УДК 531.011; 534.014; 543.1; 531.36 DOI:10.18324/2077-5415-2023-1-63-68

Фрикционные автоколебания скользящего с верчением диска относительно движущейся ленты при сухом трении наследственного типа

В.А. Коронатов

Ангарск, Россия
kortavik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X
Статья поступила 25.01.2023, принята 08.02.2023

Рассматривается ранее введенная автором обобщенная модель Ван-дер-Поля с грузом на движущейся ленте, но уже с трением и моментом верчения покоя наследственного типа. Грузом является диск, имеющий возможность совершать скольжение с верчением. Диск взаимодействует с пружиной растяжения-сжатия с закрепленным концом, как это было в классической модели, и пружиной кручения, свободный верхний конец которой закручивается с постоянной угловой скоростью, а нижний — присоединен к центру тела. Движение диска регулируется силой и моментом трения. Здесь предусмотрено корректное применение законов о моменте и силе трения — напрямую они здесь неприменимы из-за нарушения необходимых для этого условий. При использовании закона Кулона трущееся тело должно совершать чистое верчение, а при применении закона Амонтона – Кулона — поступательное. Часто применяемый закон о трении в дифференциальной форме при сложном движении тел не будет правомерен из-за нарушения необходимого условия для элементарных площадок пятна контакта. Метод кинематических зон позволяет для таких случаев корректно применить классический закон о трении, внося необходимые для этого поправки. При малых скоростях движения ленты и угловой скорости верчения возможны кратковременные остановки диска относительно ленты как в поступательной составляющей движения, так и во вращательной. Такую прерывистость движения принято называть эффектами stick-slip, и именно они вызывают наибольший интерес в последнее время. В моменты кратковременных остановок учитывается трение покоя наследственного типа, что определяется, согласно гипотезе А.Ю. Ишлинского и И.В. Крагельского, монотонно возрастающей функцией времени длительного контакта. Данная гипотеза распространена и на момент верчения покоя. Рассматривается случай с экспоненциальной характеристикой для трения и момента верчения покоя. Приведены уравнения, описывающие фрикционные автоколебания диска.

Ключевые слова: модель Ван дер Поля; фрикционные автоколебания; законы о трении; сухое трение; момент верчения; трение наследственного типа; метод кинематических зон; эффект *stick-slip*.

Frictional self-oscillations of a sliding disk with spinning relative to a moving belt with dry friction of a hereditary type

V.A. Koronatov

Angarsk, Russia
kortavik@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-1331-213X
Received 25.01.2023, accepted 08.02.2023

The generalized Van der Pol model, introduced earlier by the author, with a load on a moving belt, but already with friction and a rest torque of a hereditary type, is considered. The load is a disk that has the ability to slide with spinning. The disk interacts with a tension-compression spring with a fixed end, as it is in the classical model, and a torsion spring - the free upper end of which is twisted at a constant angular velocity, and the lower one is attached to the center of the body. The movement of the disc is regulated by the force and moment of friction. It provides for the correct application of the laws of moment and friction force - they are not directly applicable here due to the violation of the necessary conditions for this. When using Coulomb's law, the rubbing body must perform pure spinning, and when applying the Amonton-Coulomb law, translational one. The often applied law of friction in differential form in complex motion of bodies isn't legitimate due to violation of the necessary condition for elementary contact spot sites. The kinematic zone method allows for such cases to correctly apply the classical law of friction, making the necessary corrections for this. At low speeds of the belt movement and the angular velocity of spinning, short-term stops of the disk relative to the tape are possible both in the translational component of the movement and in the rotational one. Such discontinuity of movement is commonly called stick-slip effects and they are the ones that have been of the greatest interest lately. At the moments of short-term stops, the resting friction of the hereditary type is taken into account, which is determined according to the hypothesis of A.Y. Ishlinsky and I.V. Kragelsky, a monotonically increasing function of the time of prolonged contact. This hypothesis is also common at the time of rest spinning. The case with an expo-

nential characteristic for friction and the moment of rest rotation is considered. The equations describing the frictional self-oscillations of the disk are given.

Keywords: Van der Pol model; frictional self-oscillations; laws of friction; dry friction; torsion moment; hereditary type friction; kinematic zone method; tick-slip effect.

Введение. Моделируются фрикционные автоколебания диска (груза), имеющего возможность совершать скольжение с верчением относительно ленты привода, движущейся с постоянной скоростью. При малых скоростях возможны кратковременные остановки (залипания) диска в скольжении и верчении — по отдельности или одновременно, относительно ленты. Такое движение регулируется силой и моментом трения, а также силами упругости со стороны двух пружин — пружиной растяжения-сжатия с закрепленным концом и пружиной кручения, располагаемой перпендикулярно к ленте, верхний конец которой закручивается с постоянной угловой скоростью, а нижний — прикреплен к центру диска. Такая система является обобщением модели Ван дер Поля [1], которая была введена голландским ученым в 1930 г. для изучения фрикционных автоколебаний для тела, совершающего поступательное движение.

Подобные прерывистые движения с остановками, в последующем получившие название *stick-slip*, привлекают пристальное внимание из-за похожести с тем, что часто наблюдается в природе и технике: в машиностроении, бурении, сейсмологии и т. д. Недостаточная их изученность может приводить к нарушениям технологического процесса (влиять на точность обработки детали на токарном станке [2; 3]), авариям — например, при введении буровых работ [4; 5], неверному пониманию природных явлений — таких, например, как землетрясения [6; 7]. В отличие от классической модели Ван дер Поля, новая обобщенная модель подразумевает определение сил трения при сложном движении трущихся тел относительно друг друга. Когда необходимые условия применимости закона Амонтона – Кулона [8] — для нахождения силы трения и Кулона [9] — для нахождения момента трения не выполняются. Классическая формулировка этих законов подразумевает поступательное движение тел [8] — в первом случае и чисто вращательное [9] — во втором. Заметим, что применение закона о трении в дифференциальном виде при сложном движении тел [10] положение не исправляет: для выделяемых элементарных площадок в пятне контакта соприкасающихся тел в таких случаях необходимое условие применимости закона Амонтона – Кулона также будет нарушено. Несоблюдение столь очевидного необходимого условия привело к построению ошибочной теории поликомпонентного сухого трения [11; 12] в целом и, в частности, к утверждению, что при скольжении с верчением сила трения будет подобна вязкому [Там же]; к появлению утверждения, что коэффициент трения верчения выражается через коэффициент трения скольжения — что тоже будет неверным, эти коэффициенты изначально вводились как независимые друг от друга величины (например, [9]). О том, как следует корректно использовать законы о трении при скольжении с верчением вообще и для введенной системы в частности, подробно изложено в работах автора, например [13; 14].

Для ранее введенной обобщенной модели Ван дер Поля [14] дополнительно принимается, что сухое трение — наследственного типа. Впервые предположение о трении наследственного типа было сделано Боуденом [15] на основе экспериментальных данных наблюдаемого возникновения прерывистого движения для соприкасающихся тел. В последующем А.Ю. Ишлинским и И.В. Крагельским [16] было выдвинуто предположение, что это объясняется зависимостью коэффициента трения относительного покоя от времени контакта соприкасающихся тел. В этой работе было введено предположение об экспоненциальной зависимости коэффициента трения f от времени t_k:

$$f(t_k) = f^* - \left(f^* - f_*\right)\exp\left(-\beta t_k\right), \qquad (1)$$

где f^* — коэффициент трения при бесконечно большом времени контакта; f_* — коэффициент трения при нулевом времени контакта; β — некоторая константа, определяемая на основе экспериментальных данных; t_k — время длительного контакта тела с лентой (рис. 1). Здесь: $\lim f(t_k) = f^*$ при $t_k \to \infty$.

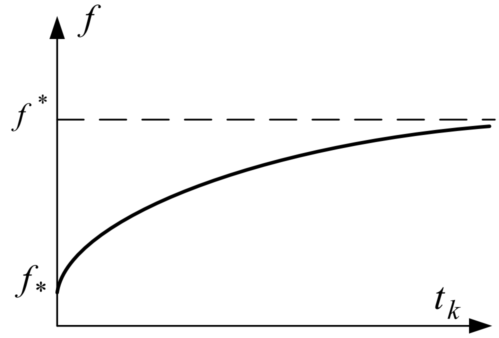

Рис. 1. Зависимость коэффициента трения покоя от времени контакта тел

Классической модели Ван дер Поля при учете силы трения наследственного типа посвящены такие работы, как, например, [17–21] — отечественных авторов и [22–26] — зарубежных исследователей.

В данной работе гипотеза о трении наследственного типа распространяется и на момент верчения покоя, что выражается аналогичной экспоненциальной зависимостью для коэффициента верчения ρ от времени:

$$\rho(t_k) = \rho^* - \left(\rho^* - \rho_*\right)\exp\left(-\beta_1 t_k\right), \qquad (2)$$

где ρ^* — коэффициент момента трения верчения при бесконечно большом времени контакта; ρ_* — коэффициент момента трения верчения при нулевом времени контакта; β_1 — некоторая константа, определяемая на основе экспериментальных данных. Предельное значение коэффициента момента трения покоя равно: $\lim \rho(t_k) = \rho^*$ при $t_k \to \infty$. В дальнейшем будем считать, что $\beta_1 = \beta$. Заметим, что качественно аналитическая зависимость (2) будет подобна зависимости (1), графический вид которой показан на рис. 1.

В дальнейшем будет считаться, что $f_* = f_0; f^* = f_1; \rho_* = \rho_0; \rho^* = \rho_1$, где f_0, f_1, ρ_0, ρ_1 — обозначения обычных коэффициентов соответственно скольжения и трения покоя, верчения и предельного момента верчения покоя в случаях отсутствия памяти трения и момента покоя.

При сделанных предположениях о трении и моменте верчения покоя наследственного типа приведены уравнения движения груза на движущейся ленте — что может рассматриваться как еще один вариант обобщения классической модели Ван дер Поля для изучения фрикционных автоколебаний. Показаны примеры результатов численного моделирования.

Постановка задачи. Как уже отмечалось, за основу берется модель, изображенная на рис. 2, которая была введена автором в работе [14].

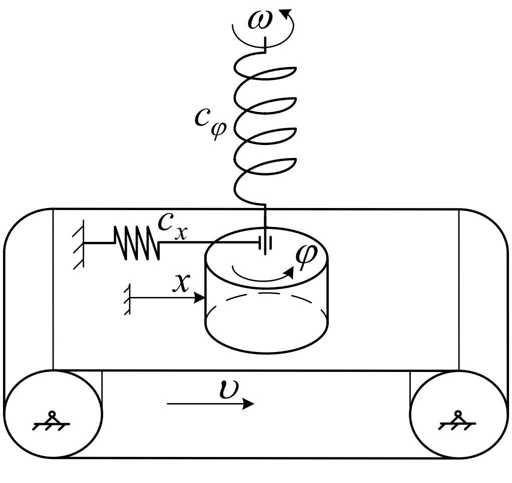

Рис. 2. Обобщенная модель Ван дер Поля

На ленте, движущейся с постоянной скоростью υ, описывается движение однородного диска радиусом R, массой m и моментом инерции $I = mR^2/2$. Груз прикреплен к двум пружинам — растяжения-сжатия жесткости c_x и кручения жесткости c_φ. Координаты x, φ определяют положение диска соответственно в продольном направлении и угол его поворота, которые отсчитываются от концов недеформированных пружин растяжения-сжатия и кручения. Свободный конец у пружины кручения закручивается с постоянной угловой скоростью ω, а у пружины растяжения он неподвижен. Диск может либо двигаться относительно ленты, либо быть неподвижным относительно нее. И движение, и относительный покой диска будут рассматриваться как по отношению к одной из составляющих движения — поступательной или вращательной, как по отдельности, так и при возможности наложения их друг на друга. Ранее в [14] при обычной постановке, когда трение наследственного типа не принималось во внимание, были получены такие выражения для силы трения F и момента верчения M_z:

$$F = \begin{cases} -f_0 N \dfrac{|\dot{x}-\upsilon| + \Delta}{|\dot{x}-\upsilon| + bR|\dot{\varphi}| + \Delta} sign(\dot{x}-\upsilon), if\ \dot{x} \neq \upsilon; \\ \dfrac{1}{k_\varphi}[-F_1; F_1], if\ \dot{x} \equiv \upsilon, \\ F_1 = f_1 N, k_\varphi = 1 + \dfrac{bR}{\Delta}|\dot{\varphi}|; \end{cases} \tag{3}$$

$$M_z = \begin{cases} -\rho_0 N \dfrac{R|\dot{\varphi}| + \Delta}{R|\dot{\varphi}| + a|\dot{x}-\upsilon| + \Delta} sign\dot{\varphi}, if\ \dot{\varphi} \neq 0; \\ \dfrac{1}{k_x}[-M_1; M_1], if\ \dot{\varphi} \equiv 0, \\ M_1 = \rho_1 N, k_x = 1 + \dfrac{a}{\Delta}|\dot{x}-\upsilon|; \end{cases} \tag{4}$$

Здесь считается, что реакция $N = mg$; F_1, M_1 — предельные значения трения и момента верчения покоя; a, b, Δ — коэффициенты пропорциональности, определяемые экспериментально; R — радиус пятна контакта между контактирующими телами; точка $\langle \cdot \rangle$ означает производную по времени t; k_φ — коэффициент динамичности верчения, определяющий влияние модуля угловой скорости верчения $|\dot{\varphi}|$ на трение покоя до начала скольжения; k_x — коэффициент динамичности скольжения, определяющий влияние модуля линейной скорости движения $|\dot{x}|$ на момент трения покоя до начала верчения. Эти коэффициенты показывают, во сколько раз уменьшатся предельные значения силы трения покоя и момента верчения покоя при плоском движении тела в сравнении с классическими случаями при поступательном движении или при вращательном (верчении). Эти коэффициенты также говорят об уменьшении эффекта залипания при скольжении с верчением или наоборот, в сравнении с чистым скольжением или чистым верчением. Длительные остановки тела могут трансформироваться в короткие или даже полностью исчезать при больших значениях коэффициентов динамичности k_φ и k_x, что будет достигаться при больших скоростях $|\dot{\varphi}|$ и $|\dot{x}|$.

Если в дальнейшем считать трение и момент верчения покоя наследственного типа, изменяющиеся согласно экспоненциальным законам (1) и (2), то формулы (3) и (4) примут вид:

$$F = \begin{cases} -f_0 N \dfrac{|\dot{x}-\upsilon| + \Delta}{|\dot{x}-\upsilon| + bR|\dot{\varphi}| + \Delta} sign(\dot{x}-\upsilon), if\ \dot{x} \neq \upsilon; \\ \dfrac{1}{k_\varphi}[-F_1; F_1], if\ \dot{x} \equiv \upsilon, \\ F_1 = f(t_k) N, k_\varphi = 1 + \dfrac{bR}{\Delta}|\dot{\varphi}|; \end{cases} \tag{5}$$

$$M_z = \begin{cases} -\rho_0 N \dfrac{R|\dot\varphi| + \Delta}{R|\dot\varphi| + a|\dot x - \upsilon| + \Delta} sign\dot\varphi, if\ \dot\varphi \neq 0; \\ \dfrac{1}{k_x}[-M_1; M_1], if\ \dot\varphi \equiv 0, \\ M_1 = \rho(t_k)N, k_x = 1 + \dfrac{a}{\Delta}|\dot x - \upsilon|; \end{cases} \quad (6)$$

Приведенные формулы говорят о том, что, в отличие от обычных случаев, предельные значения трения и момента покоя определяются в соответствии с записанными экспоненциальными законами (1) и (2) и с учетом времени длительного контакта в случае остановок движения в поступательной или вращательной составляющей движения тела (диска) относительно движущейся ленты. Время длительного контакта t_k для таких остановок заранее неизвестно и будет определяться из дополнительных условий, определяющих моменты срыва для поступательной или вращательной составляющих движения диска.

Принимается во внимание также, что со стороны пружин возникают упругая сила $F_x = -c_x x$ и упругий момент $M_\varphi = -c_\varphi(\varphi - \omega t)$. Тогда уравнения движения диска относительно движущейся ленты привода будут описываться следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot x \equiv \upsilon: \quad if\ |\dot\varphi| < \dfrac{\Delta}{bR}\left[\dfrac{f(t_k)mg}{c_x|x|} - 1\right]; \\ m\ddot x = -c_x x - f_0 mg \dfrac{|\dot x - \upsilon| + \Delta}{|\dot x - \upsilon| + bR|\dot\varphi| + \Delta} sign(\dot x - \upsilon); \\ \dot\varphi \equiv 0: \quad if\ |\dot x - \upsilon| < \dfrac{\Delta}{a}\left[\dfrac{\rho(t_k)mg}{c_\varphi|\varphi - \omega t|} - 1\right]; \\ I\ddot\varphi = -c_\varphi(\varphi - \omega t) - \rho_0 mg \dfrac{R|\dot\varphi| + \Delta}{R|\dot\varphi| + a|\dot x - \upsilon| + \Delta} sign\dot\varphi. \end{cases} \quad (7)$$

Остановка скольжения диска будет возникать тогда, когда в режиме скольжения $\dot x \neq \upsilon$ одновременно будет выполняться:

$$\dot x = \upsilon, \quad if\ |\dot\varphi| < \frac{\Delta}{bR}\left[\frac{f(t_k)mg}{c_x|x|} - 1\right]. \quad (8)$$

Остановка вращения (верчения) диска будет возникать тогда, когда в режиме верчения $(\dot\varphi \neq 0)$ одновременно будет выполняться:

$$\dot\varphi = 0, \quad if\ |\dot x - \upsilon| < \frac{\Delta}{a}\left[\frac{\rho(t_k)mg}{c_\varphi|\varphi - \omega t|} - 1\right]. \quad (9)$$

В противных случаях вместо остановки в скольжении или вращении будет наблюдаться в первом случае — мгновенная смена направления скольжения, а во втором случае — направления верчения.

Переходя к безразмерным переменным:

$$\tau = \sqrt{\frac{g}{R}}t; \quad \xi = \varphi - \omega t; \quad \eta = \frac{x}{R}; \quad (10)$$

и параметрам:

$$V = \frac{\upsilon}{\sqrt{gR}}; \quad \Omega = \sqrt{\frac{R}{g}}\omega; \quad \delta = \frac{\Delta}{\sqrt{gR}}; \quad r = \sqrt{\frac{R}{g}}\beta;$$

$$\hat\rho(\tau_k) = \frac{\rho^* - (\rho^* - \rho_*)\exp(-r\tau_k)}{R};$$

$$f(\tau_k) = f^* - (f^* - f_*)\exp(-r\tau_k);$$

$$\alpha_x = \frac{Rc_x}{mg}; \ \alpha_\varphi = \frac{c_\varphi}{mgR}; \ \hat\rho_0 = \frac{\rho_0}{R}; \ \hat\rho_1 = \frac{\rho_1}{R}, \quad (11)$$

получим уравнения движения диска в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \dot\eta \equiv V: \quad if\ |\dot\xi + \Omega| < \dfrac{\delta}{b}\left[\dfrac{f(\tau_k)}{\alpha_x|\eta|} - 1\right]; \\ \ddot\eta = -\alpha_x\eta - f_0 \dfrac{|\dot\eta - V| + \delta}{|\dot\eta - V| + b|\dot\xi + \Omega| + \delta} sign(\dot\eta - V); \\ \dot\xi \equiv -\Omega: \quad if\ |\dot\eta - V| < \dfrac{\delta}{a}\left[\dfrac{\hat\rho(\tau_k)}{\alpha_\varphi|\xi|} - 1\right]; \\ \ddot\xi = -2\left[\alpha_\varphi\xi + \hat\rho_0 \dfrac{|\dot\xi + \Omega| + \delta}{|\dot\xi + \Omega| + a|\dot\eta - V| + \delta} sign(\dot\xi + \Omega)\right]. \end{cases} \quad (12)$$

Остановка скольжения диска, когда:

$$\dot\eta = V, \quad if\ |\dot\xi + \Omega| < \frac{\delta}{b}\left[\frac{f(\tau_k)}{\alpha_x|\eta|} - 1\right]. \quad (13)$$

Остановка верчения диска, когда:

$$\dot\xi = -\Omega, \quad if\ |\dot\eta - V| < \frac{\delta}{a}\left[\frac{\hat\rho(\tau_k)}{\alpha_\varphi|\xi|} - 1\right]. \quad (14)$$

Для уравнений в безразмерном виде точка $\langle\cdot\rangle$ будет также означать производную, но уже по безразмерному аналогу времени τ. Приведенные уравнения (12) с условиями переключения (13) и (14) дают полный алгоритм для проведения численного моделирования движения диска относительно движущейся ленты с возможными кратковременными остановками и при наличии трения наследственного типа.

Заключение. В данной работе принимается во внимание учет трения и момента верчения покоя наследственного типа. Для описания обобщенной модели Ван дер Поля это делается впервые. Приведенные уравнения можно будет использовать для численного моделирования фрикционных автоколебаний диска, что автором планируется сделать в дальнейшем.

Литература

1. Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний. М.: Связьтехиздат, 1935. 91 с.
2. Derjagin B.V., Push V.E., Tolstoi D.M. A Theory of Stick-Slip Sliding of Solids. Proceedings of the Conference of Lubrication and Wear, London, October 1957. P. 265-273.
3. Кудинов В.А. Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967. 359 с.
4. Юнин Е.К. Низкочастотные колебания бурильного инструмента. М.: Недра, 1983. 132 с.
5. Юнин Е.К., Хегай В.К. Динамика глубокого бурения. М.: Недра-Бизнесцентр, 2004. 286 с.
6. Захаров В.С. Модели сейсмотектонических систем с сухим трением // Вестн. Московского ун-та. Сер. 4. Геология. 2011. № 1. С. 22-28.
7. Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения: от нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: Физматлит, 2013. 352 с.
8. Крагельский И.В., Щедров В.С. Развитие науки о трении. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 234 с.
9. Painleve P. Le¸cons sur le Frottement. Paris: Hermann, 1895 (Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.)
10. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии: сб. науч. ст. М.: Мир, 1967. С. 60-77.
11. Журавлев В. Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 81-88.
12. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: R&CDynamics, 2010. 183 с.
13. Коронатов В.А. О применении закона Кулона при скольжении тел, движущихся не поступательно, и парадоксах Пенлеве // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 4 (44). С. 25-35.
14. Коронатов В.А. Фрикционные автоколебания диска при скольжении с верчением на движущейся ленте: обобщение модели Ван-дер-Поля с stick-slip // Системы. Методы. Технологии. 2022. № 2 (54). С. 20-28.
15. Bowden F.P., Leben L. The Nature of Sliding and the Analysis of Friction. Proceedings of the Royal Society.1939. V. 109. P. 371-391.
16. Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. О скачках при трении // Журнал технической физики. 1944. Т. 14. Вып. 4/5. С. 276-282.
17. Кащеневский Л.Я. Стохастические автоколебания при сухом трении // Инженерно-физический журнал. 1984. Т. 47. № 1. С. 143-147.
18. Ветюков М.М., Доброславский С.В., Нагаев Р. Ф. Автоколебания в системе с характеристикой сухого трения наследственного типа // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 23-28.
19. Метрикин В.С., Нагаев Р.Ф., Степанова В.В. Периодические и стохастические автоколебания в системе с сухим трением наследственного типа // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 859-864.
20. Игумнов Л.А., Метрикин В.С. О сложной динамике в простейших вибрационных системах с трением наследственного типа // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18. Вып. 4. С. 433-446.
21. Метрикин В.С., Зайцев М.В., Стародубровская Н.С. К теории динамических систем с трением наследственного типа // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 4. С. 151-179.
22. Leine R.I., Van Campen D.H., De Kraker. Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models Nonlinear Dynamics 16: 41-54, 1999.
23. Leine R.I., Van Campen D.H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems. Archive of Applied Mechanics. 2002. 72. P. 138-146.
24. Van De Vrande B.L., Van Campen D.H., De Kraker. An Approximate Analysis of Dry Friction-Induced Stick-Slip Vibrations by a Smoothing Procedure. Nonlinear Dynamics. 1999. 19 (2). P. 157-169.
25. Leine R.I., Van Campen D.H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // European Journal of Mechanics A/Solids. 2006. № 25. P. 595-616.
26. Luo G.W., Lv X.H., Ma L. Periodic-impact motions and bifurcations in dynamics of a plastic impact oscillator with a frictional slider // European Journal of Mechanics A Solids. 2008. № 27. P. 1088-1107.

References

1. Van-der-Pol' B. Nonlinear theory of electric oscillations. M.: Svyaz'tekhizdat, 1935. 91 p.
2. Derjagin B.V., Push V.E., Tolstoi D.M. A Theory of Stick-Slip Sliding of Solids. Proceedings of the Conference of Lubrication and Wear, London, October 1957. P. 265-273.
3. Kudinov V.A. Dynamics of machine tools. M.: Mashinostroenie, 1967. 359 p.
4. YUnin E.K. Low–frequency vibrations of drilling tools. M.: Nedra, 1983. 132 p.
5. YUnin E.K., Hegaj V.K. Dynamics of deep drilling. M.: Nedra-Biznescentr, 2004. 286 p.
6. Zaharov V.S. Models of seismotectonic systems with dry friction // Moscow University Bulletin. Series 4. Geology. 2011. № 1. P. 22-28.
7. Popov V.L. Mechanics of contact interaction and physics of friction: from nanotribology to earthquake dynamics. M.: Fizmatlit, 2013. 352 p.
8. Kragel'skij I.V., SHCHedrov V.S. The development of the science of friction. M.: Izd-vo AN SSSR, 1956. 234 p.
9. Painleve P. Le¸cons sur le Frottement. Paris: Hermann, 1895 (Penleve P. Lekcii o trenii. M.: Gostekhizdat, 1954. 316 p.)
10. Kontensu P. The relationship between sliding friction and spinning friction and its account in the theory of the top // Problemy giroskopii: sb. nauch. st. M.: Mir, 1967. P. 60-77.
11. ZHuravlev V. F. The laws of friction in the combination of sliding and spinning // Mechanics of Solids. 2003. № 4. P. 81-88.
12. Andronov V.V., ZHuravlev V.F. Dry friction in problems of mechanics. M.; Izhevsk: R&CDynamics, 2010. 183 p.
13. Koronatov V.A. On the application of Coulomb's law in the sliding of bodies moving non-translationally and the paradoxes of Painlev // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 4 (44). P. 25-35.
14. Koronatov V.A. Frictional self-oscillations of a disk when sliding with spinning on a moving tape: generalization of the Van der Pol model with stick-slip: obobshchenie modeli Bander-Polya s stick-slip // Systems. Methods. Technologies. 2022. № 2 (54). P. 20-28.
15. Bowden F.P., Leben L. The Nature of Sliding and the Analysis of Friction. Proceedings of the Royal Society.1939. V. 109. P. 371-391.
16. Ishlinskij A.YU., Kragel'skij I.V. On jumps under friction // Technical Physics. 1944. V. 14. Vyp. 4/5. P. 276-282.
17. Kashchenevskij L.YA. Stochastic self-oscillations under dry friction // Journal of Engineering Physics. 1984. V. 47. № 1. P. 143-147.

18. Vetyukov M.M., Dobroslavskiĭ S.V., Nagaev R. F. Self-oscillations in a system with a characteristic of hereditary dry friction // Izv. AN SSSR. MTT. 1990. № 1. P. 23-28.
19. Metrikin V.S., Nagaev R.F., Stepanova V.V. Periodic and stochastic self-oscillations in a system with drym by friction of hereditary type // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1996. V. 60. Vyp. 5. P. 859-864.
20. Igumnov L.A., Metrikin V.S. On complex dynamics in the simplest vibration systems with hereditary type friction // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 2018. V. 18. Vyp. 4. P. 433-446.
21. Metrikin V.S., Zajcev M.V., Starodubrovskaya N.S. To the theory of dynamical systems with hereditary type friction // Differential Equations and Control Processes (Differencialnie Uravnenia i Protsesy Upravlenia). 2017. № 4. P. 151-179.
22. Leine R.I., Van Campen D.H., De Kraker. Stick-Slip Vibrations Induced by Alternate Friction Models Nonlinear Dynamics 16: 41-54, 1999.
23. Leine R.I., Van Campen D.H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems. Archive of Applied Mechanics. 2002. 72. P. 138-146.
24. Van De Vrande B.L., Van Campen D.H., De Kraker. An Approximate Analysis of Dry Friction-Induced Stick-Slip Vibrations by a Smoothing Procedure. Nonlinear Dynamics. 1999. 19 (2). P. 157-169.
25. Leine R.I., Van Campen D.H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // European Journal of Mechanics A/Solids. 2006. № 25. P. 595-616.
26. Luo G.W., Lv X.H., Ma L. Periodic-impact motions and bifurcations in dynamics of a plastic impact oscillator with a frictional slider // European Journal of Mechanics A Solids. 2008. № 27. P. 1088-1107.