

Математическое описание диаграмм инструментального вдавливания сферой. Основное уравнение индентирования

П.М. Огар^a, В.А. Шилин^b, Н.В. Карьялайнен^c, З.Д. Обухов^d

Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия

^a ogar@brstu.ru, ^b wal-500@yandex.ru, ^c alybeiw@mail.ru, ^d obuchov.99@mail.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, ^b <https://orcid.org/0000-0002-2972-4411>,

^c <https://orcid.org/0000-0003-2483-3763>, ^d <https://orcid.org/0009-0002-2057-9593>

Статья поступила 07.02.2023, принята 17.02.2023

В статье рассмотрены вопросы инструментального вдавливания сферы. Указывается на определенную неудовлетворенность результатами разных исследований при определении модуля упругости или радиуса площадки контакта из-за необходимости введения различных корректирующих и поправочных коэффициентов и параметров. Указано, что распределение контактного давления определяется экспонентой кривой нагружения. Получено достаточно точное уравнение для определения модуля упругости, учитывающее распределение контактного давления, и новое уравнение для жесткости в начальной части кривой разгрузки. Получено основное уравнение индентирования, в правой части которого находятся параметры, фиксируемые при инструментальном вдавливании. Показан пример использования основного уравнения индентирования для решения задач механики контактного взаимодействия. Указано, что процесс восстановления отпечатка упругий и должен описываться уравнениями теории упругости. Показано распределение вертикальных и горизонтальных перемещений при разгрузке отпечатка индентора и определение его радиуса через параметры основного уравнения индентирования.

Ключевые слова: диаграмма вдавливания сферы, основное уравнение индентирования, жесткость разгрузки, упругопластическое полупространство, кривая нагружения, кривая разгрузки.

Mathematical description of diagrams of instrumental indentation by a sphere. The basic indentation equation

P.M. Ogar^a, V.A. Shilin^b, N.V. Kar'yalaajnen^c, Z.D. Obuchov^d

Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia

^a ogar@brstu.ru, ^b wal-500@yandex.ru, ^c alybeiw@mail.ru, ^d obuchov.99@mail.ru

^a <https://orcid.org/0000-0001-7717-9377>, ^b <https://orcid.org/0000-0002-2972-4411>,

^c <https://orcid.org/0000-0003-2483-3763>, ^d <https://orcid.org/0009-0002-2057-9593>

Received 07.02.2023, accepted 17.02.2023

The article deals with the issues of instrumental indentation of the sphere. It indicates a certain dissatisfaction with the results of various studies in determining the modulus of elasticity, or the radius of the contact site, due to the need to introduce various correction and correction coefficients and parameters. It is indicated that the distribution of contact pressure is determined by the exponent of the loading curve. A sufficiently precise equation for determining the modulus of elasticity is obtained, taking into account the distribution of contact pressure, and a new equation for stiffness in the initial part of the unloading curve. The basic indentation equation is obtained, in the right part of which there are parameters removed during instrumental indentation. An example of using the basic indentation equation for solving problems of contact interaction mechanics is shown. It is indicated that the process of restoring the imprint is elastic and it should be described by the equations of elasticity theory. The distribution of vertical and horizontal displacements during unloading of the indentation and the determination of its radius through the parameters of the basic indentation equation are shown.

Keywords: sphere indentation diagram, basic indentation equation, unloading stiffness, elastic-plastic half-space, loading curve, unloading curve.

Введение. Испытания на вдавливание сферы являются одним из самых ранних методов определения механических свойств материалов. Исторически испытания материалов более века назад использовались для определения их твердости [1; 2]. Твердость является важным свойством для оценки деформационного поведения материалов, сопротивления их упругопластическому деформированию и служит надежным средством контроля качества для многих технологических процессов, особенно при термической обработке металлов, старении материала конструкций при

наработке технологического оборудования на ресурс. Главными преимуществами метода являются неразрушающее действие, простота выполнения и возможность оценки локальных механических свойств материалов конструкции. Изначально тест на вдавливание сферы использовался для определения твердости материала [3] по Мартенсу (1898):

$$HM = \frac{P}{2\pi Rt}, \quad (1)$$

по Бринеллю [4] *HBW* (1900):

$$HBW = \frac{2P}{\pi D^2 \left(1 - \sqrt{1 - (d/D)^2}\right)}, \quad (2)$$

по Майеру [5] (1908):

$$H_M = \frac{4P}{\pi d^2}. \quad (3)$$

Для описания зависимости между нагрузкой P и диаметром d оставшегося отпечатка Е. Майер [5] предложил следующее выражение:

$$P = Ad^m, \quad (4)$$

где A — константа; m — индекс Майера, который определяется как тангенс угла наклона зависимости $P(d)$ в логарифмических координатах, или через две точки этой зависимости:

$$m = \frac{\ln(P_2/P_1)}{\ln(d_2/d_1)}. \quad (5)$$

Из уравнений (3) и (4) имеем:

$$H_M = A^* \left(\frac{d}{D}\right)^{m-2}. \quad (6)$$

Очевидно, на появление этих работ оказало влияние понятие абсолютной твердости Г. Герца, решившего в 1881 г. задачу об упругом контакте шара и плоскости. С середины прошлого века с появлением вдавливания с измерением глубины начали появляться исследования по определению модуля упругости и других механических свойств [6–11], которые привели к появлению метода кинетического (инструментального) индентирования. Методика определения модуля упругости основана на уравнении Булычева – Алехина – Шоршорова (в зарубежной литературе — *equation BASH*) для жесткости начальной части кривой разгрузки, которое имеет вид:

$$S = \left. \frac{dP_e}{dh_e} \right|_{h_e=h_m} = \frac{2\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} \cdot E^*, \quad (7)$$

где A — проекция площади контакта индентора с материалом; E^* — приведенный модуль упругости:

$$E^* = \left(\frac{1-\nu^2}{E} + \frac{1-\nu_i^2}{E_i} \right)^{-1}; \quad (8)$$

ν , ν_i и E , E_i — коэффициенты Пуассона и модули упругости материала и индентора.

Подробный анализ упругого вдавливания осесимметричных инденторов изложен авторами [12]. Из выражения (8) для жесткости начальной части кривой разгрузки получено:

$$S = 2E^* a_s, \quad (9)$$

где a_s — радиус площадки контакта.

Однако ввиду определенной неудовлетворенности при определении модуля упругости и радиуса площадки контакта в уравнение (9) вводятся различные корректирующие и поправочные коэффициенты и параметры [13–19], например, в работе [13]:

$$S = \beta_c 2E^* a, \quad (10)$$

где β_c — корректирующий фактор.

Целью настоящих исследований является совершенствование процесса преобразования диаграммы инструментального вдавливания в диаграмму «напряжения – деформации» при растяжении путем уточнения выражения для начальной жесткости разгрузки, описания новых закономерностей между параметрами индентирования и геометрическими характеристиками восстановленного и невосстановленного отпечатка.

При определении диаграммы «напряжения – деформации» согласно нормативному документу [20] методом индентирования сферы производится одновременное измерение нагрузок вдавливания P и разгрузки P_e и глубин проникновения h сферы в образец и разгрузки h_e , которые представляют собой диаграмму инструментального вдавливания и являются исходными данными для решения поставленной задачи. При этом надо четко представлять, для чего проводится индентирование и в какой части полной диаграммы вдавливания его проводить [21; 22], будет ли при этом изменение модуля упругости материала [22; 23].

2. Параметры диаграммы инструментального вдавливания. Основное уравнение индентирования.

Построению диаграммы инструментального вдавливания предшествует предварительная обработка (очистка) измеренных результатов испытаний с целью исключения влияния деформации индентора и других элементов установки, а также влияния тангенциальных сил. Важное условие состоит в необходимости точного учета упругой податливости испытательного оборудования [24; 25]. Небольшая погрешность в расчете упругой податливости может привести к значительной погрешности определения глубины индентирования, параметра деформационного упрочнения и особенно — модуля нормальной упругости [25]. На взгляд авторов настоящей статьи, для уменьшения зависимости от упругой податливости испытательного оборудования необходимо изменить схему измерения величины вдавливания индентора, как это используется в работах [26, с. 49, 27]. При этом необходимо из измерений вычесть упругую деформацию полусферы.

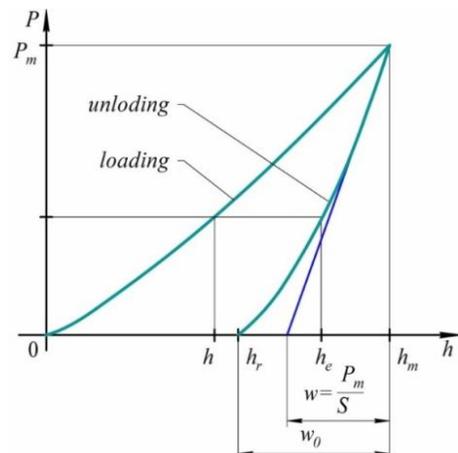


Рис. 1. Типовая диаграмма инструментального вдавливания

На рис. 1 представлена типовая “очищенная” диаграмма инструментального вдавливания, состоящая из кривых нагружения и разгрузки индентора. Имеются пять параметров, которые используются в дальнейших расчетах. Из кривой нагружения это максимальная нагрузка P_m , максимальное внедрение h_m , экспонента α зависимости $P(h_i)$. Из кривой разгрузки – контактная жесткость на начальном участке кривой разгрузки $S = dP_e/dh_e$ и остаточная глубина h_r после разгрузки индентора. Кривую нагружения обычно описывают уравнением

$$P = C_l h^\alpha, \quad (11)$$

а кривую разгрузки согласно рекомендации [13]:

$$P_e = P_m \left(\frac{h_e - h_r}{h_m - h_r} \right)^\gamma, \quad (12)$$

где C_l — константа; α, γ — показатели степени.

Из уравнения (7) для контактной жесткости на начальном участке кривой разгрузки:

$$S = \left. \frac{dP_e}{dh_e} \right|_{h_e=h_m} = \frac{P_m \cdot \gamma}{h_m - h_r}. \quad (13)$$

Учитывая, что $w_0 = h_m - h_r$, из геометрических соображений (рис. 1) следует:

$$w = \frac{P_m}{S} = \frac{w_0}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{w_0}{w}. \quad (14)$$

В работе [28] при разгрузке индентора параметр γ определен расчетным путем:

$$\gamma = \frac{3 - 2\bar{h}_c}{2 - \bar{h}_c}, \quad (15)$$

где $\bar{h}_c = h_c/R$, R — радиус сферы; h_c — глубина, на которой происходит контакт индентора с образцом под нагрузкой P_m .

Так как из геометрических соотношений следует:

$$h_c = R - \sqrt{R^2 - a^2}, \text{ или } \bar{h}_c = 1 - \sqrt{1 - \bar{a}^2}, \quad (16)$$

то из уравнений (16) и (15) получим:

$$\gamma = \frac{1 + 2\sqrt{1 - \bar{a}^2}}{1 + \sqrt{1 - \bar{a}^2}}, \quad (17)$$

здесь $\bar{a} = a/R$; a — радиус площадки контакта при нагрузке.

Уравнение для распределение контактного давления при упругопластическом внедрении сферы впервые получено в работе [28] и подтверждено авторами настоящей статьи в [29]. В указанных работах показано, что если ветвь

нагружения диаграммы вдавливания сферы описывается уравнением (11), тогда распределение давления в месте контакта описывается выражением:

$$p(r) = p_0 \left(1 - r^2/a^2 \right)^\beta, \quad (18)$$

где $\beta = \alpha - 1$, $p_0 = P_m(\beta + 1)$, $P_m = P/(\pi a^2)$ — среднее давление в контакте.

Напряженно-деформированное состояние от действия на упругое полупространство нагрузки вида (18) рассмотрено в работе [30]. Перемещения в центре площадки контакта описываются уравнением:

$$u_z(r) = \frac{P_m}{E^*} a 2^{2\beta+1} (1 + \beta) \mathbf{B}(\beta + 1, \beta + 1). \quad (19)$$

Учитывая принятые обозначения и то, что $K_\beta(\beta) = 2^{2\beta+1} (1 + \beta) \mathbf{B}(\beta + 1, \beta + 1)$, где $\mathbf{B}(\alpha_1, \alpha_2)$ — бета-функция, получим:

$$P = \frac{\pi}{K_\beta} \cdot E^* (h - h_r) \sqrt{R(h + h_r)}. \quad (20)$$

Из уравнения (20) можно получить более точное уравнение для определения модуля упругости, чем полученное в [26, с. 23] для «герцевского» распределения давления, т. е. для $\beta = 0.5$. Уравнение (21) следует применять для определения модуля упругости материала при отсутствии напыля при индентировании:

$$E = \frac{1 - \nu^2}{\frac{\pi(h - h_r) \sqrt{R(h + h_r)}}{K_\beta P} - \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}}. \quad (21)$$

Разгрузка сферы рассмотрена в работе [31], где указано, что контактная глубина при разгрузке описывается выражением:

$$h_{ce} = h_c \frac{h_e - h_r}{h_m - h_r}, \quad h_r \leq h_e \leq h_m, \quad (22)$$

где h_c — контактная глубина при упругопластическом нагружении.

Для радиуса площадки контакта при разгрузке:

$$a_{ce} = (2Rh_{ce} - h_{ce}^2)^{0.5}. \quad (23)$$

Из выражения (19) с учетом (22), (23) и принятых обозначений следует:

$$P_e = \frac{\pi E^*}{K_\beta} (2Rh_{ce} - h_{ce}^2)^{0.5} (h_e - h_r), \quad (24)$$

а начальная жесткость разгрузки:

$$S = \left. \frac{dP_e}{dh_e} \right|_{h_e=h_m} = \frac{\pi E^*}{K_\beta} \cdot \frac{3Rh_c - 2h_c^2}{(2Rh_c - h_c^2)^{0.5}}. \quad (25)$$

После преобразования с учетом уравнения (15) получим:

$$S = \frac{\pi E^*}{K_\beta} \cdot \frac{3 - 2\bar{h}_c}{2 - \bar{h}_c} \cdot (2Rh_c - h_c^2)^{0.5} = \frac{\pi \gamma}{K_\beta} E^* a. \quad (26)$$

Из равенства уравнений (13) и (26) получим:

$$a = \frac{K_\beta}{\pi} \cdot \frac{P_m}{(h_m - h_r)E^*}. \quad (27)$$

Как следует из анализа уравнения (27), в него входят параметры инструментального вдавливания, перечисленные в начале раздела. Поэтому предлагается его назвать *основным уравнением индентирования*.

В относительных величинах имеем:

$$\bar{a} = \frac{K_\beta}{\pi} \cdot \frac{\bar{P}_m}{(h_m - h_r)}, \quad (28)$$

где $\bar{P}_m = \frac{P}{E^* R^2}$.

Описание контактного взаимодействия сферы с упругопластическим полупространством.

Представленное выше *основное уравнение индентирования* (28) является модифицированным уравнением Бульчева – АLEXИНА – ШОРШОРОВА (*equation BASH*). Индентирование материалов с целью определения их механических свойств (*прямая задача*) впервые было предложено С.И. Бульчевым с соавторами [9; 10]. В дальнейшем метод был адаптирован для определения характеристик на микро- и наноуровне [13]. Если известны механические свойства материалов, то математическое описание инструментального индентирования можно использовать для расчетов контактного взаимодействия сферы с упругопластическим пространством (*обратная задача*) [32].

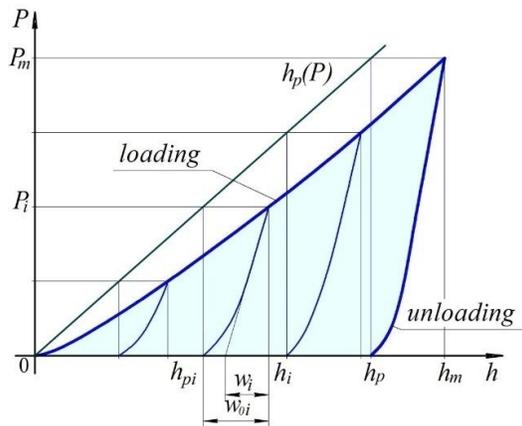


Рис. 2. Ступенчатая диаграмма индентирования и зависимость Мартенса

На рис. 2 представлены ступенчатая диаграмма индентирования и линейная зависимость Мартенса $h_{pi}(P_i)$. При приложении к индентору нагрузки P_i фиксировались значения h_i и h_{pi} и затем точка Мартенса в пересечении $h_{pi} - P_i$. Текущее значение глубины восстановленного отпечатка:

$$h_{pi} = P_i / (qR), \quad (29)$$

где $q = P_m / (h_m R)$ — коэффициент деформационного упрочнения [25, 33].

Рассмотрим простейшее применение *основного уравнения индентирования* вида (28) в механике контактного взаимодействия. Допустим, что приближенно $a = \sqrt{2Rh_c} = \sqrt{R(h + h_r)}$. Тогда из (28) имеем:

$$(h + h_r)^{0.5} (h - h_r) = \frac{K_\beta P}{\pi R^{0.5} E^*}. \quad (30)$$

$$\left(\frac{h}{h_r} + 1\right)^{0.5} \left(\frac{h}{h_r} - 1\right) = \frac{K_\beta P}{\pi h_r^{1.5} R^{0.5} E^*}. \quad (31)$$

Обозначим $\frac{h}{h_r} + 1 = y^2$, тогда $\frac{h}{h_r} = y^2 - 1$,

$\frac{h}{h_r} - 1 = y^2 - 2$. Выражение (31) представим в виде:

$$y^3 - 2y - \frac{K_\beta P}{\pi h_r^{1.5} R^{0.5} E^*} = 0. \quad (32)$$

Кубическое уравнение (32) удобно решать, используя формулу Кардано. Если y_k — корень уравнения (32), то:

$$h = h_r (y_k^2 - 1), \quad (33)$$

$$h_r = h_p = P / (qR). \quad (34)$$

В работе [32] для определения h_p использовалось понятие «пластическая твердость».

Выражения (32) – (34) рекомендуется использовать при уточнении (аппроксимации) зависимости (12).

Влияние вертикальных и горизонтальных перемещений на размеры разгруженного отпечатка. Из выражений (1) – (6) только первое относится к невозстановленному состоянию, а остальные — к восстановленному (разгруженному). Может возникнуть вопрос — как изменятся размеры восстановленного отпечатка? Так как процесс восстановления упругий, то он должен быть описан уравнениями теории упругости. Авторами [29] предложена концептуальная модель процесса инструментального вдавливания жесткой сферы, согласно которой в процессе нагружения сферы в результате сложных процессов упругой и пластической деформаций формируется распределение давления в контакте сферы с материалом, которое определяется уравнением кривой нагружения. При разгрузке сферы величина перемещений восстанавливаемой поверхности равна перемещениям восстанавливаемого упругого полупространства после действия на него искомого распределения давления. При повторном нагружении сферы перемещения восстановленной поверхности будут эквивалентны соответствующим перемещениям упругого полупространства при действии на него искомого распределения давления.

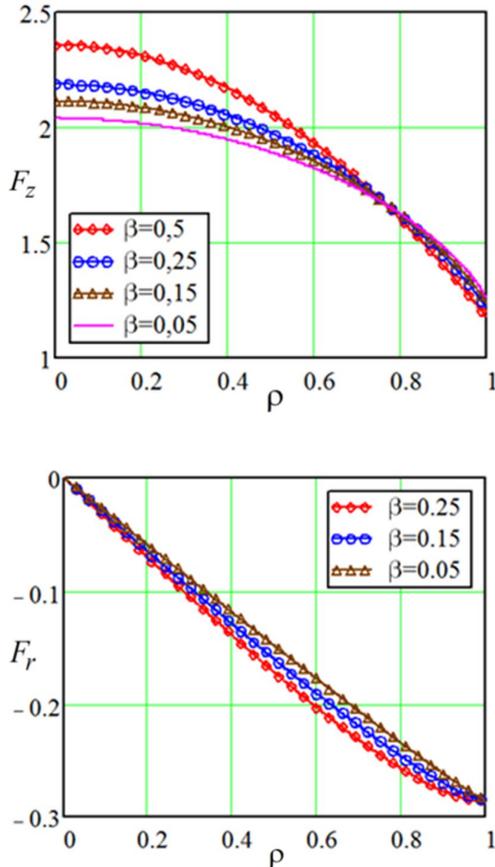


Рис. 3. Функции вертикальных $F_z(\rho)$ и радиальных $F_r(\rho)$ перемещений

Распределение вертикальных и радиальных перемещений на площадке контакта при действии нагрузки вида (18) рассмотрено авторами в работе [34]. В результате вертикальные и радиальные перемещения можно описать уравнениями:

$$u_z(\rho) = \frac{ap_m}{E^*} F_z(\rho), \quad (35)$$

$$u_r(\rho) = \frac{ap_m}{E^*} F_r(\rho), \quad (36)$$

Радиус разгруженного отпечатка равен:

$$a = a_s + u_r(1) = a_s + \frac{ap_m}{E^*} F_z(1), \quad (37)$$

$F_z(1) = -0.2857$ для всех значений β (рис. 3).

Окончательно, с учетом выражения (27), для радиуса разгруженного отпечатка имеем:

$$a = \frac{P_m}{\pi E^*} \left(\frac{K_\beta}{h-h_r} - \frac{0.2857}{a_s} \right),$$

или

$$a = a_s \left(1 - 0.2857 \frac{h-h_r}{K_\beta a_s} \right). \quad (38)$$

Заключение

1. Имеется определенная неудовлетворенность результатами исследований [13–19] при определении модуля упругости и радиуса площадки контакта, так как в уравнение (9) для улучшения полученных результатов вводятся различные корректирующие и поправочные коэффициенты и параметры.

2. Установлено, что, если ветвь нагружения диаграммы вдавливания сферы описывается уравнением (11), тогда распределение давления в месте контакта описывается выражением (18). Это позволило ввести параметр $\beta = \alpha - 1$ в более точное уравнение для определения модуля упругости, чем полученное в [26, с. 23] для «герцевского» распределения давления, т. е. для $\beta = 0.5$.

3. В результате выявления новых закономерностей между параметрами индентирования получено новое выражение (26) для жесткости в начальной части кривой разгрузки. Использование выражений (26) и (13) позволило сформировать выражение (27), в правой части которого находятся параметры, снимаемые при инструментальном вдавливании. Поэтому предложено его представить как «основное уравнение индентирования».

4. Показан пример использования основного уравнения индентирования для решения задач механики контактного взаимодействия. Этот подход рекомендуется использовать при уточнении (аппроксимации) зависимости (11).

5. Показано влияние вертикальных и горизонтальных перемещений при действии на пятно контакта нагрузки вида (18) и определение его радиуса через параметры основного уравнения индентирования.

Литература

1. Tabor D. The hardness of metals. Oxford: University press. Great Britain. 1951.
2. Walley, S. M. Historical Origins of Indentation Hardness Testing. Mater. Sci. Technol. 2012, 28, 1028–1044.
3. Martens A. Handbuch der Materialkunde für den Maschinenbau. 1898. Berlin. Springer.
4. Brinell I.A. Ein Verfahren zur Hartebestimmung nebst einigen anwendungen desselben // Baumaterialkunde. 1900. Bd. 5. S. 18–26.
5. Meyer E. Zeitschrift des Vereins Deutschen Ingenieure. 1908. 52. 645–654.
6. Galin L.A. Spatial contact problems of the theory of elasticity for punches of circular shape in planar projection // J. Appl. Math. Mech. (PMM), 1946. 10. P. 425–448.
7. Sneddon I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile, International journal of engineering science 3 (1965), No.1, pp. 47–57.
8. Lukin V. V., Savitsky F. S. Evaluation of Young’s modulus by indentation a spherical indenter. Research in the field of hardness measurement // Tr. Metrol. Inst. SSSR. 1967. N 91. P. 91 – 92.
9. Bulychov S.I., Alekhin V.P., Shorshorov M.Kh., Ternovskii A.P., Shnyrev G.D. Determining Young’s modulus from the indenter penetration diagram // Industrial Laboratory. 1975. 41. P. 1137.

10. Bulychev S.I., Alekhin V.P., Shorshorov M.K., Ternovskii A.P. Mechanical properties of materials studied from kinetic diagrams of load versus depth of impression during microimpression // *Stren. Mater.* 1976. V. 8. P. 1084.
11. Galanov B.A., Grigor'ev O.N., Mil'man Y.V., Ragozin I.P., Trefilov V.I. Determination of the hardness and Young's modulus with elastoplastic penetration of indentors into materials // *Sov. Phys. Dokl.* 1984. 29. P. 146-147.
12. Borodich F.M., Keer L.M. Contact problems and depth-sensing nanoindentation for frictionless and frictional boundary conditions // *Int. J. Solids Struct.* 2004. 41. P. 2479-2499.
13. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // *Journal of Materials research society.* 2004. V. 19. No. 1. P. 3-20.
14. Lee H., U.S. Patent No. 6,778,916 (17 Aug. 2004)
15. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 2005. Vol. 53. P. 2037-2069.
16. Lee J.H., Kim T., Lee H. A study on robust indentation techniques to evaluate elastic-plastic properties of metals. *Int. J. Solids and Structures* 47 (2010) 647-664.
17. Hay J.L., Wolff P.J. Small correction required when applying the Hertzian contact model to instrumented indentation data. *J. Mater. Res.*, Vol. 16, No. 5, May 2001. 1280-1286.
18. Collin J.-M., Mauvoisin G., El Abdi R. An experimental method to determine the contact radius changes during a spherical instrumented indentation // *Mechanics of Materials* 40 (2008) 401-406.
19. Collin J.-M. Correction factor for contact radius in spherical indentation measurements // *Mechanics of Materials* 50 (2012) 47-52.
20. ГОСТ Р 56232-2014. Определение диаграммы «напряжение - деформация» методом инструментального индентирования шара. М.: Стандартинформ, 2015.
21. Matyunin V.M., Marchenkov A.Yu., Abusaif N., Volkov P.V., Zhgut D. A. Regularities and properties of instrumented indentation diagrams obtained by ball-shaped indenter // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.* 2020. Т. 86. № 5. С. 43-51.
22. Zou, B., Guan, K. S., & Wu, S. B. (2016). Determination of area reduction rate by continuous ball indentation test. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 139-140, P. 220-227.
23. Yu F., Fang J., Omacht D., Sun M., Li Y. A new instrumented spherical indentation test methodology to determine fracture toughness of high strength steels // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* 2023. V. 124. 103744.
24. Matyunin V. M., Marchenkov A. Yu., Abusaif N., Stasenko N. A. Evaluation of hardness tester elastic compliance for ball instrumented indentation // *Inorganic Materials*, 2020, Vol. 56, No. 15, pp. 1492-1498.
25. Матюнин В.М., Марченков А.Ю., Волков П.В., Каримбеков М.А., Жгут Д.А., Петрова М.П., Веремева Н.О. Преобразование кинетических диаграмм вдавливания сферического индентора в диаграммы растяжения для металлических конструкционных материалов // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.* 2022. Т. 88. № 2. С. 54-63.
26. Матлин М. М., Мозгунова А.И., Казанкина Е.Н., Казанкин В.А. Методы неразрушающего контроля прочностных свойств деталей машин М.: Инновационное машиностроение, 2019. 247 с.
27. Автономов Н. Н., Тололо А. В. Влияние осевой деформации шара на величину измеряемой глубины вдавливания шара по перемещению верхней точки шара // *Вестник СибГАУ.* 2015. Т. 16, № 3. С. 638-644.
28. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic Indentation Application to Determine Contact Characteristics of Sphere and Elastoplastic Half-Space // *Advanced Materials Research* Vol. 664 (2013) pp. 625-631.
29. Ogar P.M., Shilin V.A., Fedorov V.S., Karyalajnen N.V. On the contact pressure distribution during the sphere indentation into an elastic-plastic half-space // *Systems. Methods. Technologies.* 2022. № 1 (53). P. 7-11.
30. Ogar P., Gorokhov D., Mamaev L., Kushnarev V. Influence of the form of axisymmetric load on the stress-strain state of an elastoplastic half-space // *MATEC Web of Conferences.* 2019. 298. 00094
31. Ogar P., Gorokhov D.* Ugrumova E. Mechanics of unloading of a rough surfaces pre-loaded joint // *MATEC Web of Conferences.* 2017. 129. 06016.
32. Огар П.М., Горохов Д.Б. Контактные задачи в герметологии неподвижных соединений. Москва: Вологда: Инфра-Инженерия, 2023. 248 с.
33. Matyunin V. M., Marchenkov A. Yu., Abusaif N., Goryachkina M. V., Rodyakina R. V., Karimbekov M. A., Zhgut D. A. Evaluation of Young's modulus of construction materials by instrumented indentation using a ball indenter / *Zavod. Lab. Diagn. Mater.* 2021. Vol. 87. N 8. P. 64 - 68.
34. Ogar P.M., Shilin V.A., Gorokhov D.B., Fedorov V.S. The effect of vertical and radial displacements on the parameters of the restored surface after the sphere is indented // *AIP Conference Proceedings*, 2022. V. 2503, 060003.

References

1. Tabor D. The hardness of metals. Oxford: University press. Great Britain, 1951. 175 p.
2. Walley S.M. Historical Origins of Indentation Hardness Testing. *Mater. Sci. Technol.* 2012. № 28. P. 1028-1044.
3. Martens A. *Handbuch der Materialkunde für den Maschinenbau.* 1898. Berlin. Springer.
4. Brinell I.A. Ein Verfahren zur Härtebestimmung nebst einigen anwendungen desselben // *Baumaterialkunde.* 1900. Bd. P. 18-26.
5. Meyer E. *Zeitschrift des Vereins Deutschen Ingenieure.* 1908. № 52. P. 645-654.
6. Galin L.A. Spatial contact problems of the theory of elasticity for punches of circular shape in planar projection // *J. Appl. Math. Mech. (PMM).* 1946. № 10. P. 425-448.
7. Sneddon I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile // *International journal of engineering science* 3. 1965. № 1. P. 47-57.
8. Lukin V.V., Savitsky F.S. Evaluation of Young's modulus by indentation a spherical indenter. Research in the field of hardness measurement // *Tr. Metrol. Inst. SSSR.* 1967. № 91. P. 91-92.
9. Bulychev S.I., Alekhin V.P., Shorshorov M.Kh., Ternovskii A.P., Shnyrev G.D. Determining Young's modulus from the indenter penetration diagram // *Industrial Laboratory.* 1975. № 41. P. 1137.
10. Bulychev S.I., Alekhin V.P., Shorshorov M.K., Ternovskii A.P. Mechanical properties of materials studied from kinetic diagrams of load versus depth of impression during microimpression // *Stren. Mater.* 1976. V. 8. P. 1084.
11. Galanov B.A., Grigor'ev O.N., Mil'man Y.V., Ragozin I.P., Trefilov V.I. Determination of the hardness and Young's modulus with elastoplastic penetration of indentors into materials // *Sov. Phys. Dokl.* 1984. № 29. P. 146-147.
12. Borodich F.M., Keer L.M. Contact problems and depth-sensing nanoindentation for frictionless and frictional boundary conditions // *Int. J. Solids Struct.* 2004. № 41. P. 2479-2499.
13. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // *Journal of Materials research society.* 2004. V. 19. № 1. P. 3-20.
14. Lee H. U.S. Patent No. 6, 778, 916 (17 Aug. 2004).
15. Lee H., Lee J.H., Pharr G.M. A numerical approach to spherical indentation techniques for material property evaluation // *Journal*

- of the Mechanics and Physics of Solids. 2005. V. 53. P. 2037-2069.
16. Lee J.H., Kim T., Lee H. A study on robust indentation techniques to evaluate elastic-plastic properties of metals. *Int. J. Solids and Structures*. 2010. № 47. P. 647-664.
 17. Hay J.L., Wolff P.J. Small correction required when applying the Hertzian contact model to instrumented indentation data. *J. Mater. Res.* 2001. V. 16. № 5, May. P. 1280-1286.
 18. Collin J.-M., Mauvoisin G., El Abdi R. An experimental method to determine the contact radius changes during a spherical instrumented indentation // *Mechanics of Materials*. 2008. № 40. P. 401-406.
 19. Collin J.-M. Correction factor for contact radius in spherical indentation measurements // *Mechanics of Materials*. 2012. № 50. P. 47-52.
 20. State Standard GOST R 56232–2014. Stress – strain curve evaluation using the ball instrumented indentation test. Moscow: Standartinform, 2015. 44 p. [in Russian].
 21. Matyunin V.M., Marchenkov A.Yu., Abusaif N., Volkov P.V., Zhgut D.A. Regularities and properties of instrumented indentation diagrams obtained by ball-shaped indenter // *Industrial laboratory. Materials diagnostics*. 2020. V. 86. № 5. P. 43-51.
 22. Zou B., Guan K.S., & Wu S.B. Determination of area reduction rate by continuous ball indentation test // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2016. 139-140. P. 220-227.
 23. Yu F., Fang J., Omacht D., Sun M., Li Y. A new instrumented spherical indentation test methodology to determine fracture toughness of high strength steels // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2023. V. 124. P. 103744.
 24. Matyunin V.M., Marchenkov A.Yu., Abusaif N., Stasenko N.A. Evaluation of hardness tester elastic compliance for ball instrumented indentation // *Inorganic Materials*. 2020. V. 56. № 15. P. 1492-1498.
 25. Matyunin V.M., Marchenkov A.YU., Volkov P.V., Karimbekov M.A., Zhgut D.A., Petrova M.P., Veremeeva N.O. Transformation of kinetic diagrams of spherical indenter indentation into stretching diagrams for metallic structural materials // *Industrial laboratory. Materials diagnostics*. 2022. V. 88. № 2. P. 54-63.
 26. Matlin M.M., Mozgunova A.I., Kazankina E.N., Kazankin V.A. Methods of non-destructive testing of strength properties of machine parts. M.: Innovacionnoe mashinostroenie, 2019. 247 p.
 27. Avtonomov N.N., Tololo A.V. The effect of the axial deformation of the ball on the measured depth of the ball indentation by moving the upper point of the ball // *Vestnik SibSAU*. 2015. V. 16. № 3. P. 638-644.
 28. Ogar P.M., Tarasov V.A. Kinetic Indentation Application to Determine Contact Characteristics of Sphere and Elastoplastic Half-Space // *Advanced Materials Research*. 2013. V. 664. P. 625-631.
 29. Ogar P.M., Shilin V.A., Fedorov V.S., Kar'yalajnen N.V. On the contact pressure distribution during the sphere indentation into an elastic-plastic half-space // *Systems. Methods. Technologies*. 2022. № 1 (53). P. 7-11.
 30. Ogar P., Gorokhov D., Mamaev L., Kushnarev V. Influence of the form of axisymmetric load on the stress-strain state of an elastoplastic half-space // *MATEC Web of Conferences*. 2019. 298. 00094.
 31. Ogar P., Gorokhov D., Ugryumova E. Mechanics of unloading of a rough surfaces pre-loaded joint // *MATEC Web of Conferences*. 2017. 129. 06016.
 32. Ogar P.M., Gorokhov D.B. Contact problems in hematology of fixed joints. M.: Vologda: Infra-Inzheneriya, 2023. 248 p.
 33. Matyunin V.M., Marchenkov A.Yu., Abusaif N., Goryachkina M.V., Rodyakina R.V., Karimbekov M.A., Zhgut D.A. Evaluation of Young's modulus of construction materials by instrumented indentation using a ball indenter // *Industrial laboratory. Materials diagnostics*. 2021. V. 87. № 8. P. 64-68.
 34. Ogar P.M., Shilin V.A., Gorokhov D.B., Fedorov V.S. The effect of vertical and radial displacements on the parameters of the restored surface after the sphere is indented // *AIP Conference Proceedings*. 2022. V. 2503. 060003.