

Пример математически строгой теории бурения с долотом режущего действия при крутильно-продольных автоколебаниях

В.А. Коронатов

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Статья поступила 28.04.2023, принята 12.05.2023

Дан краткий обзор существующих моделей бурильной колонны при роторном способе бурения, приводящих к обыкновенным дифференциальным уравнениям или с запаздывающим аргументом. Указаны их главные отличия и причины, вызывающие необходимость использования эмпирических соотношений. Показано, как можно строить математически строгую теорию бурения на примере двухмассовой модели бурильной колонны с долотом режущего действия при возникновении крутильно-продольных автоколебаний. Предусматриваются возможности возникновения эффектов stick-slip в погружении и вращении долота, кратковременные отрывы бурильной колонны от забоя скважины, завершающиеся ударом. Сила лобового сопротивления со стороны забоя скважины определяется в нелинейной зависимости от скорости погружения и с учетом снижения прочности породы от силового воздействия в виде аппроксимации Паде 1-й степени. Силовое воздействие может создаваться вращающимся долотом и ударом при завершении возможного отрыва бурильной колонны от забоя. Такие удары, когда резко изменяются одновременно две скорости — поступательная и вращательная составляющие движения, — названы комбинированными. Потеря прочности грунта характеризуется угловой скоростью вращения долота в сторону заостренных концов резов и обобщенной начальной скоростью комбинированного удара. Возрастание этих кинематических величин считается прямо пропорциональным силовому воздействию, создаваемому долотом и ударом, а для силы лобового сопротивления — обратно пропорциональным ее численному значению. Приведенные уравнения позволяют без каких-либо эмпирических соотношений и использования уравнений с запаздывающим аргументом моделировать процесс бурения. Заложенные принципы позволяют говорить о возможности построения математически строгой теории бурения и для других моделей, в том числе с распределенными параметрами. Примеры численного моделирования показывают возможность установления хаотичных режимов бурения.

Ключевые слова: теория бурения; бурильная колонна; крутильно-продольные автоколебания; сила лобового сопротивления; stick-slip эффект; долото режущего действия.

An example of a mathematically rigorous theory of drilling with a cutting bit with torsional-longitudinal self-oscillations

V.A. Koronotov

Bratsk State University; 40, Makarenko, Bratsk, Russia

kortavik@mail.ru

<https://orcid.org/0000-0002-1331-213X>

Received by 28.04.2023, accepted 12.05.2023

A brief overview of the existing models of the drill string in the rotary drilling method, leading to ordinary differential equations or with a lagging argument, is given. Their main differences and the reasons for the need to use empirical relations are indicated. The way is shown how to build a mathematically rigorous drilling theory on the example of a two-mass model of a drill string with a cutting action bit when torsional-longitudinal self-oscillations occur. It provides for the possibility of stick-slip effects in the immersion and rotation of the bit, short-term detachments of the drill string from the bottom of the well ending with a blow. The drag force from the bottom of the well is determined in a non-linear dependence on the rate of immersion and taking into account the decrease in the strength of the rock from the force action in the form of an approximation of the 1st degree Pade. The force effect can be created by a rotating bit and a blow at the end of a possible separation of the drill string from the face. Such impacts, when two speeds change dramatically at the same time – the translational and rotational components of motion, are called combined. The loss of soil strength is characterized by the angular velocity of rotation of the chisel towards the pointed ends of the incisors and the generalized initial velocity of the combined impact. The increase in these kinematic values is considered to be directly proportional to the force action created by the chisel and the impact, and for the drag force - inversely proportional to its numerical value. The above equations make it possible to simulate the drilling process without any empirical relations and the use of equations with a lagging argument. The principles laid down allow talking about the possibility of constructing a mathematically rigorous drilling theory for other models, including those with distributed parameters. Examples of numerical modeling show the possibility of establishing chaotic drilling modes.

Keywords: drilling theory; drill string; torsional-longitudinal self-oscillations; drag force; stick-slip effect; cutting action chise

Введение. В настоящее время для описания роторного способа бурения принято применять модели, для которых используются либо обычные дифференциальные уравнения (например [1–4]), либо — с запаздыва-

ющим аргументом (например [5–7]). В первом случае принимается во внимание только текущее состояние буровой колонны (БК), а во втором, помимо текущего, — и то, что было незадолго до этого. Вызвано это разными подходами к определению силы лобового сопротивления, действующей на долото со стороны забоя скважины. Что приводит к необходимости неодинаковых допущений для принятых моделей и использования разных математических методов. Исходя из сказанного, существующие динамические модели БК можно разделять на обычные и с запаздывающим аргументом:

✓ Обычные модели бурения (ОМБ) — это модели, которые учитывают силовое воздействие долота на грунт (породу) забоя только в текущий момент времени. Сила лобового сопротивления задается по аналогии с тем, как это делается в задачах классической механики. В таких моделях направление вращения породоразрушающего инструмента (долота) не оговаривается, и более того, само вращение часто вообще не принимается во внимание при определении силового воздействия на породу. Указанный подход будет применим для долота дробяще-скалывающего действия, где направление вращения не играет роли.

✓ Модели с запаздывающим аргументом (МЗА) — это модели, где учитывается действие долота на грунт забоя в зависимости от его угла поворота как на текущий момент, так и с учетом запаздывания по времени. Сила лобового сопротивления выражается через глубину бурения каждой лопасти долота и времени запаздывания, которое было затрачено для поворота реза на нужный для этого угол. Здесь принимается во внимание, что при вращении долота в направлении заостренных концов резцов будет происходить снятие очередного слоя грунта, а в противоположном направлении — нет. Тем самым, в сравнении с ОМБ, направление вращения здесь играет существенную роль при определении разрушающего действия долота на грунт (породу). Такие модели применяются для БК с долотом режущего действия.

Заметим, что модели, использующие решения волнового уравнения [1] в форме Даламбера в виде бегущих волн, можно отнести и к МЗА — по виду уравнений и к ОМБ — по способу представления силового воздействия на породу.

В кратком обзоре будут рассмотрены не конкретные особенности существующих моделей БК, как это делается в обычных обзорах, например, в [7; 8]. А будут указаны прежде всего их принципиальные отличия, приведены причины возникающих трудностей в моделировании процесса бурения и существующие пути их преодоления. Затрагивается вопрос о возникающей необходимости использовать эмпирические соотношения, применение которых не позволяет математически строго описывать процессы бурения. Обращается внимание на отсутствие возможностей для нахождения ответов на такие важные вопросы, как, например, определение текущей скорости погружения БК и глубины скважины. Предлагаются давно назревшие решения указанных проблем, которые сводятся к корректному подходу применения соответствующих положений и законов механики. А именно: при определении силы лобового сопротивления со стороны грунта —

следует учитывать потерю его прочности, отказавшись от привычной аналогии с воздушными средами; в стереомеханической теории удара — необходимо для оценки величины силы текущего удара вводить эталонный удар; при использовании закона Амонтона – Кулона о трении — нужно следить, чтобы трущиеся тела двигались поступательно относительно друг друга. Как это все следует реализовывать при описании крутильно-продольных автоколебаний, автором было подробно описано в недавней работе [9] для двухмассовой модели буровой колонны с долотом дробяще-скалывающего действия. В данной статье будет показано как на аналогичной двухмассовой модели строится математически строгая теория бурения для описания крутильно-продольных автоколебаний буровой колонны с долотом уже режущего действия.

Обзор существующих моделей БК. ОМБ строятся на основе традиционных подходов механики и предлагают в основном модели с распределенными параметрами (например [1; 2]), где акцент делается на описание волновых явлений. Модели с конечным числом степеней свободы вводятся редко, лишь при попытках выявления эффекта *stick-slip*. Существенным недостатком таких моделей является то, что они не способны воспроизводить процесс погружения БК во время бурения скважины. Поэтому, наряду с уравнениями принятой модели, возникает необходимость использования эмпирических соотношений [1; 2; 10], выражающих приближенную зависимость скорости погружения от силы осевого давления на долото и частоты его вращения. Указанное не позволяет считать такую науку о бурении математически строгой. Существующая необходимость применения эмпирических соотношений является следствием некорректного или неудачного применения некоторых положений и законов механики. Выражается это в следующем:

1. Для силы лобового сопротивления, действующей на долото со стороны грунта, привычные зависимости от скорости погружения здесь не подходят. Как в линейном, так и в квадратичном виде, как это принято делать со стороны воздушных сред или в задачах проникания твердого тела в грунт при ударе (например [11]). Нельзя считать такую силу и постоянной, а также аналогичной силе упругости или силе сухого трения — в таком виде ее тоже иногда пытаются представить, например, при моделировании погружения сваи в грунт (например [12–14]). В таких случаях процесс погружения БК плохо поддается описанию: сухое трение хорошо позволяет моделировать кратковременные остановки, но не дает возможности учитывать скорость погружения и прочность грунта; упругая или постоянная силы приводят либо к быстрой остановке углубления скважины, либо — к ускоренному движению. А попытки вводить эту силу в соответствие с промышленными данными [1] — прямо пропорционально скорости погружения и обратно пропорционально угловой скорости вращения долота в стандартном виде, приводят к некорректностям. При скоростях, близких к нулевому значению, сила лобового сопротивления становится либо очень маленькой по величине, либо наоборот — принимает очень большие значения, близкие к бесконечности, что далеко от действительности. Чтобы исправить положение, автором было предложено вводить

силу сопротивления по-новому [9; 15–17], в виде аппроксимации Паде 1-й степени. Как оказалось, такой вид находит объяснение изменением прочности грунта при учете силового воздействия, определяемых через кинематические величины.

2. Начальные условия для послеударного процесса погружения, который может возникать при завершении кратковременного отрыва БК от забоя, раньше находить не удавалось. Стереомеханическая теория удара [18; 19], применяемая в таких случаях, делать это не позволяет. Теория Ньютона создавалась для абсолютно твердых тел соударения, без возможностей определения силы ударов и ее влияния на прочность тел соударения. Поэтому обычно предполагалось, что наносимый телом удар является достаточно сильным, погружение обязательно начнется, а его начальная скорость приравнивалась к начальной скорости текущего удара. Как это делалось, например, при моделировании проникания ударника в грунт (например [11–14]). Тем самым фаза удара совмещалась с началом погружения тела. Но это неправильно. Началу проникания должен предшествовать удар как подготовительный этап, во время которого прочность грунта уменьшается — например, из-за возникающих трещин. Если удар достаточной силы, то это приводит к началу погружения тела, при недостаточной силе погружение может не произойти. Совмещая фазу удара с началом погружения, могло возникнуть такое противоречие. При слабом ударе, когда проникания в действительности не произойдет, начальная скорость погружения, тем не менее, будет отличной от нуля, так как она приравнена к начальной скорости удара. Предусмотреть такое противоречие было нельзя из-за отсутствия возможностей заранее определить, какой из текущих ударов может привести к началу погружения тела в грунт, а какой — нет. Вместо традиционного подхода автором было предложено учитывать силу удара не напрямую, а через сравнение с вводимым эталонным ударом по их начальным скоростям. Что, в результате, позволило находить начальные условия и для послеударного процесса, чего раньше делать не удавалось.

3. Применение закона Амонтона – Кулона о трении при скольжении также вызывает трудности, так как и БК, и само долото совершают не поступательное движение. А поступательное движение является необходимым условием применимости закона Амонтона – Кулона для трущихся тел, что всегда строго соблюдалось при проведении экспериментов сначала при установлении этого закона, а затем и при его проверке [20]. При несоблюдении этого условия закон о трении выполняться не будет, что одним из первых экспериментально обнаружил французский ученый П. Контенсу [21]. Для того, чтобы исправить положение для таких случаев, им было предложено использовать закон о трении в дифференциальной форме. В последующем это стало общепринятым приемом в нахождении силы трения скольжения при непоступательном движении тел. С чем автор согласиться не может [22]: закон Амонтона – Кулона в зоне контакта таких тел для выделяемых элементарных площадок будет неприменим — они тоже будут двигаться не поступательно, как и само тело. Безосновательное использование закона о трении в дифференциальной форме привело к ошибоч-

ному заключению, что для скользящих тел с вращением сила трения будет подобна вязкому [23]. Отсутствие трения покоя не подтвердилось и экспериментально [24]. Заметим, что в [24] этот качественный результат авторами работы замечен не был, хотя трение покоя отчетливо видно на всех приведенных графиках экспериментальных зависимостей. Вместо закона о трении в дифференциальной форме следует использовать метод кинематических зон [22], что позволяет корректно использовать классический закон о трении и, в таких случаях, с необходимыми для этого поправками.

Невозможность определения скорости и глубины погружения, приводит к необходимости использовать в теории бурения эмпирические соотношения, общее количество которых, только основных общепринятых, насчитывает около 16 [10]. Введены они на основе обработки промысловых данных и привязаны, как правило, к тем территориальным областям, где были получены. Вводятся обычно модели с распределенными параметрами на основе линейного волнового уравнения для крутильных или продольных колебаний (например [1; 2]) либо без учета возможности погружения БК, либо с использованием упомянутых выше эмпирических соотношений. Модели же с конечным числом степеней свободы вводятся очень редко.

В МЗА при использовании общих положений механики трудности те же, хотя вводимые модели не подразумевают использование эмпирических соотношений. Как уже отмечалось, такого удается добиться за счет иного способа задания силы лобового сопротивления в сравнении с ОМБ. Такая сила ищется в виде заранее неизвестной функции с запаздывающим аргументом (например [5; 6]), учитывающей толщину срезаемого долотом слоя грунта. Что позволяет избегать отмеченные выше математические некорректности и несоответствия с реальностью. Но при таком подходе возникают чисто математические трудности. Вызваны они тем, что в настоящее время теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в сравнении с обыкновенными, развита не так хорошо, как хотелось бы. При численных расчетах возникают трудности в определении запаздывающего аргумента, если он не постоянен, а зависит от времени. Поэтому постоянство запаздывающего аргумента является одним из главных допущений МЗА, что не дает возможности моделировать переходные процессы бурения, играющие важную роль. Здесь рассматриваются в основном модели БК с конечным числом степеней свободы, применяемые, главным образом, для изучения эффектов *stick-slip*. К недостаткам таких моделей следует отнести и то, что сила сопротивления считается независимой от скорости погружения [25], а фрикционная составляющая определяется в соответствии с законом Амонтона – Кулона, хотя долото не совершает поступательного движения. Изменение прочности грунта и влияние ударов здесь также не учитывается. И говорить о математически строгой теории бурения здесь тоже нельзя.

Описание двухмассовой модели БК. Для ранее введенной динамической модели БК [9] (рис. 1) принимается во внимание следующее. Длину значительной части БК составляют основные трубы, предназначен-

ные для передачи вращения и подачи промывочной жидкости от устья скважины вниз, к забою.

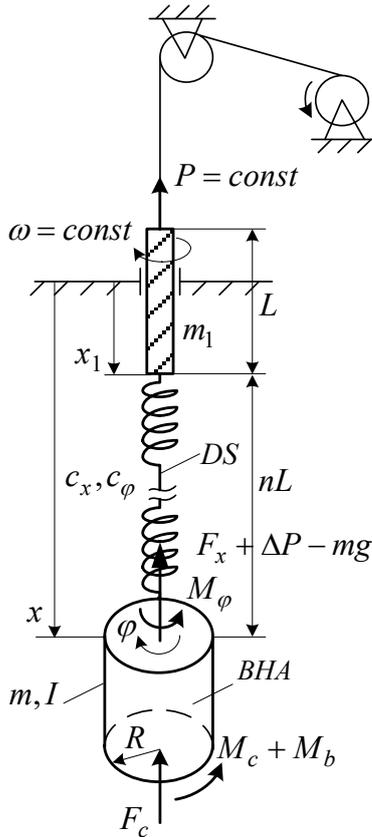


Рис. 1. Двухмассовая модель БК при роторном способе бурения (*DS* — обыкновенные трубы; *BHA* — утяжеленные)

Силы упругости таких труб позволяют лишь частично передавать вращательное движение от ведущей трубы к долоту, которое считается режущего действия. Тем самым принято, что грунт в забое состоит из не столь твердых, мягких пород. Упругая часть колонны при бурении вертикальной скважины представляет собой прямолинейную нитку длины nL , состоящую из свинченных между собой n основных бурильных труб, обозначаемых в дальнейшем через *DS*, каждая из которых имеет длину L и массами которых можно пренебречь (рис. 1). Эта нитка в процессе бурения периодически наращивается, а ее упругие свойства при возникновении крутильно-продольных автоколебаний характеризуются жесткостью на растяжение-сжатие $c_x = \frac{E_{DS} F_{DS}}{nL}$ и жесткостью на кручение $c_\phi = \frac{G_{DS} F_{DS}}{nL}$, где E_{DS}, G_{DS}, F_{DS} — соответственно модуль 1-го и 2-го рода, площадь поперечного сечения для основных бурильных труб.

Возможностью возникновения поперечных деформаций колонны будем пренебрегать. Пружины растяжения-сжатия и кручения с указанными жесткостями в дальнейшем будут заменять упругую часть БК. К верхним концам таких пружин присоединена ведущая труба БК, которая считается абсолютно жесткой, имеет массу m_1 , длину L и закручивается с постоянной уг-

ловой скоростью ω двигателем роторного стола, обладающим достаточной для этого мощностью. Ведущая труба подвешена на канате талевой системы, натяжение которого предполагается постоянным и равным P . К нижним концам пружин присоединены утяжеленные бурильные трубы, которые тоже считаются абсолютно жесткими, жестко связанными между собой и долотом. Эта часть БК, которая в дальнейшем обозначается как *BHA* и будет восприниматься как единое целое, имеет массу m с осевым моментом инерции I и длиной L_{BHA} . Для определения положения *BHA* вводятся координаты ϕ, x — через которые определяются для верхнего сечения соответственно угол его поворота и перемещение вдоль оси, направленной вниз по вертикали от устья скважины; для определения положения ведущей трубы будет достаточно только одной координаты x_1 , через которую определяется положение центра ее нижнего сечения по отношению к устью скважины в направлении той же оси. Глубина скважины может находиться по формуле: $H = x + L_{BHA}$. Заметим, что координаты ϕ и x будут соответствовать углу закручивания и линейному перемещению нижнего конца у пружин кручения и растяжения-сжатия, заменяющих упругую часть БК (рис. 1). Скорость погружения и угловая скорость долота равны \dot{x} и $\dot{\phi}$, как у *BHA*. Боковое трение для принятой модели БК не учитывается ввиду отсутствия соприкосновений с боковыми стенками вертикальной скважины, не берется во внимание и трение, возникающее на поверхности труб от промывочной жидкости.

В забое скважины возникают сила лобового сопротивления F_c и момент верчения M_c , которые будут определяться соответственно по формуле (4) и согласно закону Кулона: $M_c = -\rho F_c$. В приведенной формуле реакция опоры равна силе лобового сопротивления F_c , ρ — удельный коэффициент момента верчения на единицу давления в забое:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \text{sign} \dot{\phi}, & \text{if } \dot{\phi} \neq 0; \\ \rho = [-\rho_1, \rho_1] & \text{if } \dot{\phi} \equiv 0, (\epsilon_\rho = \rho_1/\rho_0 \geq 1) \end{cases}$$

Влияние промывочной жидкости на работу долота учитывается моментом вязкого сопротивления: $M_b = -\mu \dot{\phi}$, где μ — коэффициент вязкого сопротивления. Со стороны упругой части БК на долото передаются нелинейные продольная сила упругости и момент кручения:

$$F_x = -c_x(x - x_1 - nL) \left[1 + c_1(x - x_1 - nL)^2 \right];$$

$$M_\phi = -c_\phi(\phi - \omega t) \left[1 + c_2(\phi - \omega t)^2 \right]$$

где c_1, c_2 — поправочные коэффициенты для учета нелинейных составляющих таких деформаций. Учитывается также добавочное продольное усилие ΔP , возникающее при больших углах закрутки БК со стороны пружины кручения, когда та стремится уменьшить свои продольные размеры. Скручивание носит стесненный характер, поэтому укорочения пружины не происходит, а возникает дополнительное продольное

усилие [26]: $\Delta P = \frac{E_{DS} J_{DS}}{2(nL)^2} (\varphi - \omega t)^2$, где J_{DS} — момент инерции поперечного сечения труб DS.

Сила лобового сопротивления. Учитывая существующие отличия грунта от воздушных сред, силу лобового сопротивления предлагается искать несколько иначе в сравнении с тем, как это принято делать. Эту силу следует искать не только в зависимости от скорости погружения тела в грунт, но и от возможного изменения прочности грунта при оказании силового воздействия. При бурении такое силовое воздействие может быть непрерывным — при вращении долота и кратковременным — в результате возможных ударов БК о забой при восстановлении контакта долота с опорной поверхностью после кратковременного отрыва. Решение этого вопроса обсуждается пока лишь только в работах автора, например, в недавней статье [9].

Для БК с долотом режущего действия, износ которого не учитывается, силу лобового сопротивления, с учетом действия удара ($x > x_{**}$), следует искать в таком виде [9]:

$$F_c = \begin{cases} F_0 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bR\dot{\varphi} + b_1(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) e^{-\alpha(x-x_{**})} + \Delta}, & \text{if } \dot{\varphi} > 0; \\ F_0 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b_1(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) e^{-\alpha(x-x_{**})} + \Delta}, & \text{if } \dot{\varphi} \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь были приняты такие обозначения: F_0 — наибольшая сила лобового сопротивления, подлежащая определению; b, b_1, Δ — коэффициенты аппроксимации, определяемые экспериментально; α — коэффициент затухания, характеризующий быстроту восстановления прочностных свойств грунта по мере удаления от места удара; R — радиус долота; $\langle \cdot \rangle$ точкой обозначается дифференцирование по времени t . Заметим, формула (1), выражающая прямую пропорциональную зависимость от скорости погружения \dot{x} и обратную — от угловой скорости вращения $\dot{\varphi}$ долота, что формально соответствует экспериментальным и данным промысловой практики [1]. Наличие свободного слагаемого Δ гарантирует избегания упомянутых выше математических и физических некорректностей в области нулевых значений для кинематических величин \dot{x} и $\dot{\varphi}$, а также позволяет определять эффекты *stick-slip*, когда $\dot{x} \equiv 0$ и $\dot{\varphi} \equiv 0$ по отдельности или одновременно. Обобщенная начальная скорость $\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-$ считается прямо пропорциональной силе комбинированного удара, также влияющего на потерю прочности грунта; где $\dot{x}_-, \dot{\varphi}_-$ — начальные скорости составляющих комбинированного удара соответственно прямого и вращательного; a — безразмерный коэффициент пропорциональности, характеризующий отличие изменения прочности среды от вращательного удара в продольном направлении в сравнении с другой составляющей удара. Функция $e^{-\alpha(x-x_{**})}$ определяет предполагаемый закон затухания силы удара при удалении от места удара, где x_{**} — координата, определяющая положение

долота в момент, где произошел последний удар БК о грунт забоя; в случаях нескольких ударов БК о забой, нанесенных в разные моменты, в формуле (1) будет учитываться действие только последнего из них. Что оправданно, если допустить быстрое затухающее действие текущего удара на грунт в забое, когда $\alpha \gg 1$. При отсутствии ударов следует считать, что $\dot{x}_- \equiv 0$; $\dot{\varphi}_- \equiv 0$.

В записанной формуле (1) принимается во внимание направление вращения долота: при $\dot{\varphi} > 0$ считается, что прочность грунта, а значит, и сама сила сопротивления уменьшается за счет силового воздействия долота, а при $\dot{\varphi} \leq 0$ — нет. Объясняется это тем, что при вращении в положительном направлении, в направлении заостренных концов резцов, каждый резец снимает свою канавку в очередном слое грунта, что приводит к рыхлению этого слоя и уменьшению его прочности перед тем, как будет снят весь слой. Причем чем быстрее вращается долото, тем быстрее будет происходить такое рыхление, и станет более заметным уменьшение силы лобового сопротивления, что проявляется в более быстром погружении БК. Вращение в отрицательном направлении будет соответствовать действию резцов тыльными, не острыми сторонами, на грунт, а значит, они не смогут уменьшать его прочность. Описанный механизм снижения прочности подходит для не столь твердых грунтов и объясняет более высокую эффективность применения долота режущего действия.

Эталонный удар. Как уже было сказано выше, действие текущего удара можно учитывать не по величине его силы, а через сравнение с вводимым эталонным ударом. Это позволит избежать затруднений с нахождением силы удара, определение которой стереомеханической теорией Ньютона [18; 19] не предусмотрено. Для обсуждаемых задач очень важно иметь возможность определять начальные условия послеударного процесса. Например, начнется погружение БК в грунт или нет, а если начнется, то с какой начальной скоростью. И сделать это можно через сравнение текущего удара с эталонным. Для этого среди текущих ударов надо будет различать эффективные и холостые удары [9]. Эффективным назовем такой удар, силового воздействия которого будет достаточно для начала погружения долота в грунт, а холостым — удар меньшей силы, в результате которого погружение БК в грунт начаться не может.

Эталонный удар определим как удар, который по своей силе разделяет между собой эффективные и холостые удары, т. е. это наибольший из возможных по величине силы удар, в результате которого погружение БК в грунт еще не может начаться. Сила удара, как это было оговорено выше, характеризуется его начальной скоростью.

Начальную скорость проникания ударника в грунт следует определять как разницу между начальными скоростями текущего эффективного удара и эталонного — в элементарной теории проникания это вводится аксиоматически, но может быть и обосновано с помощью теории Герца.

Чтобы выделить эталонный удар среди остальных, необходимо знать его начальную скорость, определение которой зависит от выбора динамической модели БК.

Предполагаемый сценарий работы БК. При бурении скважин при работе БК с долотом дробяще-скалывающего или режущего действия могут возникнуть такие варианты:

1. Нормальный режим бурения, когда скорость вращения долота будет достаточной для необходимого уменьшения прочности породы и углубления забоя скважины.

2. Приостановка углубления скважины вследствие замедления вращения долота (или даже полной его остановки), когда создаваемого силового воздействия будет недостаточно для нужного снижения прочности породы.

3. Отрыв долота от забоя при возникновении упругих продольных сил, превышающих силу тяжести БК и направленных вверх.

4. Удар БК о забой скважины при завершении кратковременного отрыва долота от породы. Такой удар может привести либо к началу погружения, если он обладает достаточной для этого силой, либо — нет.

Начало погружения БК после приостановки углубления забоя скважины, что может происходить как под воздействием возможного удара, так и силового воздействия вращающимся долотом — либо по отдельности, либо при их совместном действии.

Уравнения движения для принятой модели БК.

Для принятой модели БК введем такие обозначения. Функция влияния:

$$f(t) = 1 - \frac{c_x}{mg}(x - x_1 - nL) \left[1 + c_1(x - x_1 - nL)^2 \right] - \frac{E_{DS} J_{DS}}{2mg(nL)^2} (\varphi - \omega t)^2,$$

с помощью которой определяется сила осевого давления на долото в текущий момент времени. Критическая положительная угловая скорость долота $\dot{\varphi}_*$, превышение которой приводит к началу погружения:

$$\dot{\varphi}_* = \frac{\Delta}{bR} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 - \frac{b_1}{\Delta} (\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) e^{-\alpha(x-x^{**})} \right]. \quad (2)$$

Коэффициент динамичности k , определяющий меру силового воздействия на породу, и вспомогательная функция G для сокращения записи формулы (1) равны:

$$k = \begin{cases} 1 + \frac{bR}{\Delta} \dot{\varphi} + \frac{b_1}{\Delta} (\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) e^{-\alpha(x-x^{**})}, & \text{if } \dot{\varphi} > 0; \\ 1 + \frac{b_1}{\Delta} (\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) e^{-\alpha(x-x^{**})}, & \text{if } \dot{\varphi} \leq 0, \end{cases}$$

$$G(t) = \begin{cases} \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bR\dot{\varphi} + b_1(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) e^{-\alpha(x-x^{**})} + \Delta}, & \text{if } \dot{\varphi} > 0; \\ \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b_1(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) e^{-\alpha(x-x^{**})} + \Delta}, & \text{if } \dot{\varphi} \leq 0. \end{cases}$$

Здесь $n_1 = \sigma_1 / \sigma_0$ — запас прочности грунта для силы тяжести ВНА, где σ_1 — предельно допустимое нормальное напряжение грунта; $\sigma_0 = mg/S$, где S —

усредненная площадь пятна контакта долота с породой. Начальные условия можно принять, например, такие:

$$x_0 = nL; \dot{x}_0 = 0; x_{10} = 0; \dot{x}_{10} = 0; \varphi_0 = 0; \dot{\varphi}_0 = \omega; x^{**} = 0; \dot{x}_- = 0; \dot{\varphi}_- = 0.$$

Уравнения движения для ведущей и утяжеленных труб БК при бурении:

$$\begin{cases} \text{if } f(t) > 0; x \geq x^{**}; nL \leq x \leq (n+1)L : \\ \dot{\varphi} \equiv 0 : \text{if } |\varphi - \omega t| \left[1 + c_2(\varphi - \omega t)^2 \right] < \frac{\rho_1 mg}{c_\varphi} f(t); \\ \dot{\varphi} \neq 0 : I\ddot{\varphi} + c_\varphi(\varphi - \omega t) \left[1 + c_2(\varphi - \omega t)^2 \right] + \mu\dot{\varphi} = \\ \quad - \rho_0 mg \text{sign} \dot{\varphi} \begin{cases} f(t), & \text{if } \dot{x} \equiv 0; \\ n_1 G(t), & \text{if } \dot{x} > 0; \end{cases} \\ \dot{x} \equiv 0 : mgf(t) - F_0 \frac{1}{k} = 0, \text{ if } \dot{\varphi} < \dot{\varphi}_*; \\ \dot{x} \geq 0 \text{ u } \dot{\varphi} \geq \dot{\varphi}_* : \ddot{x} = gf(t) - n_1 g G(t); \\ m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - P + mg \left[1 - f(t) \right] \end{cases} \quad (3)$$

Кратковременная фаза зависания БК в воздухе при потере контакта с забоем описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \text{if } x \leq x^{**} : \\ m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - P + mg \left[1 - f(t) \right]; \\ \ddot{x} = gf(t); \\ I\ddot{\varphi} = -c_\varphi(\varphi - \omega t) \left[1 + c_2(\varphi - \omega t)^2 \right], \end{cases} \quad (4)$$

где x^{**} — координата отрыва долота от забоя, определяемая из условия: $f(t) = 0 \Rightarrow x^{**} = x$. Рассмотрение фазы зависания необходимо в определении начальных скоростей для составляющих комбинированного удара $\dot{x}_- = \dot{x}|_{x=x^{**}}; \dot{\varphi}_- = \dot{\varphi}|_{x=x^{**}}$.

Запишем теорему импульсов для составляющих комбинированного удара в момент соприкосновения долота с грунтом забоя, когда $x = x^{**}$, а также учтем связь между нормальным S_n и касательным S_τ ударными импульсами в соответствии с гипотезой Рауса:

$$\begin{cases} m\dot{x}_0 - m\dot{x}_- = S_n; \\ I\dot{\varphi}_0 - I\dot{\varphi}_- = S_\tau; \\ S_\tau = \rho S_n. \end{cases} \quad (5)$$

В системе уравнений (5) для нахождения решений не хватает одного уравнения, записать которое раньше не удавалось. Что объясняет отсутствие попыток в определении начальных условий послеударного процесса в существующих работах по бурению. Недостающее уравнение будет определять начальную скорость проникания как разность между начальными скоростями эффективного и эталонного ударов. Для составления такого уравнения сначала определим начальную обобщенную скорость эталонного удара: $(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)_*$, которая будет называться критической. При этом следует иметь ввиду, что при завершении эталонного уда-

ра погружение и вращение долота приостановятся: $\dot{x} = \dot{x}|_{x=x^{**}} = 0$; $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}|_{x=x^{**}} = 0$, а возникающая продольная сила, действующая на долото, будет уравновешена силой лобового сопротивления: $mgf(t) - F_0 \frac{1}{k} = 0$, от-

куда следует, что $\sigma - k \frac{\sigma}{k} = 0 \Rightarrow \sigma_d = \frac{\sigma}{k} \Rightarrow \sigma_{d1} = \frac{\sigma_1}{k^*}$,

где $\sigma = \sigma_0 f(t)$. Здесь $\sigma_d, \sigma_{d1}, k^*$ — соответственно динамическое, предельно допустимое динамическое напряжения и коэффициент динамичности для предельного равновесного состояния долота перед погружением. Срыв на погружение произойдет, когда $\sigma_{d1} = \sigma$, откуда находится критическая скорость для эталонного комбинированного удара:

$$(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)_* = \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right].$$

Начальная обобщенная скорость текущего удара находится через сравнение начальных обобщенных скоростей такого удара с эталонным:

$$\dot{x}_0 + aR\dot{\varphi}_0 = \dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_- - (\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)_*. \quad (6)$$

Равенство (6) и дает недостающее уравнение для системы (5) для определения начальных скоростей $\dot{x}_0, \dot{\varphi}_0$ по отдельности, что необходимо для описания послеударного процесса. Для текущего удара могут возникать такие случаи: $(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) > (\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)_*$ или $(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) \leq (\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)_*$, где первый случай будет соответствовать погружению БК в грунт, а второй — нет. Возникает возможность описать послеударное состояние БК с теперь уже определяемыми начальными условиями:

$$x_0 = x^{**}; \varphi_0 = \varphi|_{x=x^{**}}; x_{10} = x_1|_{x=x^{**}}; \dot{x}_{10} = \dot{x}_1|_{x=x^{**}},$$

а $\dot{x}_0, \dot{\varphi}_0$ — находятся из системы уравнений (5)–(6).

Заметим, что критическая угловая скорость долота $\dot{\varphi}_*$, необходимая для начала погружения БК для завершения остановки из-за недостаточного силового воздействия долота, определяется аналогичным образом. Как это было сделано только что, при нахождении критической обобщенной начальной скорости эталонного удара. Только теперь надо считать, что для лобового сопротивления определяющей является не начальная скорость удара, а частота вращения долота. Записанная формула (2) для нахождения $\dot{\varphi}_*$ заодно определяет и возможности возникновения эффекта *stick-slip*. Могут возникать такие варианты заклинивания:

а) при $0 \leq \dot{\varphi} \leq \dot{\varphi}_*$ или $\dot{\varphi} < 0$ будет наблюдаться вращение долота без погружения в грунт (при $\dot{\varphi} < 0$ вращение долота происходит в направлении затупленных концов резцов);

б) при $\dot{\varphi} \equiv 0$ и $c_\varphi |\varphi - \omega t| [1 + c_2 (\varphi - \omega t)^2] < \rho_1 mgf(t)$ долото будет заблокировано в поступательном и вращательном движениях;

в) кратковременное погружение без вращения долота может быть только в результате возможного удара, когда $\dot{\varphi}_0 = 0$ и $c_\varphi |\varphi - \omega t| [1 + c_2 (\varphi - \omega t)^2] < \rho_1 mgf(t)$, при завершении отрыва БК от забоя и когда $(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) > (\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)_*$.

Начальные кинематические состояния долота будут зависеть от силы удара, т. е. от начальных скоростей, характеризующих комбинированный удар. Считая, что $q = m/I$, для этих состояний начальные скорости послеударного процесса будут определяться так [9]:

е) Начало погружения бурильной колонны с вращением долота, что может произойти, когда:

$$v_- > \frac{1}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right]; \dot{\varphi}_- > \frac{\rho_0 q}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right].$$

Тогда начальные скорости погружения и вращения долота будут равны:

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_- - \frac{1}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right];$$

$$\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_- - \frac{\rho_0 q}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right];$$

ф) Вращение долота без погружения бурильной колонны, что может произойти, когда:

$$\dot{x}_- \leq \frac{1}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right]; \dot{\varphi}_- > \frac{\rho_0 q}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right].$$

Тогда начальные скорости равны: $\dot{x}_0 = 0$; $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_- - \rho_0 q \dot{x}_-$.

г) Погружение бурильной колонны без вращения долота, что может произойти, когда:

$$\dot{x}_- > \frac{1}{1 + \rho_1 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right]; \dot{\varphi}_- \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right]$$

Тогда начальные скорости равны:

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_- - \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right]; \dot{\varphi}_0 = 0.$$

д) Остановка вращения долота без погружения бурильной колонны, что может произойти, когда:

$$\dot{x}_- \leq \frac{1}{1 + \rho_1 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right]; \dot{\varphi}_- \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right].$$

Тогда начальные скорости равны: $\dot{x}_0 = 0$; $\dot{\varphi}_0 = 0$.

Это дает возможность описать послеударное состояние бурильной колонны с такими начальными условиями (в дальнейшем принималось, что $b_1 = b/a$):

$$x_0 = x^{**}; \varphi_0 = \varphi|_{x=x^{**}}; x_{10} = x_1|_{x=x^{**}}; \dot{x}_{10} = \dot{x}_1|_{x=x^{**}},$$

а $\dot{x}_0, \dot{\varphi}_0$ — находятся по формулам одного из пунктов *a, b, c* или *d*, выбор которого зависит от вычисляемых скоростей $\dot{x}_-, \dot{\varphi}_-$.

Уравнения (3)–(4) с указанными условиями переключения и начальными условиями позволяют численно моделировать работу буровой колонны во время углубления забоя скважины.

Примеры результатов численного моделирования. Для проведения численного моделирования все необходимые числовые данные брались из работы [27], выраженные в системе СИ:

$$m = \frac{\pi}{4} (D_{BHAe}^2 - D_{BHAi}^2) \rho_c L_{BHA} = 17506.45;$$

$$m_1 = \frac{\pi}{4} (D_{DSe}^2 - D_{DSi}^2) \rho_c L_{DS} = 335.441;$$

$$I = \frac{\pi}{32} (D_{BHAe}^4 - D_{BHAi}^4) \rho_c L_{BHA} = 158.267,$$

где $D_{DSe}, D_{BHAe}, D_{DSi}, D_{BHAi}$ — соответственно внешний и внутренний диаметры труб БК (индексы e и i обозначают внешний и внутренний диаметры):

$$D_{BHAe} = 0.21, D_{BHAi} = 4D_{BHAe} / 5 = 0.168;$$

$$D_{DSe} = 0.13, D_{DSi} = 4D_{DSe} / 5 = 0.104.$$

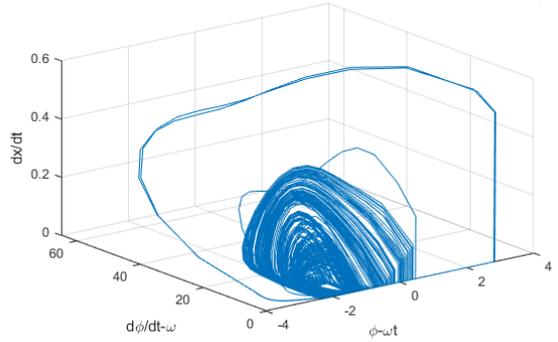
Диаметр долота $D = 0.3$; плотность материала, коэффициент Пуассона, модули Юнга и сдвига для обыкновенных и утяжеленных труб принимались одинаковыми:

$$\rho_c = 7800, \nu = 0.3, E = 2.1 \cdot 10^{11}, G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8.1 \cdot 10^{10}.$$

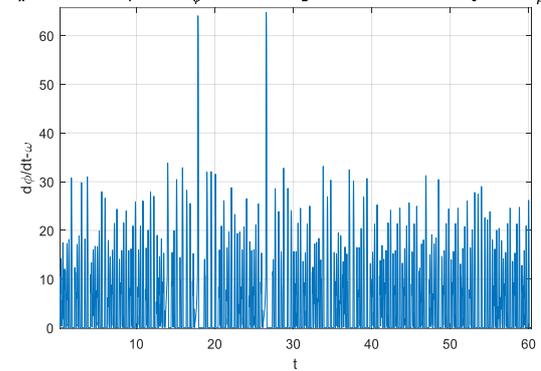
Остальные численные значения, необходимые для моделирования, приведены на графиках сразу под заголовком каждого из них. Эти графики соответствуют двум примерам численного моделирования процесса бурения с разными исходными данными согласно уравнениям (3)–(6). Каждый из этих примеров иллюстрируется четырьмя графиками, показанных на рис. 2 и 3. Заключительным в этих примерах является график изменения глубины в увеличенном масштабе.

Графики наглядно демонстрируют динамику происходящих процессов во время бурения в течение рассматриваемого интервала текущего времени длительностью 60 с. Исходные данные, как и получаемые результаты в виде графиков, соответствуют реальным величинам, определяемым в системе СИ. Приведенные примеры указывают на проявление хаотичных режимов бурения, что обнаруживается в большинстве случаев и при других исходных данных. Причем возможность выхода на обычный периодический режим бурения наблюдалась реже, чем выход на режим детерминированного хаоса. Такая же картина с преобладанием хаотичных режимов бурения отмечалась и в предыдущей работе [9] для аналогичной двухмассовой модели описания крутильно-продольных автоколебаний БК с долотом дробяще-скалывающего действия.

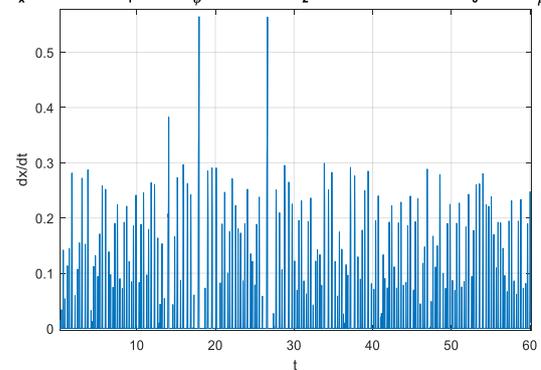
ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ДЛЯ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ
($\omega = 7.02$; $n_1 = 14$; $b = 10$; $\Delta = 1$; $\mu = 0.5$; $n = 100$; $L_{DS} = 9$; $L_{BHA} = 1.8e+02$; $c_x = 1.11e+06$; $c_1 = 1.5$; $c_\phi = 2.97e+03$; $c_2 = 3.5$; $P = 6.58e+04$; $\rho_0 = 0.5$; $\epsilon_\rho = 2.5$)



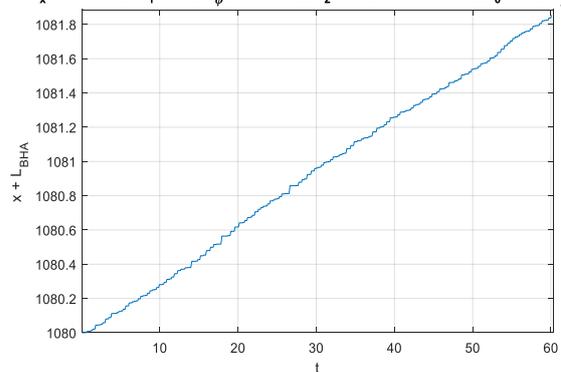
ОТНОСИТЕЛЬНАЯ УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ ДОЛОТА
($\omega = 7.02$; $n_1 = 14$; $b = 10$; $\Delta = 1$; $\mu = 0.5$; $n = 100$; $L_{DS} = 9$; $L_{BHA} = 1.8e+02$; $c_x = 1.11e+06$; $c_1 = 1.5$; $c_\phi = 2.97e+03$; $c_2 = 3.5$; $P = 6.58e+04$; $\rho_0 = 0.5$; $\epsilon_\rho = 2.5$)



ЛИНЕЙНАЯ СКОРОСТЬ ПОГРУЖЕНИЯ ДОЛОТА
($\omega = 7.02$; $n_1 = 14$; $b = 10$; $\Delta = 1$; $\mu = 0.5$; $n = 100$; $L_{DS} = 9$; $L_{BHA} = 1.8e+02$; $c_x = 1.11e+06$; $c_1 = 1.5$; $c_\phi = 2.97e+03$; $c_2 = 3.5$; $P = 6.58e+04$; $\rho_0 = 0.5$; $\epsilon_\rho = 2.5$)



ГЛУБИНА ПОГРУЖЕНИЯ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ
($\omega = 7.02$; $n_1 = 14$; $b = 10$; $\Delta = 1$; $\mu = 0.5$; $n = 100$; $L_{DS} = 9$; $L_{BHA} = 1.8e+02$; $c_x = 1.11e+06$; $c_1 = 1.5$; $c_\phi = 2.97e+03$; $c_2 = 3.5$; $P = 6.58e+04$; $\rho_0 = 0.5$; $\epsilon_\rho = 2.5$)



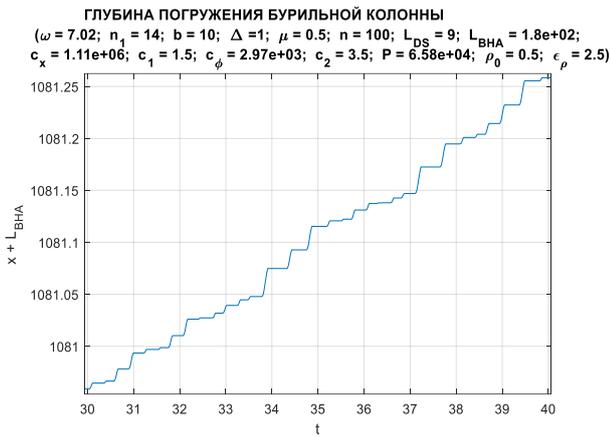


Рис. 2. Графики первого примера, показывающие динамику процесса бурения в режиме проявления детерминированного хаоса

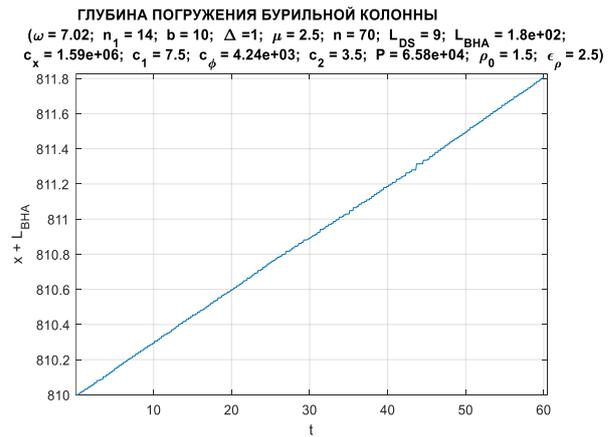
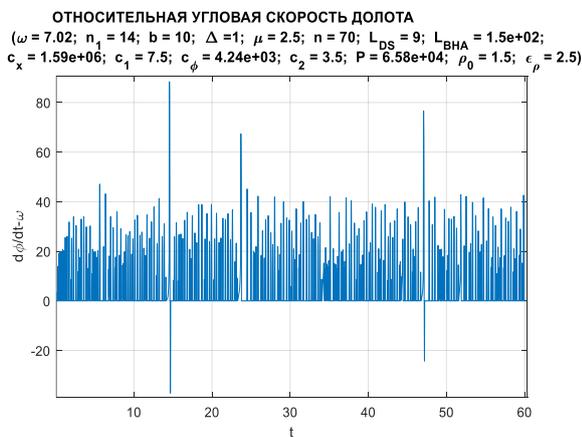
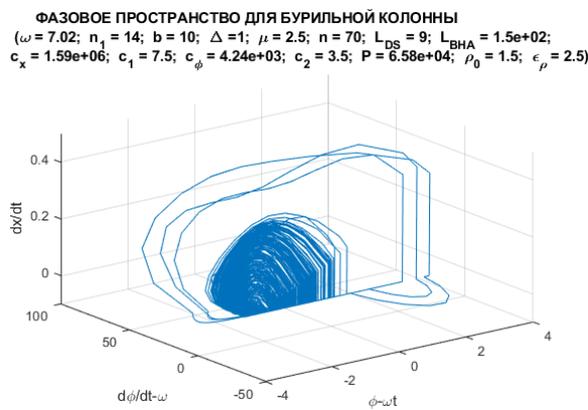


Рис. 3. Графики второго примера, показывающие динамику процесса бурения в режиме проявления детерминированного хаоса

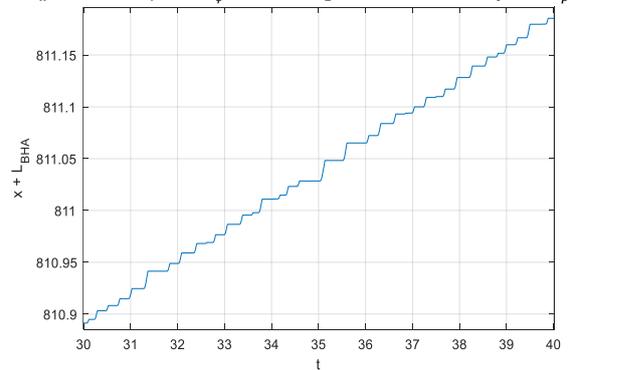


Рис. 3. Графики второго примера, показывающие динамику процесса бурения в режиме проявления детерминированного хаоса

Заключение. Дан краткий обзор существующих моделей бурильной колонны при роторном бурении. Предложенный вариант построения математически строгой теории бурения показан на примере описания крутильно-продольных автоколебаний для двухмассовой модели БК с долотом режущего действия. Избежать математические и физические некорректности удалось благодаря учету потери прочности породы для силы лобового сопротивления. Непрерывного — в результате вращения долота и ударного — при завершении кратковременного отрыва БК от поверхности забоя. Сделано это было с помощью нового вида аналитического выражения для силы лобового сопротивления, используя аппроксимацию Паде 1-й степени. Заложённые принципы позволяют говорить о возможности построения математически строгой теории бурения и для других моделей, в том числе и с распределёнными параметрами.

Из-за замены упругой части БК на безмассовые пружины кручения и растяжения-сжатия данная модель не позволяет учитывать волновые процессы и не дает возможность подбирать наилучшую силу натяжения каната подвеса, необходимую для задания оптимальных режимов бурения. Данная модель дает первое приближение в выявлении динамических процессов, возникающих в БК с учетом ее погружения при углублении скважины. Введенная модель доказывает возможность возникновения хаотичных режимов бурения, что демонстрируется результатами численного моделирования в виде приведенных графиков.

Литература

1. Юнин Е.К., Хегай В.К. Динамика глубокого бурения. М.: Недра-Бизнесцентр, 2004. 286 с.
2. Малюгин А.А., Казунин Д.В. Расчет колебаний бурильной колонны в режиме реального времени в составе тренажерных систем // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 1. С. 91-101.
3. Tucker R.W., Wang C. On the effective control of torsional vibrations in drilling systems // Journal of Sound and Vibration. 1999. V. 224. № 1. P. 101-122.
4. Monteiro H.L.S., Trindade M.A. Performance analysis of proportional-integral feedback control for the reduction of stick-slip-induced torsional vibrations in oil well drillstrings // Journal of Sound and Vibration. 2017. V. 398. P. 28-38.
5. Richard T., Germaу C., Detournay E. A simplified model to explore the root cause of stick-slip vibrations in drilling systems with drag bits // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 305. № 3. P. 432-456.
6. Besselink B., van de Wouw N., Nijmeijer H. A semi-analytical of stick-slip oscillations in drilling systems // ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2011. V. 6. P. 021006 (9 pages).
7. Zhu X.H., Tang L.P., Yang Q.M. A literature review of approaches for stick-slip vibration suppression in oilwell drillstring // Advances in Mechanical Engineering. 2014. № 6. P. 967952.
8. Tang L., Guo B., Zhu X., Shi Ch., Zhou Y. Stick-slip vibrations in oil well drillstring: A review // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2020. V. 12. P. 1-23.
9. Корнатов В.А. Крутильно-продольные автоколебания бурильной колонны с долотом дробяще-скалывающего действия при постоянном натяжении каната подвеса // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2023. № 1. С. 45-60.
10. Синеев С.В. Модели процесса бурения и их практическое использование // Вестн. Ассоциации буровых подрядчиков. 2009. № 3. С. 35-44.
11. Сагомоян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
12. Блехман И.И. Вибрационная техника. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
13. Цейтлин М.Г., Верстов В.В., Азбель Г.Г. Вибрационная техника и технология в свайных и буровых работах. Л.: Стройиздат (Ленингр. отд-ние), 1987. 263 с.
14. Тарасов В.Н., Бояркина И.В., Коваленко М.В., Кузнецов С.М., Шлегель И.Ф. Теория удара в строительстве и машиностроении. М.: Изд-во АСВ, 2006. 336 с.
15. Корнатов В.А. Построение математически строгой теории бурения // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО'20): материалы VII Междунар. конф. (7-12 сент. 2020 г.). Улан-Удэ, 2020. С. 124-127.
16. Корнатов В.А. Элементы строгой теории бурения // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО'17): материалы VI Междунар. конф. (26 июня - 01 июля 2017 г.). Улан-Удэ, 2017. С. 221-226.
17. Корнатов В.А. Новый метод описания процесса бурения скважин и обнаружение режимов детерминированного хаоса // Проблемы механики современных машин: материалы VI Междунар. конф. (29 июня - 04 июля 2015 г.). Улан-Удэ, 2015. С. 127-140.
18. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. М.: Изд-во лит. по строительству, 1985. 448 с.
19. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-ние), 1976. 320 с.
20. Крагельский И.В., Щедров В.С. Развитие науки о трении. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 234 с.
21. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка. Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60-77.
22. Корнатов В.А. Парадоксы Пенлеве для классических механических систем с сухим трением и ключ к их решению // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО'20): материалы VII Междунар. конф. (7-12 сент. 2020 г.). Улан-Удэ, 2020. С. 121-124.
23. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.: Ижевск: R&CDynamics, 2010. 183 с.
24. Борисов А.В., Караваев Ю.Л., Мамаев И.С., Ермакова Н.Н., Иванова Т.Б., Тарасов В.В. Экспериментальное исследование движения тела с осесимметричным основанием, скользящего по шероховатой поверхности // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 3. С. 547-577.
25. Detournay E., Defourny P. A phenomenological model for the drilling action of drag bits, International J. Rock Mech. Min. Sci. Geomechanics Abstracts. 1992. V. 29. № 1. P. 13-23.
26. Нагаев Р.Ф., Исаков К.А., Лебедев Н.А. Динамика горных машин. СПб.: Изд-во СПбГИ (ТУ), 1996. 155 с.
27. Detournay E., Defourny P. A phenomenological model for the drilling action of drag bits // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. 1992. V. 29. № 1. P. 13-23.

References

1. YUnin E.K., Hegaj V.K. Dynamics of deep drilling. M.: Nedra-Biznescentr, 2004. 286 p.
2. Malyugin A.A., Kazunin D.V. Calculation of drill string oscillations in real time as part of simulator systems // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2017. V. 13. Vyp. 1. P. 91-101.
3. Tucker R.W., Wang C. On the effective control of torsional vibrations in drilling systems // Journal of Sound and Vibration. 1999. V. 224. № 1. P. 101-122.
4. Monteiro H.L.S., Trindade M.A. Performance analysis of proportional-integral feedback control for the reduction of stick-slip-induced torsional vibrations in oil well drillstrings // Journal of Sound and Vibration. 2017. V. 398. P. 28-38.
5. Richard T., Germaу C., Detournay E. A simplified model to explore the root cause of stick-slip vibrations in drilling systems with drag bits // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 305. № 3. P. 432-456.
6. Besselink B., van de Wouw N., Nijmeijer H. A semi-analytical of stick-slip oscillations in drilling systems // ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2011. V. 6. P. 021006 (9 pages).
7. Zhu X.H., Tang L.P., Yang Q.M. A literature review of approaches for stick-slip vibration suppression in oilwell drillstring // Advances in Mechanical Engineering. 2014. № 6. P. 967952.
8. Tang L., Guo B., Zhu X., Shi Ch., Zhou Y. Stick-slip vibrations in oil well drillstring: A review // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2020. V. 12. P. 1-23.
9. Koronotov V.A. Torsional-longitudinal self-oscillations of a drill string with a crushing-chipping action bit under constant tension of the suspension rope // Journal of Mining Sciences. 2023. № 1. P. 45-60.
10. Sineev S.V. Models of the drilling process and their practical use // Reporter of the Association of Drilling Contractors. 2009. № 3. P. 35-44.
11. Sagomonyan A.YA. Penetration. M.: Izd-vo MGU, 1974. 299 p.
12. Blekhman I.I. Vibration technology. M.: Fizmatlit, 1994. 400 p.
13. Cejlin M.G., Verstov V.V., Azbel' G.G. Vibration equipment and technology in piling and drilling operations. L.: Strojizdat (Leningr. otd-nie), 1987. 263 p.

14. Tarasov V.N., Boyarkina I.V., Kovalenko M.V., Kuznecov S.M., SHlegel' I.F. Theory of impact in construction and mechanical engineering. M.: Izd-vo ASV, 2006. 336 p.
15. Koronotov V.A. Construction of a mathematically rigorous drilling theory // Matematika, ee prilozheniya i matematicheskoe obrazovanie (MPMO'20): materialy VII Mezhdunar. konf. (7-12 sent. 2020 g.). Ulan-Ude, 2020. P. 124-127.
16. Koronotov V.A. Elements of a strict theory of drilling // Matematika, ee prilozheniya i matematicheskoe obrazovanie (MPMO'17): materialy VI Mezhdunar. konf. (26 iyunya - 01 iyulya 2017 g.). Ulan-Ude, 2017. P. 221-226.
17. Koronotov V.A. A new method for describing the process of drilling wells and detecting modes of deterministic chaos // Problemy mekhaniki sovremennyh mashin: materialy VI Mezhdunar. konf. (29 iyunya - 04 iyulya 2015 g.). Ulan-Ude, 2015. P. 127-140.
18. Gol'dsmit V. Udar. Theory and physical properties of colliding bodies. M.: Izd-vo lit. po stroitel'stvu, 1985. 448 p.
19. Panovko YA.G. Fundamentals of the applied theory of vibrations and impact. L.: Mashinostroenie (Leningr. otd-nie), 1976. 320 p.
20. Kragel'skij I.V., SHCHedrov V.S. Development of the science of friction. M.: Izd-vo AN SSSR, 1956. 234 p.
21. Kontensu P. The relationship between sliding friction and spinning friction and its account in the theory of the top. Problemy giroskopii. M.: Mir, 1967. P. 60-77.
22. Koronotov V.A. Painlev's paradoxes for classical mechanical systems with dry friction and the key to their solution // Matematika, ee prilozheniya i matematicheskoe obrazovanie (MPMO'20): materialy VII Mezhdunar. konf. (7-12 sent. 2020 g.). Ulan-Ude, 2020. P. 121-124.
23. Andronov V.V., ZHuravlev V.F. Suffusion friction in the problem of mechanics. M.: Izhevsk: R&CDynamics, 2010. 183 p.
24. Borisov A.V., Karavaev YU.L., Mamaev I.S., Erdakova N.N., Ivanova T.B., Tarasov V.V. Experimental study of the motion of a body with an axisymmetric base sliding on a rough surface // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2015. V. 11. № 3. P. 547-577.
25. Detournay E., Defourny P. A phenomenological model for the drilling action of drag bits, International J. Rock Mech. Min. Sci. Geomechanics Abstracts. 1992. V. 29. № 1. P. 13-23.
26. Nagaev R.F., Isakov K.A., Lebedev N.A. Dynamics of mining machines. SPb.: Izd-vo SPPGI (TU), 1996. 155 p.
27. Detournay E., Defourny P. A phenomenological model for the drilling action of drag bits // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts. 1992. V. 29. № 1. P. 13-23.