УДК 536.24 DOI:10.18324/2077-5415-2022-3-66-70

Аналитический метод расчета нестационарной теплопроводности плоского тела при переменном коэффициенте конвективного теплообмена

Ю.В. Видин[1a], В.С. Злобин[1b], А.А. Федяев[2c], В.Н. Федяева[3d]

[1] Сибирский федеральный университет, пр. Свободный, 79, Красноярск, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С.М. Кирова, Институтский пер., 5, Санкт-Петербург, Россия
[3] Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, Братск, Россия
[a, b] zlobinsfu@mail.ru, [c, d] vends1@mail.ru
[a] https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [b] https://orcid.org/0000-0002-4281-3857,
[c] https://orcid.org/0000-0001-6233-3757, [d] https://orcid.org/0000-0001-7320-9727
Статья поступила 01.09.2022, принята 14.09.2022

Одними из наиболее важных и актуальных задач теплообмена являются задачи с нестационарными граничными условиями. В процессе нагрева либо охлаждения изделий изменяется как тепловое состояние, так и интенсивность теплового потока на поверхности. В статье рассмотрен аналитический метод решения задачи определения нестационарного температурного поля плоского тела при переменном во времени коэффициенте конвективного теплообмена. В основу предлагаемого приема решения поставленной задачи положен принцип замещения процесса конвективного теплообмена на поверхности изделия условным теплоотводом на его внешней границе, т. е. граничное условие 3-го рода заменяется на равноценное фиктивное нестационарное граничное условие 2-го рода. Такой подход является весьма продуктивным, так как позволяет получить достаточно просто основные параметры конвективного теплообмена, т. е. температуру поверхности изучаемого тела и число Био в зависимости от времени. Предлагаемый в статье приближенный метод может быть использован для решения широкого класса важных задач теплопроводности с различными граничными условиями.

Ключевые слова: аналитическое решение; нестационарные граничные условия; характеристические числа; приближенные методы; бесконечные ряды; итерационный процесс.

Analytical method for calculating the unsteady thermal conductivity of a flat body with a variable coefficient of convective heat transfer

Yu.V. Vidin[1a], V.S. Zlobin[1b], A.A. Fedyaev[2c], V.N. Fedyaeva[3d]

[1] Siberian Federal University; 79, Svobodny Per., Krasnoyarsk, Russia
[2] St. Petersburg State Forest University named after S.M. Kirov; Institutsky Per., St. Petersburg, Russia
[3] Bratsk State University; 40, Makarenko St., Bratsk, Russia
[a, b] zlobinsfu@mail.ru, [c, d] vends1@mail.ru
[a] https://orcid.org/0000-0002-3777-6676, [b] https://orcid.org/0000-0002-4281-3857,
[c] https://orcid.org/0000-0001-6233-3757, [d] https://orcid.org/0000-0001-7320-9727
Received 01.09.2022, accepted 14.09.2022

One of the most important and urgent problems of heat exchange are problems with non-stationary boundary conditions. During the heating or cooling of the articles, both the thermal state and the intensity of the thermal flow on the surface change. The article considers an analytical method for solving the problem of determining the unsteady temperature field of a flat body with a time-variable coefficient of convective heat transfer. The proposed method of solving the problem is based on the principle of replacing the process of convective heat exchange on the surface of the product with a conditional heat sink at its outer boundary, i.e. the boundary condition of the third kind is replaced by an equivalent fictitious non-stationary boundary condition of the second kind. This approach is very productive, because it makes possible to obtain quite simply the basic parameters of convective heat exchange, i.e. the surface temperature of the body under study and the number of Bio depending on time. The approximate solution method proposed in the article can be used to solve a wide class of important thermal conductivity problems with various boundary conditions.

Keywords: analytical solution; unsteady boundary conditions; characteristic numbers; approximate methods; infinite series; iterative process.

Введение. Теория задач теплопроводности твердых тел и методы их решения подробно рассмотрены в известных монографиях [1; 2]. Методам решения данных задач — как аналитическим [3–5], так и численным [6–10] — посвящена обширная литература. К числу наиболее сложных относятся задачи, в которых теплофизические свойства материалов зависят от температуры, а граничные условия нелинейны [11–17]. Проблема определения нестационарного температурного поля твердых тел при переменных теплофизических коэффициентах, в частности, когда коэффициенты конвективного теплообмена на граничных поверхностях являются произвольными функциями времени, представляет как большой теоретический интерес, так и важна для инженерной практики [12; 13]. Предложен ряд приближенных аналитических методов исследования подобного класса теплофизических задач, например [12; 13; 16; 17]. Однако они достаточно громоздки и трудоемки для вычисления.

В статье предлагается аналитический метод решения задачи определения нестационарного температурного поля плоского тела при переменном во времени коэффициенте конвективного теплообмена. В основу предлагаемого приема решения поставленной задачи положен принцип замещения процесса конвективного теплообмена на поверхности изделия условным теплоотводом на его внешней границе, т. е. граничное условие 3-го рода заменяется на равноценное фиктивное нестационарное граничное условие 2-го рода. Предлагаемый авторами статьи подход к решению подобных задач позволяет существенно повысить точность и быстроту выполнения вычислительных операций, а также уменьшить их трудоемкость.

Постановка и исследование задачи конвективного теплообмена. Проиллюстрируем рекомендуемый метод на примере следующей задачи, представленной в безразмерном виде для неограниченного плоского тела:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial X^2}, \tag{1}$$

$$0 < \mathrm{Fo} < \infty; \; 0 < X < 1,$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial X} = 0 \text{ при } X = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial X} = -\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})\vartheta \text{ при } X = 1, \tag{3}$$

$$\vartheta = 1 \text{ при } \mathrm{Fo} = 0. \tag{4}$$

В том случае, когда безразмерное число Bi является постоянной величиной, решение задачи (1)–(4) не представляет трудности и может быть получено в сравнительно простом виде как для начальной стадии процесса (число Fo мало), так и для регулярного режима ($\mathrm{Fo} \geq 0{,}5$) [1]. Однако все значительно усложняется, если $\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})$ оказывается переменной величиной. Это естественно обусловлено тем, что при изменяющемся числе Bi колоссально расширяется класс задач нестационарной теплопроводности по сравнению со случаем $\mathrm{Bi} = const$. Поэтому исследование задачи типа (1)–(4) имеет особо важный как прикладной, так и теоретический интерес.

В основу предлагаемого приема решения поставленной задачи положен принцип замещения процесса конвективного теплообмена на поверхности изделия условным теплоотводом на его внешней границе. Тогда задача (1)–(4) в математическом отношении может быть сведена к следующему эквивалентному виду:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial X^2}, \tag{5}$$

$$0 < \mathrm{Fo} < \infty; \; 0 < X < 1,$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial X} = 0 \text{ при } X = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial X} = -Q(\mathrm{Fo}) \text{ при } X = 1, \tag{7}$$

$$\vartheta = 1 \text{ при } \mathrm{Fo} = 0. \tag{8}$$

Таким образом, вместо фактического нестационарного граничного условия 3-го рода (3) вводится равноценное фиктивное нестационарное граничное условие 2-го рода (7).

Формально, строгое аналитическое решение задачи типа (5)–(8) в общем виде известно [12]:

$$\vartheta(X,\mathrm{Fo}) = 1 - \int_0^{\mathrm{Fo}} Q(\eta)d\eta - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K_n(X) \times$$

$$\times \exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right)\left[\int_0^{\mathrm{Fo}} Q(\eta)\exp\left(\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right)d\eta\right]. \tag{9}$$

Здесь собственные числа μ_n являются корнями характеристического уравнения:

$$\operatorname{ctg}\mu \mapsto \infty, \tag{10}$$

т. е. $$\mu_n = n\pi, \; n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{11}$$

а собственные функции $K_n(X)$ равны:

$$K_n(X) = \cos(\mu_n X). \tag{12}$$

На основе зависимости (9) нетрудно выразить температуру поверхности тела $(X = 1)$

$$\vartheta(1,\mathrm{Fo}) = 1 - \int_0^{\mathrm{Fo}} Q(\eta)d\eta - 2\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right) \times$$

$$\times \left[\int_0^{\mathrm{Fo}} Q(\eta)\exp\left(\mu_n^2 \mathrm{Fo}\right)d\eta\right]. \tag{13}$$

Из сопоставления уравнений (3) и (7) следует, что:

$$Q(\mathrm{Fo}) = \mathrm{Bi}(\mathrm{Fo}) \cdot \vartheta(1,\mathrm{Fo}). \tag{14}$$

Отсюда вытекает, что в начальный момент времени $(\mathrm{Fo} = 0)$, исходя из начального условия (4), должно выполняться равенство:

$$Q(0) = \mathrm{Bi}(0), \tag{15}$$

а при завершении процесса теплообмена тепловой поток:

$$Q(\infty) \mapsto 0. \tag{16}$$

В качестве примера рассмотрим вариант, когда:

$$Q(\mathrm{Fo}) = \exp(-a\,\mathrm{Fo}), \tag{17}$$

что соответствует случаю, для которого $\mathrm{Bi}(0)=1{,}0$. Примем, что $a=1{,}0$. Подставляя (17) в (13), находим:

$$\vartheta(1,\mathrm{Fo})=\left(1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2-1}\right)\exp(-\mathrm{Fo})+ +2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2-1}\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right). \quad (18)$$

Очевидно, что формула (18) является строгим решением задачи (1)–(4) при изменении числа Bi по закономерности:

$$\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})=\frac{Q(\mathrm{Fo})}{\vartheta(1,\mathrm{Fo})}= =\frac{\exp(-\mathrm{Fo})}{\left(1-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2-1}\right)\exp(-\mathrm{Fo})+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2-1}\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right)} \quad (19)$$

В табл. 1 приведены некоторые значения величины Bi, рассчитанные по соотношению (19).

Таблица 1. Значения числа Био, рассчитанные по формуле (19)

Fo	Bi
0	1.0
0.005	1.0807383
0.01	1.1147805
0.05	1.2580336
0.1	1.3581652
0.2	1.4693420
0.5	1.5504625
0.8	1.5564639
1.0	1.5568396

Анализ цифровых данных этой таблицы показывает, что характер изменения Bi является довольно динамичным. Выражение (9) позволяет весьма просто определить температурное поле $\vartheta(X,\mathrm{Fo})$ для принятого закона изменения теплового потока $Q(\mathrm{Fo})$ и, значит, соответствующей ему закономерности поведения числа Био $\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})$ (19).

Для упрощения вычислений по соотношениям вида (18) и (19), а также (9), целесообразно использовать данные табл. 2, в которой приведены суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2-a}$ при фиксированных величинах коэффициента a. При этом известно, что наименьшее значение этого ряда при положительных a имеет место для $a=0$ [18]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}=\frac{1}{6}. \quad (20)$$

С возрастанием параметра a указанный ряд увеличивается, что наглядно подтверждает табл. 2.

Таблица 2. Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^2-a}$ при различных значениях коэффициента a

n	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2-1}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2-1{,}5}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2-2}$
5	0.160562	0.167733	0.175770
10	0.169308	0.176488	0.184534
50	0.176947	0.184129	0.192176
100	0.177946	0.185127	0.193175
200	0.178448	0.185629	0.193677
400	0.178701	0.185882	0.193929
600	0.178784	0.185967	0.194014
800	0.178827	0.186009	0.194056
1 000	0.178852	0.186034	0.194081

Важно добавить, что, начиная со сравнительно небольших значений числа Фурье Fo, предпочтительнее использовать вместо решения (9) приближенное выражение вида [12]:

$$\vartheta(X,\mathrm{Fo})=1-\int_0^{\mathrm{Fo}}Q(\eta)d\eta-Q(\mathrm{Fo})P_1(X)- -Q'(\mathrm{Fo})P_2-Q''(\mathrm{Fo})P_3+ +Q(0)\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos(\mu_n X)\exp\left(-\mu_n^2\mathrm{Fo}\right), \quad (21)$$

где $\mu_n=n\pi$, а полиномы $P_1(X)$, $P_2(X)$, $P_3(X)$ соответственно записываются следующим образом [12]:

$$P_1(X)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}X^2; \quad (22)$$

$$P_2(X)=\frac{X^4}{24}-\frac{X^2}{12}+\frac{7}{360}; \quad (23)$$

$$P_3(X)=\frac{X^6}{720}-\frac{X^4}{144}+\frac{7X^2}{720}-\frac{141}{5040}. \quad (24)$$

Это приближенное аналитическое решение оказывается при выполнении расчетных операций более простым по сравнению с (9). Вполне очевидно, что если отводимый от тела поток Q остается на протяжении всего процесса постоянным ($Q=const$), то рекомендуемое решение (23) становится математически точным и более простым, так как тогда исчезают производные Q', Q'' и последующие. Полиномы $P_n(X)$ с ростом порядкового номера быстро уменьшаются.

Из (21) вытекает:

$$\vartheta(1,\mathrm{Fo})=1-\int_0^{\mathrm{Fo}}Q(\eta)d\eta-\frac{1}{3}Q(\mathrm{Fo})+\frac{1}{45}Q'(\mathrm{Fo})-\ldots+ +Q(0)\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-n^2\pi^2\mathrm{Fo}\right). \quad (25)$$

Таким образом, тогда имеем:

$$\frac{Q(\mathrm{Fo})}{\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})}=1-\int_0^{\mathrm{Fo}}Q(\eta)d\eta-\frac{1}{3}Q(\mathrm{Fo})+\frac{1}{45}Q'(\mathrm{Fo})-\ldots \quad (26)$$

Дифференцируя левую и правую части зависимости (27), получим соотношение:

$$\frac{\mathrm{Bi}\,Q' - \mathrm{Bi}'Q}{\mathrm{Bi}^2} = -Q(\mathrm{Fo}) - \frac{1}{3}Q'(\mathrm{Fo}) + \frac{1}{45}Q''(\mathrm{Fo}) - ... \qquad (27)$$

на основании которого выводим дифференциальное уравнение для нахождения теплового потока $Q(\mathrm{Fo})$:

$$\left(\frac{\mathrm{Bi}'}{\mathrm{Bi}^2} - 1\right)Q - \frac{3+\mathrm{Bi}}{3\,\mathrm{Bi}}Q'(\mathrm{Fo}) + \frac{1}{45}Q''(\mathrm{Fo}) - ... = 0 \qquad (28)$$

В том случае, когда число Bi является постоянной величиной, приближенное аналитическое решение уравнения (28) принимает простой вид:

$$Q(\mathrm{Fo}) = Q_0 \exp\left(-\mu^2 \mathrm{Fo}\right), \qquad (29)$$

где:

$$\mu^2 = -15\frac{3+\mathrm{Bi}}{2\mathrm{Bi}} + \sqrt{\frac{225(3+\mathrm{Bi})^2}{4\mathrm{Bi}^2} + 45} \cdot \qquad (30)$$

На начальной стадии изучаемого процесса, т. е. при малых величинах числа Фурье (допустим, при $\mathrm{Fo} < 0{,}1$), целесообразно использовать рекомендуемые в [1] соотношения применительно к процессам (1)–(4) и (5)–(8) соответственно для нахождения температуры поверхности плоского тела, являющейся, как правило, наиболее необходимой для оценки динамики теплообмена.

Эти зависимости можно записать в критериальной форме:

$$\vartheta(1,\mathrm{Fo}) = \exp\left(\mathrm{Bi}^2\mathrm{Fo}\right)\mathrm{erfc}\left(\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right), \qquad (31)$$

$$\vartheta(1,\mathrm{Fo}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}Q(\mathrm{Fo}) \cdot \qquad (32)$$

Здесь $\mathrm{erfc}\left(\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right)$ — специальная функция, сравнительно подробно протабулированная в [18; 19]. Следует отметить, что формулы (31) и (32), во-первых. применимы при малых величинах Fo и, во-вторых, при неизменных на рассматриваемом начальном интервале времени $0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}^*$ Bi и Q.

Однако, несмотря на указанные ограничения, эти зависимости могут быть полезными и в случае, когда Bi и Q меняются на указанном отрезке времени не слишком сильно. Покажем математические возможности приведенных выражений на конкретном числовом примере. Для случая, когда поток $Q(\mathrm{Fo}) = \exp(-\mathrm{Fo})$, пределы его изменения на начальном временном участке $\mathrm{Fo} = 0 \div 0{,}01$ $Q_{\max} = 1.0$ и $Q_{\min} = 0.99005$. Следовательно, минимальное и максимальное значения температуры поверхности пластины в момент $\mathrm{Fo} = 0.01$ будут равны:

$$\vartheta_{\min}(1; 0.01) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 \cdot \sqrt{0.01} = 0.88716,$$

$$\vartheta_{\max}(1; 0.01) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 0.99005 \cdot \sqrt{0.01} = 0.88829,$$

т. е. различие невелико. Далее, находим соответствующие величины для Bi по зависимостям:

$$\mathrm{Bi}_{\max}(0.01) = \frac{1}{0.88716} = 1.1272,$$

$$\mathrm{Bi}_{\min}(0.01) = \frac{0.99005}{0.88829} = 1.11456 \cdot$$

Подставляя эти значения в (21), получим соответственно:

$$\vartheta_{\min}(1; 0.01) = \exp\left(1.1272^2 \cdot 0.01\right) \times \times \mathrm{erfc}\left(1{,}1272\sqrt{0.01}\right) = 0.88452,$$

$$\vartheta_{\max}(1; 0.01) = \exp\left(1.11456^2 \cdot 0.01\right) \times \times \mathrm{erfc}\left(1.11456\sqrt{0.01}\right) = 0.8857.$$

Эти полученные оценочные величины температуры поверхности пластины для фиксированного времени $\mathrm{Fo} = 0.01$ практически полностью согласуются с данными численного расчета температурного поля при реализации закономерности изменения функции Bi по формуле (19).

Заключение. На основе приведения исходного нестационарного граничного условия 3-го рода к замещающему его условию 2-го рода в задаче нагрева пластины с переменным во времени коэффициентом теплоотдачи получено дифференциальное уравнение для нахождения нестационарного теплового потока с поверхности пластины, решая которое аналитически либо численным методом, могут быть получены все основные характеристики тепловой задачи. Для определенных частных случаев может быть получено аналитическое решение данного уравнения в явном виде. Рекомендуемый метод может быть применен также в случае несимметричных граничных условий 3-го рода.

Литература

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 600 с.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 486 с.
3. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности: в 2-х ч. М.: Высш. школа, 1982. Ч. 2. 304 с.
4. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. 2-е изд., доп. М.: Высш. школа, 1985. 480 с.
5. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высш. школа, 2005. 430 с.
6. Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
8. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. М.: Мир, 1988. 544 с.
9. Morton K.W., Mayers D.F. Numerical Solution of Partial Differential Equations. Cambridge University Press, 2005.
10. Brenner S., Scott L.R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Second Edition. Springer, 2002.
11. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1970. № 5. С. 109-150.

12. Видин Ю.В. Инженерные методы расчета процессов теплопереноса. Красноярск: КрПИ, 1974. 144 с.
13. Цой П.В. Методы расчета задач тепломассопереноса. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 1984. 414 с.
14. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. Аналитический метод расчета нестационарного температурного поля при переменном коэффициенте теплопроводности // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 1 (41). С. 57-60.
15. Видин Ю.В., Злобин В.С., Федяев А.А. К расчету нестационарного температурного поля плоского тела при экспоненциальной зависимости коэффициента теплопроводности от координаты // Системы. Методы. Технологии. 2019. № 2 (42). С. 55-59.
16. Карташов Э.М. Теплопроводность при переменном коэффициенте теплообмена // Теплофизика высоких температур. 2019. Т. 57. № 5. С. 694-701.
17. Стефанюк Е.В., Кудинов В.А. Аналитические решения задач теплопроводности при переменных во времени коэффициентах теплоотдачи // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2008. Вып. 2 (17). С. 171-184.
18. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977. 342 с.
19. Сегал Б.И., Семендяев К.А. Пятизначные математические таблицы. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 464 с.

References

1. Lykov A.V. Theory of thermal conductivity. M.: Vyssh. shkola, 1967. 600 p.
2. Karslou G., Eger D. Thermal conductivity of solids. M.: Nauka, 1964. 486 p.
3. Belyaev N.M., Ryadno A.A. Methods of the theory of thermal conductivity: v 2-h ch. M.: Vyssh. shkola, 1982. CH. 2. 304 p.
4. Kartashov E.M. Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids. 2-e izd., dop. M.: Vyssh. shkola, 1985. 480 p.
5. Kudinov V.A., Kartashov E.M., Kalashnikov V.V. Analytical solutions of heat and mass transfer and thermoelasticity problems for multilayer structures. M.: Vyssh. shkola, 2005. 430 p.
6. Samarskij A.A., Vabishevich P.N. Computational heat transfer. M.: Editorial URSS, 2003. 784 p.
7. Samarskij A.A. Theory of difference schemes. M.: Nauka, 1989. 616 p.
8. SHi D. Numerical methods in heat transfer problems. M.: Mir, 1988. 544 p.
9. Morton K.W., Mayers D.F. Numerical Solution of Partial Differential Equations. Cambridge University Press, 2005.
10. Brenner S., Scott L.R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Second Edition. Springer, 2002.
11. Lykov A.V. Methods for solving nonlinear equations of unsteady thermal conductivity // Izv. AN SSSR. Energetika i transport. 1970. № 5. P. 109-150.
12. Vidin YU.V. Engineering methods for calculating heat transfer processes. Krasnoyarsk: KrPI, 1974. 144 p.
13. Coj P.V. Methods for calculating heat and mass transfer problems. 2-e izd., pererab. i dop. M.: Energoatomizdat, 1984. 414 p.
14. Vidin YU.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. Analytical method for calculating a non-stationary temperature field with a variable coefficient of thermal conductivity // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 1 (41). P. 57-60.
15. Vidin YU.V., Zlobin V.S., Fedyaev A.A. On the calculation of the unsteady temperature field of a flat body with an exponential dependence of the thermal conductivity coefficient on the coordinate // Systems. Methods. Technologies. 2019. № 2 (42). P. 55-59.
16. Kartashov E.M. Thermal conductivity at variable heat transfer coefficient // High Temperature. 2019. V. 57. № 5. P. 694-701.
17. Stefanyuk E.V., Kudinov V.A. Analytical solutions of heat conduction problems with time-variable heat transfer coefficients // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2008. Vyp. 2 (17). P 171-184.
18. YAnke E., Emde F., Lyosh F. Special functions. M.: Nauka, 1977. 342 p.
19. Segal B.I., Semendyaev K.A. Five-digit mathematical tables. M.: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1962. 464 p.