

ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ

УДК 519.71, 62.752, 621.534, 629.4.015, 517.71-74

DOI:10.18324/2077-5415-2022-4-7-15

Системные подходы к оценке динамических состояний технических объектов при вибрационных нагрузениях: частотные функции, динамические инварианты, методы регуляризации

А.В. Елисеев^{1,3a}, И.С. Ситов^{2b}, Н.К. Кузнецов^{3c}¹ Иркутский государственный университет путей сообщения, ул. Чернышевского, 15, Иркутск, Россия² Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия³ Иркутский национальный исследовательский технический университет, ул. Лермонтова, 83, Иркутск, Россия^a eavsh@ya.ru, ^b sitov@yandex.ru, ^c knik@istu.edu^a <http://orcid.org/0000-0003-0222-2507>, ^b <https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>,^c <http://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

Статья поступила 24.10.2022, принята 03.11.2022

Развивается методология структурного математического моделирования в рамках приложения концепции динамических инвариантов в оценке состояний и форм динамических взаимодействий точек твердого тела механических колебательных систем, используемых в качестве расчетных схем технических объектов транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях вибрационных нагрузений силовой природы. В качестве модельных расчетных схем рассматриваются механические колебательные системы с двумя степенями свободы, находящиеся под воздействием связанных силовых возмущений. Для оценки динамических состояний механических колебательных систем используются методы структурного математического моделирования, основанные на сопоставлении механическим колебательным системам схем эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Многообразие динамических состояний точек твердого тела механических колебательных систем оценивается с помощью совокупностей динамических инвариантов, в обобщенном смысле отображающих характер взаимодействий на множестве частот с помощью количественных характеристик множеств режимов динамического гашения колебаний, режимов резонанса и знакоопределенных форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем. Для построения совокупности динамических инвариантов используются частотные функции обнуления амплитуд колебания координат объекта. Построенная конечная совокупность динамических инвариантов используется для регуляризации бесконечного семейства амплитудно-частотных характеристик множества точек твердого тела, совершающего вынужденные колебания под действием связанных сил. Для фиксированного коэффициента связности внешних силовых возмущений построены частные и полные динамические характеристики, рассматриваемые как функции координат точек твердого тела. Установлены особенности полных динамических характеристик в зависимости от варьируемого коэффициента связности. Выбор объекта, динамическое состояние которого оценивается, определение параметра системы, рассматриваемого в качестве фактора формирования динамических состояний, расчет частных и полных динамических характеристик выбранного параметра системы могут рассматриваться в качестве этапов метода регуляризации многообразия состояний и форм динамических взаимодействий элементов в решении задач оценки, контроля и формирования динамических состояний механических колебательных систем в условиях вибрационного нагружения силовой природы.

Ключевые слова: механическая колебательная система; колебания твердого тела; структурная математическая модель; передаточная функция; амплитудно-частотная характеристика; динамические состояния; формы динамических взаимодействий; динамические инварианты; резонансы; режимы динамического гашения колебаний; связанные внешние возмущения; силовые возмущения.

System approaches to the estimation of dynamic states of technical objects under vibration loads: frequency functions, dynamic invariants, regularization methods

A.V. Eliseev^{1,3a}, I.S. Sitov^{2b}, N.K. Kuznetsov^{3c}¹ Irkutsk State Transport University; 15, Chernyshevsky St., Irkutsk, Russia² Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia³ Irkutsk National Research Technical University; 83, Lermontov St., Irkutsk, Russia^a eavsh@ya.ru, ^b sitov@yandex.ru, ^c knik@istu.edu^a <http://orcid.org/0000-0003-0222-2507>, ^b <https://orcid.org/0000-0001-6785-632X>, ^c <http://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

Received 24.10.2022, accepted 03.11.2022

The methodology of structural mathematical modeling is developed within the framework of the application of the concept of dynamic invariants in the assessment of states and forms of dynamic interactions of solid points of mechanical oscillatory systems used as design schemes of technical objects of transport and technological purposes under conditions of vibrational loads of force nature. Mechanical oscillatory systems with two degrees of freedom under the influence of coherent force disturbances are considered as model design schemes. To assess the dynamic states of mechanical oscillatory systems, a structural approach is used based on the comparison of schemes of dynamically equivalent automatic control systems to mechanical oscillatory systems. The varieties of dynamic states of points of a rigid body of mechanical oscillatory systems are evaluated using sets of dynamic invariants, in a generalized sense, reflecting the nature of interactions at a set of frequencies using quantitative characteristics of sets of modes of dynamic oscillation, modes of resonances, and familiar forms of dynamic interactions of elements of a mechanical oscillatory system. To construct a set of dynamic invariants, the frequency zeroing function is used. The constructed finite set of dynamic invariants is used to regularize an infinite family of amplitude-frequency characteristics of a set of points of a solid body performing forced oscillations under the action of connected forces. For a fixed coefficient of connectivity of external force disturbances, partial and complete dynamic characteristics are constructed depending on the coordinates of the points of the solid. The features of the complete dynamic characteristics depending on the variable coefficient of connectivity are established. The selection of an object whose dynamic state is evaluated, the determination of a system parameter considered as a factor in the formation of dynamic states, the calculation of partial and complete dynamic characteristics of the selected system parameter can be considered as stages of the method of regularization of a variety of states and forms of dynamic interactions of elements in solving problems of evaluation, control and formation of dynamic states of mechanical oscillatory systems in conditions of vibrational loads of a forceful nature.

Keywords: mechanical oscillatory system; solid body vibrations; structural mathematical model; transfer function; amplitude-frequency response; dynamic states; forms of dynamic interactions; dynamic invariants; resonances; modes of dynamic vibration damping; connected external disturbances; force disturbances.

Введение. Проблемы обеспечения безопасности транспортных и технологических комплексов предопределяют внимание к системным разработкам в направлении фундаментальных научных исследований [1; 2]. Системные подходы к решению задач безопасного функционирования транспортного комплекса предполагают развитие методов управления динамическими характеристикам технических объектов с учетом требований к пропускной способности элементов транспортной инфраструктуры [3].

В рамках задач управления динамическими характеристиками значительное внимание уделяется вопросам оценки, контроля и формирования динамического качества взаимодействия элементов технических объектов транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях вибрационных нагрузений [4–11]. Необходимость в оценке, контроле и формировании динамических особенностей вибрационных нагрузений на технические объекты предопределяет внимание к развитию научно-методологического базиса решения широкого круга модельных задач на основе единого подхода с целью создания обобщенных представлений о колебательных системах. На роль единого методологического подхода могут претендовать так называемые методы структурного математического моделирования, объединяющие в единое целое структурные формы представлений о системах и аналитические содержания связей между элементами систем [12–14]. В рамках методологии структурного математического моделирования механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем технических объектов, сопоставляются схемы эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. В качестве входного сигнала в систему рассматриваются силовые возмущения, а в качестве выходных сигналов — движения элементов системы. Для оценки динамических взаимодействий используются передаточные функции системы. Методы структурного

математического моделирования нашли широкое применение в задачах вибрационной защиты и виброизоляции [15–17].

Системный подход в детализации представлений о динамических состояниях технических объектов находит свое развитие в формировании новых обобщений, связанных с возможностями регуляризации бесконечного семейства амплитудно-частотных характеристик передаточных функций с помощью конечного набора динамических инвариантов [18]. Характеристики динамических инвариантов, представляющие собой количества режимов динамического гашения колебаний, резонансов и знакоопределенных форм динамического взаимодействия элементов, в обобщенном виде отображают динамические состояния объектов механических колебательных систем цепного типа, или систем, образованных твердыми телами, совершающих свои движения в условиях связанных силовых возмущений.

В ряде работ, связанных с оценкой динамических состояний цепных механических колебательных систем, разработан подход к построению совокупности динамических инвариантов в зависимости от коэффициентов связности внешних силовых возмущений [19; 20].

Для систем с твердым телом, находящемся в условиях связанных силовых нагрузений, коэффициент связности внешних нагрузений может быть интерпретирован как точка приложения одиночного силового возмущения, динамические характеристики которого могут быть представлены с помощью совокупности динамических инвариантов, изменяющих свои значения в зависимости от варьируемой координаты точки приложения внешнего возмущения, тогда как точка, динамическое состояние которой оценивается, остается фиксированной. Наравне с оценкой совокупности динамических состояний фиксированной точкой твердого тела при изменении точки приложения одиночного силового возмущения

или коэффициента связности может быть рассмотрен вариант оценки динамических состояний совокупности точек твердого тела при условии, что точка приложения внешнего приложения фиксирована.

Вместе с тем, использование динамических инвариантов в рамках задач оценки динамических состояний совокупности точек твердого тела механических колебательных систем предполагает учет особенностей приложения внешних возмущений, что еще не получило должной детализации представлений в рамках структурного подхода.

Предлагаемая статья посвящена разработке метода обобщенной оценки, контроля и формирования динамических состояний точек твердого тела в зависимости от координат точки при условии фиксированного коэффициента связности приложения внешних силовых возмущений.

I. Основные положения. Постановка задачи. Рассматривается механическая колебательная система, образованная твердым телом с массой M и моментом инерции J , установленном на упругие опоры с жесткостями k_1, k_2 (рис.1).

Предполагается, что система совершает малые установившиеся колебания под воздействием приложенных к т.А и т.В связных гармонических синфазных возмущений Q_1, Q_2 :

$$Q_2 = \gamma Q_1, \quad (1)$$

где γ — коэффициент связности. Крепления упругих элементов реализуются в тт. А и В, отстоящих на расстояниях l_1 и l_2 от центра тяжести т.О_с твердого тела. На линии АВ твердого тела может быть выбрана произвольная точка т.Н с координатой h . Для фиксированного коэффициента связности γ динамическое состояние твердого тела определяется частотой ω внешних возмущений.

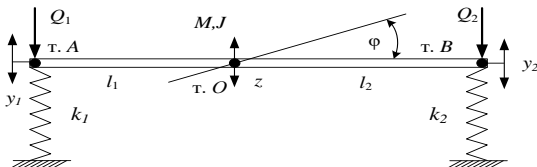


Рис. 1. Механическая колебательная система с твердым телом

Детализированные представления о динамическом состоянии твердого тела могут быть оценены на основе движения т.Н. Амплитуды колебаний т.Н твердого тела, в общем случае принимающие нулевые, положительные, отрицательные и бесконечные резонансные значения, и формы динамических взаимодействий, отображающие сонаправленности изменений координат точек и возмущающих сил, определяются коэффициентами связности γ и частотами ω силового возмущения. Для фиксированной т.Н твердого тела и произвольного коэффициента связности γ совокупность динамических состояний обладает рядом особенностей, характеризующихся количеством режимов обнуления амплитуд колебаний координат объекта, резонансов и знакоопределенных форм динамических взаимодействий. Для оценки разнообразия бесконечной совокупности динамических

взаимодействий, определяемой варьируемым коэффициентом связности, могут быть использованы динамические инварианты [18–20].

Вместе с тем, представления о совокупности динамических состояний семейства точек, распределенных по поверхности твердого тела, при условии фиксированных точек приложения внешнего возмущения или фиксированного характера связности еще не получили должного развития.

Задача заключается в разработке метода оценки совокупности динамических состояний и форм динамических взаимодействий точек твердого тела с учетом их положения при условии фиксированного коэффициента связности внешних силовых возмущений.

II. Математическая модель. Система дифференциальных уравнений движения твердого тела может быть построена в рамках формализма уравнений Лагранжа 2-го рода. В качестве двух равноправных систем обобщенных координат рассматриваются смещения $\{y_1, y_2\}$ тт. А и В относительно положения статического равновесия и величины $\{\varphi, z\}$, где φ — угол поворота твердого тела относительно центра тяжести; z — вертикальное смещение центра тяжести относительно положения статического равновесия. Используемые системы координат $\{y_1, y_2\}$ и $\{\varphi, z\}$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} y = ay_1 + by_2 \\ \varphi = c(y_2 - y_1) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_1 = y - l_1\varphi \\ y_2 = y + l_2\varphi \end{cases}, \quad (2)$$

где:

$$a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}; b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}; c = \frac{1}{l_1 + l_2}. \quad (3)$$

Потенциальная и кинетическая энергии системы могут быть выражены в смешанных координатах y_1, y_2, φ, z :

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1 y_1^2 + \frac{1}{2}k_2 y_2^2, \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{z}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2. \quad (5)$$

В системе обобщенных координат $\{y_1, y_2\}$ уравнение Лагранжа 2-го рода принимает вид:

$$\begin{cases} (Ma^2 + Jc^2)\ddot{y}_1 + k_1 y_1 + (Mab - Jc^2)\ddot{y}_2 = Q_1, \\ (Mab - Jc^2)\ddot{y}_1 + (Mb^2 + Jc^2)\ddot{y}_2 + k_2 y_2 = Q_2. \end{cases} \quad (6)$$

Под действием интегральных преобразований Лапласа система (6) приводится к системе алгебраических уравнений относительно изображений смещений y_1, y_2 [21]:

$$\begin{cases} ((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1)\bar{y}_1 + (Mab - Jc^2)p^2\bar{y}_2 = Q_1, \\ (Mab - Jc^2)p^2\bar{y}_1 + ((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2)\bar{y}_2 = Q_2. \end{cases} \quad (7)$$

где $p = j\omega$ — комплексная переменная, $j = \sqrt{-1}$; ω — частота внешнего возмущения. Символ « \rightarrow » над

переменной обозначает изображение Лапласа. На основе известных методов [13] алгебраическая система (7) представляется структурной схемой (рис. 2).

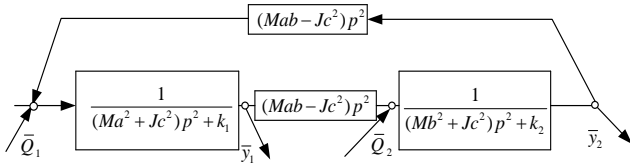


Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы на рис. 1

Динамические особенности движения твердого тела под действием внешних возмущений могут быть выражены с помощью передаточных функций системы, для которых силовое возмущение Q_1 рассматривается как входной сигнал, а смещения y_1 или y_2 — как выходной.

Вместе с тем, использование коэффициента связности γ и координаты h точки, динамическое состояние которой оценивается, приводит к необходимости рассмотрения бесконечного семейства передаточных функций. В качестве метода регуляризации может быть предложено разбиение бесконечного семейства передаточных функций на конечное множество классов, элементы которых обладают постоянными обобщенными особенностями.

III. Регуляризация динамических состояний семейства точек твердого тела с помощью частотной функции обнуления. На основе структурной схемы (см. рис. 2) с учетом коэффициента связности γ внешних возмущений может быть рассмотрено бесконечное семейство передаточных функции системы вида:

$$W_{11}(p) = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} \Big|_{\bar{Q}_1 \neq 0} = \frac{((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2) - \gamma(Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (8)$$

$$W_{21}(p) = \frac{\bar{y}_2}{Q_1} \Big|_{\bar{Q}_1 \neq 0} = \frac{((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1) - (Mab - Jc^2)p^2}{A(p)}, \quad (9)$$

где:

$$A(p) = ((Ma^2 + Jc^2)p^2 + k_1)((Mb^2 + Jc^2)p^2 + k_2) - ((Mab - Jc^2)p^2)^2. \quad (10)$$

Передаточные функции $W_{11}(p)$, $W_{21}(p)$ могут быть использованы для оценки динамических состояний тт. A и B твердого тела в предположении, что входным сигналом служит внешнее силовое возмущение с фиксированным коэффициентом связности γ , а выходными сигналами служат координаты y_1 и y_2 . На основе координат y_1 и y_2 могут быть определены

смещения y_h произвольной т. H , расположенной на твердом теле AB (рис. 3).

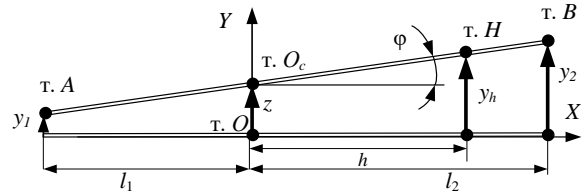


Рис. 3. Расчетная схема оценки смещения точки твердого тела

1. Для оценки динамических состояний произвольной точки твердого тела т. H , расположенной на расстоянии h от центра тяжести т. O_c , может быть рассмотрена передаточная функция:

$$W_h(p) = \frac{\bar{y}_h}{Q_1} \Big|_{\bar{Q}_1 \neq 0}, \quad (11)$$

где координата y_h (рис. 3) определена с помощью выражения (рис. 3):

$$y_h = (a - hc)y_1 + (b + ch)y_2 \quad (12)$$

С учетом смещения y_h передаточная функция (11) имеет вид:

$$W_h(p) \Big|_{\bar{Q}_1 = 0} = \frac{\bar{y}_h}{Q_1} = (a - ch) \frac{\bar{y}_1}{Q_1} + (b + ch) \frac{\bar{y}_2}{Q_1}. \quad (13)$$

Семейство амплитудно-частотных характеристик передаточных функций (13) определяется выражением:

$$A_h(\omega, \gamma) = \frac{\bar{y}_h}{Q_1}(p, \gamma) \Big|_{p=j\omega} \quad (14)$$

Представленное бесконечное множество амплитудно-частотных характеристик может быть разбито на конечную совокупность классов, элементы которых обладают фиксированным числом частот резонанса, режимов обнуления, знакоопределенных форм динамического взаимодействия, с помощью частотной функции обнуления, зависящей от координаты h :

$$\omega^2(\gamma, h) = \frac{c(k_1\gamma - k_2)h + (bk_1\gamma + ak_2)}{(Mac\gamma - Mbc)h + Jc^2(\gamma + 1)}. \quad (15)$$

С учетом коэффициента связности, рассматриваемого в качестве параметра, частотные функции обладают различными аналитическими особенностями. В дальнейшем рассмотрении предполагается, что выполнены условия $k_1\gamma - k_2 > 0$ и $a\gamma - b > 0$, при которых частотные функции обнуления имеют вид гиперболы с правой возрастающей ветвью (рис. 4).

2. Частотная функция обнуления позволяет построить разбиение множества координат т. H на основе граничных значений координат h_1 , h_2 , h_0 , h_{kr} . Граничные значения координат h_1 , h_2 находятся из условий совпадения частотной функции обнуления с

собственными частотами системы:

$$\omega^2(\gamma, h_1) = \sigma_1^2, \quad (16)$$

$$\omega^2(\gamma, h_2) = \sigma_2^2, \quad (17)$$

где собственные частоты σ_1 , σ_2 определяются соотношениями:

$$\sigma_1^2 = \frac{k_1(Mb^2 + Jc^2) + k_2(Ma^2 + Jc^2) - \sqrt{(k_1(Mb^2 + Jc^2) + k_2(Ma^2 + Jc^2))^2 - k_1k_2MJc^2}}{2MJc^2}, \quad (18)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{k_1(Mb^2 + Jc^2) + k_2(Ma^2 + Jc^2) + \sqrt{(k_1(Mb^2 + Jc^2) + k_2(Ma^2 + Jc^2))^2 - k_1k_2MJc^2}}{2MJc^2}. \quad (19)$$

Значения h_0 и h_{kp} координат т.Н определяются из условий обнуления числителя и знаменателя частотной функции обнуления (15):

$$c(k_1\gamma - k_2)h_0 + (bk_1\gamma + ak_2) = 0, \quad (20)$$

$$(Mac\gamma - Mbc)h_{kp} + Jc^2(\gamma + 1) = 0. \quad (21)$$

Полученные на основе частотной функции обнуления граничные точки определяют конечное разбиение бесконечного множества параметров (рис. 4):

$$\Gamma = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_8 \cup I_9, \quad (22)$$

где $I_1 = (-\infty, h_2)$, $I_2 = \{h_2\}$, $I_3 = (h_2, h_{kp})$, $I_4 = \{h_{kp}\}$, $I_5 = (h_{kp}, h_0)$, $I_6 = \{h_0\}$, $I_7 = (h_0, h_1)$, $I_8 = \{h_1\}$, $I_9 = (h_1, \infty)$.

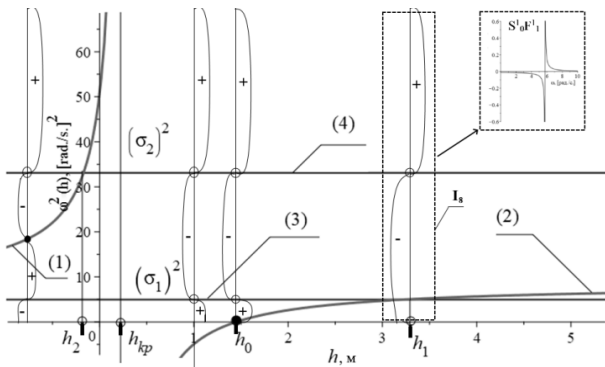


Рис. 4. Частотная функция обнуления для коэффициента связности $\gamma = 0$: h_1 , h_2 , h_0 , h_{kp} — граничные значения т. Н

В каждом множестве из конечного разбиения может быть выбрана характерная амплитудно-частотная характеристика, обладающая фиксированным набором динамических особенностей в виде количества резонансов, частот обнуления, количества знакопостоянных форм динамических взаимодействий элементов механической колебательной системы (рис. 5). В результате для четырех граничных точек,

входящих в разбиение множества параметров, может быть определено 5 интервалов, образующих разбиение Γ .

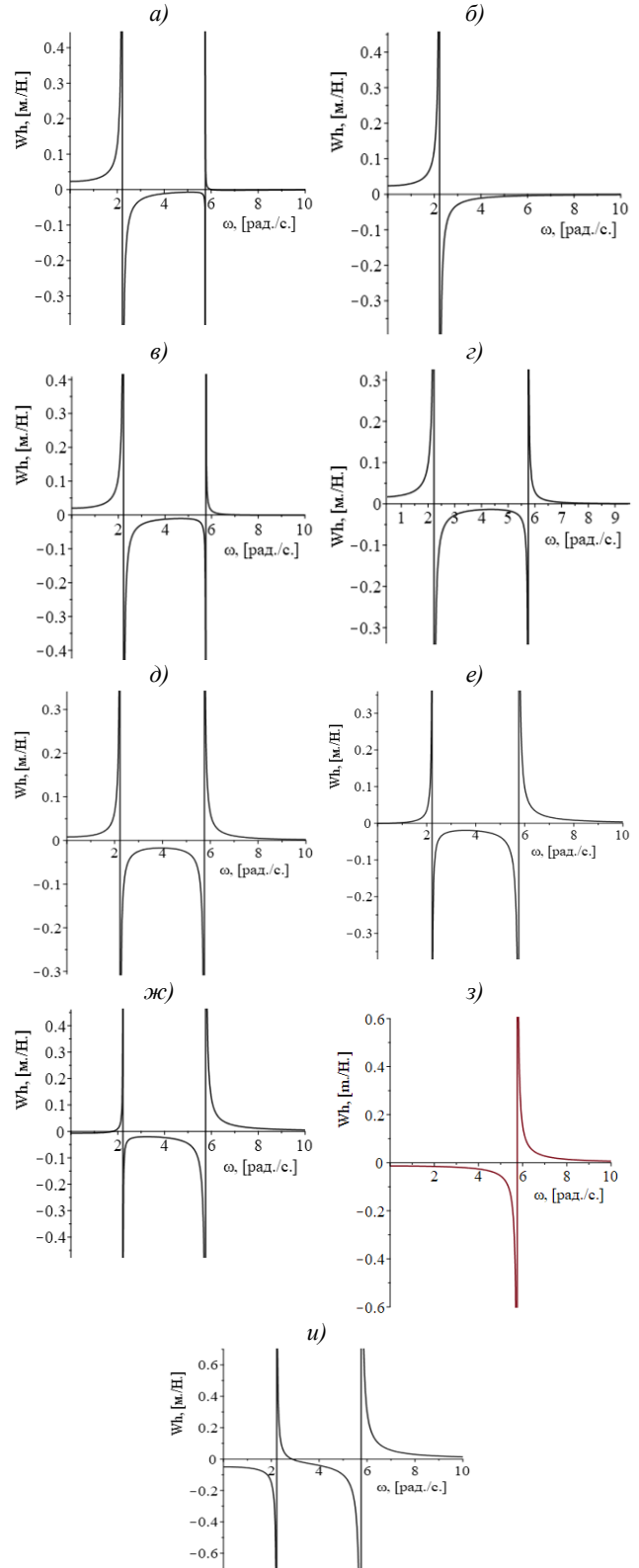


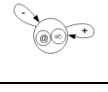
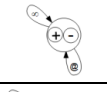
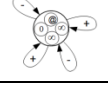
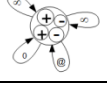
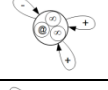
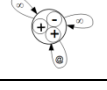
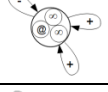
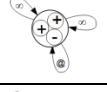
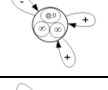
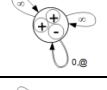
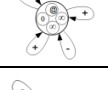
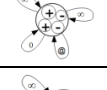
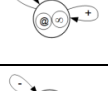
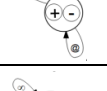
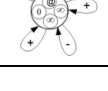
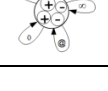


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики с заданными динамическими инвариантами: а — $S^2_1F^2_2(I_1)$; б — $S^1_0F^1_1(I_2)$; в — $S^2_1F^2_2(I_3)$; г — $S^2_0F^2_1(I_4)$; д — $S^2_0F^2_1(I_5)$; е — $S^2_1F^2_1(I_6)$; ж — $S^2_1F^2_2(I_7)$; з — $S^1_0F^1_1(I_8)$; и — $S^2_1F^2_2(I_9)$

На основе характерных амплитудно-частотных характеристик могут быть построены так называемые динамические инварианты в виде графов, сохраняющихся на классах разбиения.

Таблица 1. Динамические инварианты

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
I_1	$h < h_2$		
I_2	$h = h_2$		
I_3	$h_2 < h < h_{кр}$		
I_4	$h = h_{кр}$		
I_5	$h_{кр} < h < h_0$		
I_6	$h = h_0$		
I_7	$h_0 < h < h_1$		
I_8	$h = h_1$		
I_9	$h_1 < h$		

Динамические инварианты строятся на основе известных методов [18–20]. Характерные амплитудно-частотные характеристики могут быть представлены в виде своеобразных графов, отображающих существенные характеристики в виде вершин и направленных дуг.

IV. Динамические инварианты в оценке совокупности динамических состояний точек твердого тела. Для обобщения представлений о существенных динамических особенностях, отображаемых амплитудно-частотными характеристиками, вводится понятие динамического инварианта в виде ориентированного графа [18–20]. Каждый динамический инвариант отражает существенные особенности классов амплитудно-частотных характеристик в виде количества режимов резонанса, частот обнуления амплитуд колебания координаты точки динамического оценивания и числа знакопостоянных форм динамических взаимодействий. Представления о динамических особенностях могут быть представлены в унифицированном виде $S_l^k F_n^m$, где k — количество резонансов; l — количество режимов обнуления амплитуды колебания координаты объекта, динамическое состояние которого оценивается; m — количество положительных форм взаимодействий; n — количество отрицательных форм динамических

взаимодействий; $J_{k+l+m+n}$ — интегральная характеристика (табл. 2).

Таблица 2. Распределение динамических инвариантов по множествам разбиения координат h

	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
I_1	$h < h_2$	$S_1^2 F_2$	J_7
I_2	$h = h_2$	$S_0^1 F_1^1$	J_3
I_3	$h_2 < h < h_{кр}$	$S_1^2 F_2^2$	J_7
I_4	$h = h_{кр}$	$S_0^2 F_1^2$	J_5
I_5	$h_{кр} < h < h_0$	$S_0^2 F_1^2$	J_5
I_6	$h = h_0$	$S_1^2 F_1^2$	J_6
I_7	$h_0 < h < h_1$	$S_1^2 F_2^2$	J_7
I_8	$h = h_1$	$S_0^1 F_1^1$	J_3
I_9	$h_1 < h$	$S_1^2 F_2^2$	J_7

В зависимости от варьируемой координаты точки твердого тела динамические особенности в виде количества резонансов, частот обнуления и форм динамических взаимодействий могут быть представлены в виде кусочно-постоянных функций, когда каждой точке твердого тела сопоставляются количественные характеристики динамических особенностей (рис. 6).

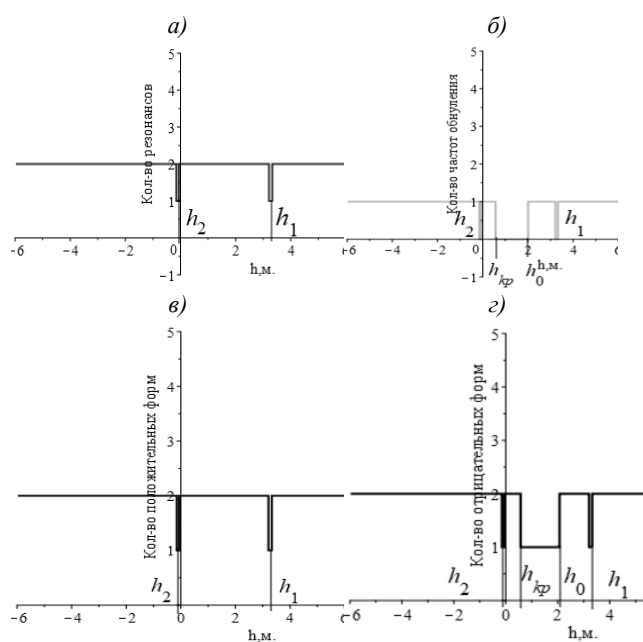


Рис. 6. Частные особенности динамических взаимодействий точек твердого тела в зависимости от координаты: *a* — число резонансов; *б* — число режимов обнуления амплитуды колебания объекта; *в* — число положительных форм динамических взаимодействий; *г* — число отрицательных форм динамических взаимодействий

Отдельные количественные характеристики в виде резонансов, количеств частот обнуления или числа знакоопределенных форм динамических взаимодействий могут быть представлены кусочно-постоянными функциями в зависимости от координаты h . Графическая форма представления частных характеристик динамических инвариантов позволяет

оценивать особенности различных аспектов взаимодействий объекта механической колебательной системы, динамическое состояние которого оценивается. В частности, для рассматриваемой системы в точках h_1 и h_2 система ведет себя как система с одной степенью свободы, не допускающая ни второго резонанса, ни режима динамического гашения (рис. 6, а). С другой стороны, режим динамического гашения колебаний может отсутствовать не только в конкретных точках с координатами h_1 и h_2 , но на интервале $(h_{кр}, h_0)$ точек твердого тела (рис. 6, б). Отдельного анализа требует факт совпадения числа резонансов (рис. 6, в) и положительных форм (рис. 6, а) динамических взаимодействий (рис. 6, в) или связи режимов динамического гашения и отрицательных форм (рис. 6, г) динамических взаимодействий

элементов механической колебательной системы в условиях связанных силовых нагружений.

Вместе с тем, для обобщенной оценки динамических особенностей движения объекта механической колебательной системы может быть использована интегральная или полная характеристика, представляющая собой сумму частных характеристик.

V. Интегральные характеристики динамических особенностей твердого тела с учетом связности силовых возмущений. Для фиксированного коэффициента связности γ может быть построена интегральная характеристика в виде кусочно-постоянной функции, представляющая собой алгебраическую сумму особенностей динамического взаимодействия элементов механической колебательной системы (рис. 7, а).

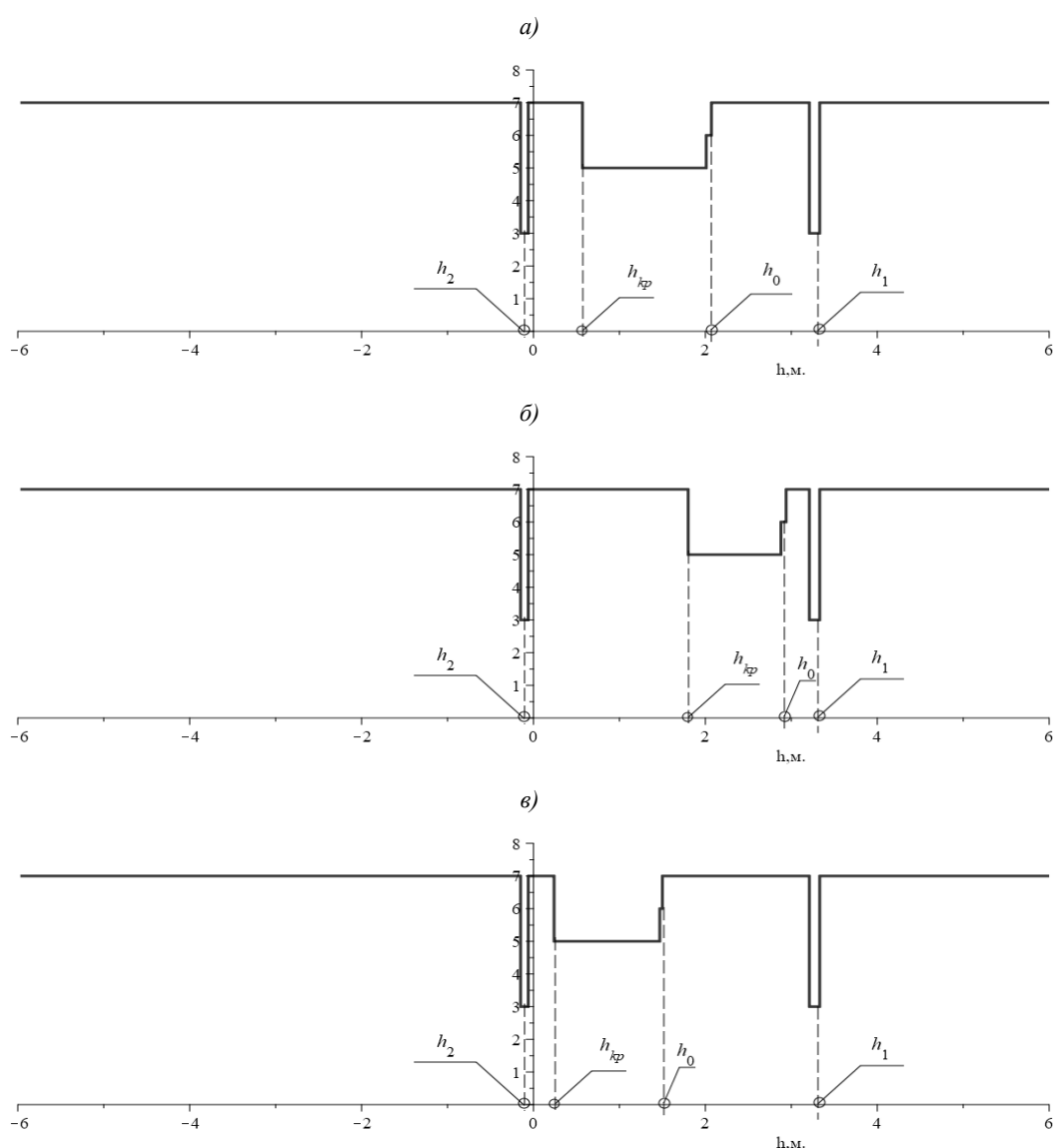


Рис. 7. Интегральные характеристики динамических особенностей твердого тела в зависимости от коэффициента связности: а — $\gamma = 0$; б — $\gamma = 0,3$; в — $\gamma = -0,3$

Изменение фиксированного значения коэффициента связности γ силовых возмущений Q_1, Q_2 находит свое отражение в частичном перераспределении граничных

точек, образующих разбиения множества координат точек поверхности твердого тела (рис. 7, б). Вместе с тем, можно сделать предположение, что изменение

коэффициента связности γ не приводит к изменению граничных значений координат h_1 и h_2 , в которых реализуются динамические инварианты J_3 . В результате варьирования коэффициента связности возможно изменение области реализации отрицательных форм динамических взаимодействий или области точек твердого тела, не допускающих реализацию режимов динамического гашения (рис. 7, в).

Для фиксированного коэффициента связности γ распределение динамических особенностей по координатам точек твердого тела обладает структурой, выражающейся в существовании областей с различными динамическими инвариантами. Дополнительно можно высказать предположение, что различным фиксированным коэффициентам связности могут быть сопоставлены различные варианты распределения динамических инвариантов по точкам поверхности твердого тела. С другой стороны, можно полагать, что на поверхности твердого тела имеются области или узловые точки, динамические инварианты которых не чувствительны к изменениям характера возмущающих воздействий.

Таким образом, показано, что варьирование коэффициента связности γ внешних силовых возмущений приводит к перераспределению динамических свойств по точкам твердого тела.

Заключение. Разработан подход к обобщенной оценке совокупности динамических состояний и форм взаимодействий элементов механической колебательной системы, образованной твердым телом, находящемся в условиях связанных силовых возмущений, отличающихся тем, что для оценки совокупности динамических состояний используются характеристики динамических инвариантов. В качестве объекта оценки рассматриваются точки твердого тела. Фактором формирования динамических состояний объекта служит координата или положение объекта на поверхности твердого тела. Показано, что совокупность динамических состояний объекта с учетом фактора формирования динамических состояний обладает определенной структурой, выражающейся в характере распределения динамических инвариантов по точкам поверхности твердого тела. Структура динамических состояний точек твердого тела для фиксированного силового возмущения определяется набором граничных точек и областями, в которых количества резонансов, режимов динамического гашения и форм взаимодействий элементов остаются постоянными. Распределение

динамических состояний по точкам твердого тела имеет кусочно-постоянную форму, отображающую возможность реализации в граничных точках динамических состояний, которые свойственны только для систем с одной степенью свободы. Наравне с граничными точками, обладающими спецификой систем с одной степенью свободы, могут быть определены области точек твердого тела, в которых не реализуются режимы обнуления амплитуд колебаний координаты объекта. В структуре состояний могут быть определены области, которые чувствительны к изменению характера силового возмущения, и области, которые не чувствительны к изменению характера силового возмущения.

Разработанный подход может служить базой для методов определения факторов формирования динамических состояний технических объектов, находящихся в условиях вибрационного нагружения.

Основными этапами подхода являются выбор объекта, динамическое состояние которого оценивается, указание параметра системы, который рассматривается как фактор формирования динамического состояния объекта, и построение полной или частной динамической характеристики связи между объектом и фактором, оказывающим воздействие на состояние системы. Объектом, динамическое состояние которого оценивается, является точка твердого тела или сосредоточенная масса. Можно полагать, что факторами, оказывающими воздействие на динамическое состояние объекта, могут являться координаты объектов, точки приложения силовых возмущений, жесткости элементов, массоинерционные характеристики и их сочетания. Сравнение факторов между собой может быть реализовано на основе их динамических характеристик, представляющих собой количества динамических особенностей в зависимости от параметра системы.

Разработка технологии перераспределения областей поверхности твердого тела создает предпосылки к разработке технологии управления вибрационным полем рабочего органа вибрационных технологических машин, реализующих специфические физические эффекты.

Таким образом, можно полагать, что разработанный подход может служить элементом научно-методологического базиса для решения широкого круга задач динамики, в частности, для задач управления вибрационным полем рабочих органов вибрационных технологических машин.

Литература

1. Махутов Н.А. Безопасность и риски: системные исследования и разработки. Новосибирск: Наука, 2017. 724 с.
2. Лапидус Б.М. О формировании актуальных направлений фундаментальных научных исследований в интересах опережающего развития ОАО «РЖД» // Железнодорожный транспорт. 2019. № 6. С. 26-30.
3. Стиславский А.Б., Цыгичко В.Н. Формальная постановка задачи обеспечения безопасности транспортного комплекса // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 41. С. 26-42.
4. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton: CRC Press, 2006. 1064 p.
5. Piersol A., Paez T. Harris' Shock and Vibration Handbook. McGraw-Hill, 2009. 1 168 p.
6. Вибрации в технике: справ. в 6-ти т. Вибрационные процессы и машины / под ред. Э.Э. Лавенделла. М.: Машиностроение, 1981. Т. 4. 504 с.
7. Rocard Y. General Dynamics of Vibrations. Paris: Masson, 1949. 458 p.
8. Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 262 p.

9. Пановко Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных технологий, 2006. 176 с.
10. Копылов Ю.Р. Динамика процессов виброударного упрочнения. Воронеж: ИПЦ «Науч. книга», 2011. 568 с.
11. Елисеев А.В., Сельвинский В.В., Елисеев С.В. Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неудерживающих связей. Новосибирск: Наука, 2015. 332 с.
12. Коловский М.З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 320 с.
13. Елисеев С.В. Прикладной системный анализ и структурное математическое моделирование (динамика транспортных и технологических машин: связность движений, вибрационные взаимодействия, рычажные связи). Иркутск: ИрГУПС, 2018. 692 с.
14. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham, 2020. 521 p.
15. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
16. Kolovsky M.Z. Nonlinear Dynamics of Active and Passive Systems of Vibration Protection. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. 429 p.
17. Елисеев С.В., Резник Ю.Н., Хоменко А.П., Засядко А.А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов: моногр. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2008. 523 p.
18. Eliseev A.V., Mironov A.S. Frequency functions in the formation of dynamic invariants of mechanical oscillatory systems taking into account the connectivity of external force excitations // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 29. P. 19-26.
19. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Nikolaev A.V. Dynamic invariants in the evaluation of structural features of mechanical oscillatory systems under the condition of connectivity of external force disturbances // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 30. P. 47-56.
20. Елисеев А.В., Кузнецов Н.К. Технология структурного математического моделирования технических объектов в условиях вибрационного нагружения: формы взаимодействий и динамические инварианты // iPolytech Journal. 2022. V. 26. № 3. P. 368-385.
21. Лурье А.И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. М.: Наука. 1959. 368 с.
4. Clarence W. de Silva. Vibration. Fundamentals and Practice. Boca Raton: CRC Press, 2006. 1064 p.
5. Piersol A., Paez T. Harris' Shock and Vibration Handbook. McGraw-Hill, 2009. 1 168 p.
6. Vibrations in technology: sprav. v 6-ti t. Vibracionnye processy i mashiny / pod red. E.E Lavendella. M.: Mashinostroenie, 1981. V. 4. 504 p.
7. Rocard Y. General Dynamics of Vibrations. Paris: Masson, 1949. 458 p.
8. Banakh L., Kempner M. Vibrations of Mechanical Systems with Regular Structure, Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 262 p.
9. Panovko G.YA. Dynamics of vibration technological processes. M.: Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika», In-t komp'yuternyh tekhnologij, 2006. 176 p.
10. Kopylov YU.R. Dynamics of vibration shock hardening processes. Voronezh: IPC «Nauch. kniga», 2011. 568 p.
11. Eliseev A.V., Sel'vinskij V.V., Eliseev S.V. Dynamics of vibrational interactions of elements of technological systems taking into account unilateral ties. Novosibirsk: Nauka, 2015. 332 p.
12. Kolovskij M.Z. Automatic control of vibration protection systems. M.: Nauka, 1976. 320 p.
13. Eliseev S.V. Applied system analysis and structural mathematical modeling (dynamics of transport and technological machines: connectivity of movements, vibration interactions, lever connections). Irkutsk: IrGUPS, 2018. 692 p.
14. Eliseev S.V., Eliseev A.V. Theory of Oscillations. Structural Mathematical Modeling in Problems of Dynamics of Technical Objects. Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol.252, Springer International Publishing, Cham, 2020. 521 p.
15. Karnovsky I.A., Lebed E. Theory of Vibration Protection. Springer International Publishing, Switzerland, 2016. 708 p.
16. Kolovsky M.Z. Nonlinear Dynamics of Active and Passive Systems of Vibration Protection. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. 429 p.
17. Eliseev S.V., Reznik YU.N., Homenko A.P., Zasyadko A.A. Dynamic synthesis in generalized problems of vibration protection and vibration isolation of technical objects: monogr. Irkutsk: Izd-vo IGU, 2008. 523 p.
18. Eliseev A.V., Mironov A.S. Frequency functions in the formation of dynamic invariants of mechanical oscillatory systems taking into account the connectivity of external force excitations // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 29. P. 19-26.
19. Eliseev A.V., Kuznetsov N.K., Nikolaev A.V. Dynamic invariants in the evaluation of structural features of mechanical oscillatory systems under the condition of connectivity of external force disturbances // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 30. P. 47-56.
20. Eliseev A.V., Kuznecov N.K. Technology of structural mathematical modeling of technical objects under conditions of vibration loading: forms of interactions and dynamic invariants // iPolytech Journal. 2022. V. 26. № 3. P. 368-385.
21. Lur'e A.I. Operational calculus and application in technical applications. M.: Nauka. 1959. 368 p.

References

1. Mahutov N.A. Security and risks: system research and development. Novosibirsk: Nauka, 2017. 724 p.
2. Lapidus B.M. On the formation of current directions of fundamental scientific research in the interests of advanced development of JSC "Russian Railways" // ZHeleznodorozhnyj transport. 2019. № 6. P. 26-30.
3. Stislavskij A.B., Cygichko V.N. Formal statement of the task of ensuring the safety of the transport complex // Trudy ISA RAN. 2009. V. 41. P. 26-42.