varphi(2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1}) \times \\ &\quad \left[ 1 + c_2(2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1})^2 \right]; \\ &\dots\dots\dots \\ &I\ddot{\varphi}_{n-1} = -c_\varphi(2\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2} - \varphi_n) \times \\ &\quad \left[ 1 + c_2(2\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2} - \varphi_n)^2 \right]; \\ &\dot{\varphi}_n \equiv 0 : |\varphi_n - \varphi_{n-1}| \left[ 1 + c_2(\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 \right] < \\ &\quad \rho_1 m_n g \begin{cases} r, \text{ if } \dot{x}_n \equiv 0; \\ n_1 G(t), \text{ if } \dot{x}_n > 0; \end{cases} \\ &\dot{\varphi}_n \neq 0; \dot{x}_n + aR|\dot{\varphi}_n| > u_{-\pi} : \quad I_n \ddot{\varphi}_n = \\ &\quad -c_\varphi(\varphi_n - \varphi_{n-1}) \left[ 1 + c_2(\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 \right] - \\ &\quad \mu \dot{\varphi}_n - \rho_0 m_n g \text{sign} \dot{\varphi}_n \begin{cases} r, \text{ if } \dot{x} \equiv 0; \\ n_1 G(t), \text{ if } \dot{x} > 0; \end{cases} \\ &\dot{x}_n \equiv 0; |\dot{\varphi}_n| \leq \frac{\Delta}{bR} \left( \frac{n_1}{r} - 1 - \frac{b_1}{\Delta} u_{-*} \right) : \\ &\quad r m_n g - F_0 \frac{1}{k} = 0; \quad (13) \\ &\dot{x}_n > 0; \dot{x}_n + aR|\dot{\varphi}_n| > u_{-*} : \quad \ddot{x}_n = g[r - n_1 G(t)] \end{aligned} \right.$$

Начальные условия при моделировании процесса погружения бурильной колонны можно принять такими:

$$\varphi_{10} = 0; \dot{\varphi}_{10} = \omega; \varphi_{20} = 0; \dot{\varphi}_{20} = 0; \dots \varphi_{i0} = 0; \dot{\varphi}_{i0} = 0; \dots \varphi_{n0} = 0; \dot{\varphi}_{n0} = 0; x_{n0} = nL; \dot{x}_{n0} = 0.$$

Уравнения (13) дают полный алгоритм для численного моделирования крутильных автоколебаний БК с учетом возможных жестких эффектов *stick-slip*.

**О жестких эффектах *stick-slip* при скольжении.**

Представляет интерес нахождение ответа на вопрос о возможности жестких эффектов *stick-slip* под действием сухого трения. Заметим, что возможность жестких остановок для скользящих тел до сих пор никем не обсуждалась. Известно, что сила сухого трения, определяемая по закону Амонтона – Кулона, является следствием возникающего сопротивления скольжению в пятне контакта тел соприкосновения. В пятне контакта соприкасающихся тел все неровности (шероховатости) имеют ограничение по уровню высоты. Вне зоны контакта такое ограничение отсутствует, а со стороны имеющихся неровностей, превышающих такое ограничение, может возникать дополнительная сила сопротивления, препятствующая скольжению. Она возникает на передней границе пятна контакта и приложена к торцу скользящего тела со стороны неровностей, поэтому ее можно назвать фронтальным сопротивлением. Такая сила раньше никем не учитывалась.

Сила фронтального сопротивления от каждой такой неровности зависит от ее прочности и является величиной мезомасштабного уровня, а суммарная величина от всех таких сил может достигать макроуровня и влиять на возможность скольжения тела. Для гладких поверхностей с неровностями, когда их не так много и они обладают малой прочностью, пренебрежение фронтальным сопротивлением на макроуровне оправданно — оно может проявляться только на мезомасштабном уровне. Но для не очень гладких поверхностей тел соприкосновения с неровностями, обладающих не столь малой прочностью, фронтальное сопротивление может вносить поправку в нахождении силы сухого трения уже на макроуровне, и ее следует учитывать. Фронтальное сопротивление является поверхностным аналогом для ранее введенной автором силы лобового сопротивления твердого тела при проникании в прочностную среду. Она, как и лобовое сопротивление, может уменьшаться при силовом воздействии на среду, приводящем к потере прочности шероховатостей в поверхностном слое. При скольжении такое воздействие создается ударами торца тела по препятствующим неровностям. Такие удары на мезомасштабном уровне будут дискретными, а при переходе на макроуровень — становятся непрерывными, повторяющимися без временных задержек как результат наложения происходящих мезоударов. Начальная скорость таких ударов будет равна скорости движения скользящего тела в текущий момент времени. По их начальной скорости, как и в элементарной теории проникания, можно судить о силе удара и степени потери прочности твердой среды в ее поверхностном слое. Для этого следует сначала ввести эталонный удар — наиболее сильный из возможных, при котором еще невозможно преодоление сопротивления со стороны ше-

роховатостей поверхностного слоя для начала скольжения, а затем сравнивать его с текущими ударами. Начальная скорость эталонного удара находится из условия, что сила фронтального сопротивления после нанесения такого удара должна быть равна трению покоя. Наличие фронтального сопротивления на макроуровне должно визуально проявляться в виде жестких остановок при скольжении тел. Такие остановки будут говорить о возможности жестких эффектов *stick-slip* для не столь гладких тел скольжения с сухим трением. Используя только закон Амонтона – Кулона, без введения фронтального сопротивления, моделировать возможность жестких остановок тела при скольжении не удастся. Сила фронтального сопротивления, являясь частным случаем лобового и возникающая в поверхностном слое, играет здесь определяющую роль при достижении макроуровня.

**Заключение.** Получены следующие результаты:

1. Предложена новая модель БК, совершающей крутильные автоколебания в виде цепочки элементов, состоящих из одной или нескольких бурильных труб. Связь между элементами осуществляется посредством пружин кручения с кубической нелинейностью.
2. При описании крутильных автоколебаний БК уточнена формула для нахождения лобового сопротивления. Потеря прочности породы учитывается не только от непрерывного силового воздействия долота, но и от возможных микроударов остановок.

#### Литература

1. Юнин Е.К., Хегай В.К. Динамика глубокого бурения. М.: Недра-Бизнесцентр, 2004. 286 с.
2. Юнин Е.К. Низкочастотные колебания бурильного инструмента. М.: Недра, 1983. 132 с.
3. Белокобыльский С.В. Динамика систем с сухим трением и ее приложение к задачам горной механики. М.: Машиностроение, 2002. 209 с.
4. Белокобыльский С.В., Ветюков М.М., Нагаев Р.Ф. О фрикционных автоколебаниях бурильной колонны // Изв. АН СССР. Машиноведение. 1982. № 2. С. 15-20.
5. Балицкий П.В. Взаимодействие бурильной колонны с забоем скважины. М.: Недра, 1975. 293 с.
6. Мирзаджанзаде А.Х., Керимов З.Г., Копейкис М.Г. Теория колебаний в нефтепромысловом деле. М.: Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2005. 364 с.
7. Сагомоян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
8. Коронатов В.А. Крутильно-продольные автоколебания бурильной колонны с долотом дробяще-скалывающего действия при постоянном натяжении каната подвеса // ФТПРПИ. 2023. № 1. С. 45-60.
9. Коронатов В.А. Глубина погружения ударника в грунт при жесткой остановке и сравнение элементарной теории проникания с другими методами // Системы Методы Технологии. 2023. № 2 (58). С. 38-45.
10. Нагаев Р.Ф., Исаков К.А., Лебедев Н.А. Динамика горных машин. СПб.: Изд-во СПбГИ (ТУ), 1996. 155 с.
11. Khizgiyayev S.V. Self-excited oscillations of a two-mass oscillator with dry stick-slip friction // JAMM. 2007. V. 71. P. 905-913.
12. Pascal M. Dynamics of coupled oscillators excited by dry friction // ASME J. Comput. Nonlin. Dyn. 2008. V. 3, № 3. P. 20-26.
13. Паскаль М. Новые эффекты в поведении осциллятора «stick-slip» // ПММ. 2011. Т. 75, вып. 3. С. 402-409.
14. Monteiro H.L.S., Trindade M.A. Performance analysis of proportional-integral feedback control for the reduction of stick-slip-induced torsional vibrations in oil well drillstrings // Journal of Sound and Vibration. 2017. V. 398. P. 28-38.
15. Tang L., Guo B., Zhu X., Shi Ch., Zhou Y. Stick-slip vibrations in oil well drillstring: A review // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2020. V. 12. P. 1-23.
16. Tucker R.W., Wang C. On the effective control of torsional vibrations in drilling systems // Journal of Sound and Vibration. 1999. V. 224, № 1. P. 101-122.
17. Richard T., Germa C., Detournay E. A simplified model to explore the root cause of stick-slip vibrations in drilling systems with drag bits // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 305, № 3. P. 432-456.
18. Besselink B., van de Wouw N., Nijmeijer H. A semi-analytical of stick-slip oscillations in drilling systems // ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2011. V. 6. P. 021006 (9 pages).
19. Zhu X.H., Tang L.P., Yang Q.M. A literature review of approaches for stick-slip vibration suppression in oilwell drillstring // Advances in Mechanical Engineering. 2014. V. 2014, № 6. P. 967952.
20. Tashakori S., Vossoughi G., Zohoor H., Yazdi E. Modification of the infinite-dimensional neutral-type time-delay dynamic model for the coupled axial-torsional vibrations in drill strings with a drag bit // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. Aug. 2020. V. 15, № 8. P. 1-6.

## References

1. YUnin E.K., Hegaj V.K. Dynamics of deep drilling. M.: Nedra-Biznescentr, 2004. 286 p.
2. YUnin E.K. Low-frequency vibrations of a drilling tool. M.: Nedra, 1983. 132 p.
3. Belokobyl'skij S.V. Dynamics of systems with dry friction and its application to problems of mining mechanics. M.: Mashinostroenie, 2002. 209 p.
4. Belokobyl'skij S.V., Vetyukov M.M., Nagaev R.F. On frictional self-oscillations of a drill string // Izv. AN SSSR. Mashinovedenie. 1982. № 2. P. 15-20.
5. Balickij P.V. Interaction of the drill string with the bottom of the well. M.: Nedra, 1975. 293 p.
6. Mirzadzhanzade A.H., Kerimov Z.G., Kopejkis M.G. Theory of oscillations in oilfield business. M.: Izhevsk: In-t komp'yuternyh issledovaniy, 2005. 364 p.
7. Sagomonyan A.YA. Penetration. M.: Izd-vo MGU, 1974. 299 p.
8. Koronotov V.A. Torsional-longitudinal self-oscillations of a drill string with a crushing-chipping action bit under constant tension of the suspension rope // FTPrPI. 2023. № 1. P. 45-60.
9. Koronotov V.A. The depth of immersion of the striker in the ground at a hard stop and comparison of the elementary theory of penetration with other methods // Systems Methods Technologies. 2023. № 2 (58). P. 38-45.
10. Nagaev R.F., Isakov K.A., Lebedev N.A. Dynamics of mining machines. SPb.: Izd-vo SPPGI (TU), 1996. 155 p.
11. Khizgiyayev S.V. Self-excited oscillations of a two-mass oscillator with dry stick-slip friction // JAMM. 2007. V. 71. P. 905-913.
12. Pascal M. Dynamics of coupled oscillators excited by dry friction // ASME J. Comput. Nonlin. Dyn. 2008. V. 3, № 3. P. 20-26.
13. Paskal' M. New methods in the creation of the oscillator "stick-slip" sliding" // PMM. 2011. V. 75, vyp. 3. P. 402-409.
14. Monteiro H.L.S., Trindade M.A. Performance analysis of proportional-integral feedback control for the reduction of stick-slip-induced torsional vibrations in oil well drillstrings // Journal of Sound and Vibration. 2017. V. 398. P. 28-38.
15. Tang L., Guo B., Zhu X., Shi Ch., Zhou Y. Stick-slip vibrations in oil well drillstring: A review // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2020. V. 12. P. 1-23.
16. Tucker R.W., Wang C. On the effective control of torsional vibrations in drilling systems // Journal of Sound and Vibration. 1999. V. 224, № 1. P. 101-122.
17. Richard T., Germay C., Detournay E. A simplified model to explore the root cause of stick-slip vibrations in drilling systems with drag bits // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 305, № 3. P. 432-456.
18. Besselink B., van de Wouw N., Nijmeijer H. A semi-analytical of stick-slip oscillations in drilling systems // ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2011. V. 6. P. 021006 (9 pages).
19. Zhu X.H., Tang L.P., Yang Q.M. A literature review of approaches for stick-slip vibration suppression in oilwell drill-string // Advances in Mechanical Engineering. 2014. V. 2014, № 6. P. 967952.
20. Tashakori S., Vossoughi G., Zohoor H., Yazdi E. Modification of the infinite-dimensional neutral-type time-delay dynamic model for the coupled axial-torsional vibrations in drill strings with a drag bit // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. Aug. 2020. V. 15, № 8. P. 1-6.