

Расчет динамики одного типа трехзвенного манипулятора на основе метода гармонической линеаризации

С.В. Алексеева^{1a}, В.А. Марков^{1b}, В.А. Соколова^{2c}, А.М. Иванов^{1d}, М.Р. Мирзоева^{1e}

¹ Санкт-Петербургский лесотехнический университет им. С.М. Кирова, Институтский пер., 5, Санкт-Петербург, Россия

² Военная академия связи им. С.М. Буденного, пр. Тихорецкий, 3, Санкт-Петербург, Россия

^a pum222@mail.ru, ^b mactor85@mail.ru, ^c sokolova_vika@inbox.ru,

^d andreyiv1997@mail.ru, ^e mariam.mirzoeva16@yandex.ru

^a <https://orcid.org/0000-0002-0629-5650>, ^b <https://orcid.org/0000-0002-4986-4155>, ^c <https://orcid.org/0000-0001-6880-445X>,

^d <https://orcid.org/0000-0002-4118-6740>, ^e <https://orcid.org/0000-0002-0676-9473>

Статья поступила 19.04.2022, принята 30.04.2022

В статье исследован трехзвенный манипулятор, имеющий две поступательные и одну вращательную кинематические пары 5-го класса. Оси первой и второй кинематических пар ортогональны, а второй и третьей — параллельны. Такие роботы находят применение в загрузке-разгрузке технологического оборудования, для дуговой сварки. Для рассматриваемого манипулятора были получены системы трех нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, описывающие его динамику. В связи с необходимостью оценки момента нагрузки, возникающей на валу управляющего привода, внешние обобщенные силы были приведены к соответствующей обобщенной координате. Для исследования манипуляционной системы применялся метод гармонической линеаризации нелинейностей. Применение метода обусловлено тем, что он позволяет без изучения переходного процесса системы находить основные характеристики системы, такие как частота, амплитуда и фаза колебаний, зависимость от формы нелинейностей, параметров линейной части системы и т. д. Получены соотношения, позволяющие определять собственные колебательные режимы движения рассматриваемого типа манипулятора. Эти соотношения могут быть использованы при расчете, проектировании и наладке такого манипулятора. Установлено, что в случае, когда система уравнений, описывающая динамику рассматриваемого в работе манипулятора, с учетом уравнений, описывающих динамику приводов, не содержит сильно выраженных нелинейностей, эти соотношения представляют собой систему двух алгебраических уравнений относительно частоты 6-й и 5-й степени соответственно.

Ключевые слова: трехзвенный манипулятор; уравнения динамики; метод гармонической линеаризации нелинейностей.

Calculation of dynamics of one type of three-link manipulator on the basis of harmonic linearization method

S.V. Alekseeva^{1a}, V.A. Markov^{1b}, V.A. Sokolova^{2c}, A.M. Ivanov^{1d}, M.R. Mirzoeva^{1e}

¹ St. Petersburg State Forest Technical University named after of S.M. Kirov; 5, Institutsky Per., St. Petersburg, Russia

² Military Academy of Communications named after S.M. Budenny; 3, Tikhoretsky Pros., St. Petersburg, Russia

^a pum222@mail.ru, ^b mactor85@mail.ru, ^c sokolova_vika@inbox.ru,

^d andreyiv1997@mail.ru, ^e mariam.mirzoeva16@yandex.ru

^a <https://orcid.org/0000-0002-0629-5650>, ^b <https://orcid.org/0000-0002-4986-4155>, ^c <https://orcid.org/0000-0001-6880-445X>,

^d <https://orcid.org/0000-0002-4118-6740>, ^e <https://orcid.org/0000-0002-0676-9473>

Received 19.04.2022, accepted 30.04.2022

The article deals with a three-link manipulator having two translational and one rotational kinematic pairs of the fifth class. The axes of the first and second kinematic pairs are orthogonal, and the second and third are parallel. Such robots are used in loading and unloading of technological equipment for arc welding. Systems of three nonlinear differential equations of the second order describing its dynamics were obtained for the manipulator under consideration. Due to the need to estimate the moment of load arising on the shaft of the control drive, the external generalized forces were reduced to the corresponding generalized coordinate. The method of harmonic linearization of nonlinearities was used to study the manipulation system. The application of the method is due to the fact that the method allows without studying the transition process of the system, to find the main characteristics of the system, such as frequency, amplitude and phase of oscillations, dependence on the form of nonlinearities, parameters of the linear part of the system, etc. The relations allowing to define own vibrational modes of movement of the considered type of the manipulator are received. These ratios can be used in the calculation, design and commissioning of such a manipulator. It is established that in the case when the system of equations describing the dynamics of the manipulator considered in the work, taking into account the equations describing the dynamics of the drives, does not contain strongly expressed nonlinearities, these relations are a system of two algebraic equations with respect to the frequency of 6 and 5 degrees, respectively.

Keywords: three-link manipulator; the dynamic equations; the method of harmonic linearization of nonlinearities.

Введение. Системы дифференциальных уравнений, описывающие динамику механической системы трехзвенных манипуляторов с тремя степенями подвижности, в большинстве своем являются нелинейными [1]. Кроме того, ряд существенных нелинейностей типа зон нечувствительности, насыщения люфта и т. д. содержат приводы степеней подвижности и механизмы передачи движения. На начальном этапе исследования таких систем, при выборе структуры и параметров системы с учетом имеющихся нелинейностей, целесообразно применять метод гармонической линеаризации нелинейностей. Это связано прежде всего с тем, что метод позволяет определять основные характеристики системы, такие как частота, амплитуда и фаза колебаний, зависимость от формы нелинейностей, параметров линейной части системы и т. д., без непосредственного рассмотрения переходного процесса системы [4].

Рассмотрим задачу нахождения условий существования и устойчивости периодических колебательных режимов движения трехзвенного манипулятора робота, имеющего две поступательные и одну вращательную кинематические пары 5-го класса [8]. Предположим, что управление манипулятором осуществляется с помощью трех независимых электроприводов, располагающихся в сочленениях звеньев. В качестве математической модели такого привода примем уравнение:

$$M_{ДВ}^i = d_i k_y^i (T_y^i p + 1)(q_i + q_i^*) - h_i p q_i, \quad (1)$$

где d_i, h_i – конструктивные параметры i -го привода; k_y^i – коэффициент, обратно пропорциональный коэффициенту усиления i -го двигателя; q_i^* – программное значение обобщенной координаты i -й степени подвижности; p – оператор дифференцирования [12].

Предположим, что к выходной оси второго привода приложен момент сил сопротивления, создаваемый силами вязкого трения в элементах механической передачи:

$$M_{ТД}^2 = -K_{В.ТД}^2 \cdot \dot{q}_2. \quad (2)$$

Примем также, что к выходным валам первого и третьего приводов приложены силы вязкого трения:

$$F_{ТД}^j = -K_{В.ТД}^j \cdot \dot{q}_j, j = 1, 3. \quad (3)$$

С учетом сделанных предположений уравнения динамики рассматриваемого манипулятора совместно с уравнениями управляющих приводов можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (I_{p1} n_1^2 + a_1) \ddot{q}_1 + a_5 \dot{q}_2 + a_6 (\dot{q}_2)^2 &= d_1 n_1 k_y^1 (T_y^1 \dot{q}_1^* - T_y^1 \dot{q}_1 + q_1^* - q_1) - h_1 n_1 \dot{q}_1 - K_{В.ТД}^1 \cdot \dot{q}_1, \\ (I_{p2} n_2^2 + a_2) \ddot{q}_2 + a_5 \dot{q}_1 &= d_2 n_2 k_y^2 (T_y^2 \dot{q}_2^* - T_y^2 \dot{q}_2 + q_2^* - q_2) - h_2 n_2 \dot{q}_2 - K_{В.ТД}^2 \cdot \dot{q}_2 + a_7 (p_2 + 2(p_3 + p_r)). \end{aligned} \quad (4)$$

$$(I_{p3} n_3^2 + a_3) \ddot{q}_3 = d_3 n_3 k_y^3 (T_y^3 \dot{q}_3^* - T_y^3 \dot{q}_3 + q_3^* - q_3) - h_3 n_3 \dot{q}_3 - K_{В.ТД}^3 \cdot \dot{q}_3. \quad (5)$$

Значения коэффициентов этой системы определяются по формулам:

$$a_1 = m_1 + m_2 + m_3, \quad (6)$$

$$a_2 = I_{z_2} + I_{z_3} + m_2 \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + m_3 l_2^2, \quad a_3 = m_3, \quad (7)$$

$$a_4 = m_2 l_2 \cos q_2 + 2 m_3 l_2 \cos q_2, \quad a_5 = \frac{1}{2} a_4, \quad (8)$$

$$a_6 = -\frac{1}{2} (m_2 + 2 m_3) l_2 \sin q_2, \quad (9)$$

$$a_7 = -\frac{l_2}{2} \cos q_2. \quad (10)$$

Величины q_j представляют собой обобщенные координаты, определяющие конфигурацию захватного устройства и манипулятора робота; через $m_j, l_j, p_j, I_{x_i}, I_{y_i}, I_{z_i}$ обозначены соответственно масса, вес и осевые моменты инерции звена i ; p_r – вес груза в захватном устройстве [6].

Эта система дифференциальных уравнений в операторном виде может быть записана следующим образом [10]:

$$Q_1(p) q_1 = s_1 F_{11}(q_2, p^2 q_2) - s_1 F_{12}(q_2, p q_2) + d_1 n_1 k_y^1 (T_y^1 p + 1)(q_1^*),$$

$$Q_2(p) q_2 = s_2 F_{22}(q_2, p^2 q_1) + d_2 n_2 k_y^2 (T_y^2 p + 1)(q_2^*), \quad (11)$$

$$Q_3(p) q_3 = d_3 n_3 k_y^3 (T_y^3 p + 1)(q_3^*). \quad (12)$$

При записи этой системы операторных уравнений использованы следующие обозначения [14]:

$$s_1 = -\frac{l_2}{2 n_1} (m_2 + 2 m_3), \quad s_2 = -\frac{l_2}{2 n_2} (m_2 + 2 m_3), \quad F_{11}(q_2, p^2 q_2) = p^2 q_2 \cos q_2, \quad (13)$$

$$F_{12}(q_2, p q_2) = (p q_2)^2 \sin q_2, \quad F_{22}(q_2, p^2 q_1) = p^2 q_1 \cos q_2 + \frac{p_2 + 2(p_3 + p_r)}{m_2 + 2 m_3} \cos q_2, \quad (14)$$

$$Q_i(p) = \frac{I_{p_i} n_i^2 + a_i}{n_i} p^2 + \left(k_i^i + \frac{k_{В.ТД}^i}{n_i}\right) p + k_1^i, \quad (15)$$

$$k_2^i = d_i k_y^i T_y^i + h_i, \quad k_1^i = d_i k_y^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (16)$$

Структурная схема системы уравнений (11) представлена на рис. 1.

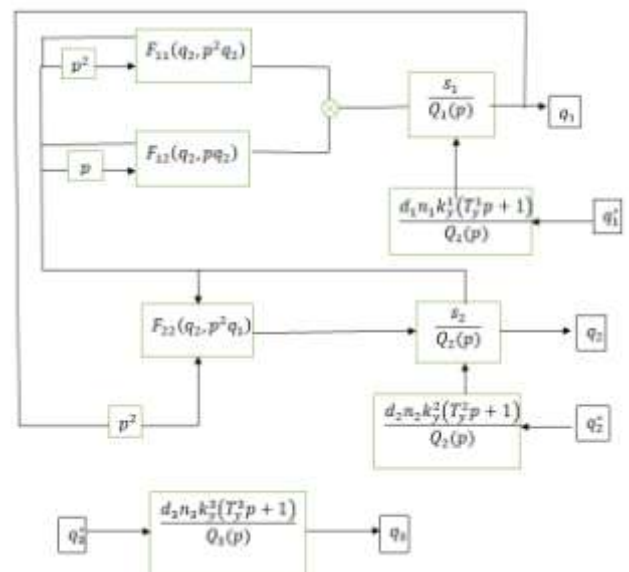


Рис. 1. Структурная схема системы уравнений (11)

Рассмотрим свободное (без внешних возмущающих и управляющих воздействий) движение манипуляционной системы. В связи с этим величины q_i^* , ($i = 1, 2, 3$) примем равными нулю и $F_{22}(q_2, p^2 q_1) = p^2 q_1 \cos q_2$

Допустим, что все промежуточные части системы между нелинейностями обладают обобщенным свойством фильтра [7]. Согласно методу гармонической линеаризации положим, что для переменных, стоящих под знаками нелинейных функций, периодическое решение достаточно близко к синусоидальному, т. е.:

$$q_2 = A_{q_2} \sin \Omega t, \quad q_1 = A_{q_1} \sin(\Omega t - \Theta). \quad (17)$$

Здесь через $A_{q_1}, A_{q_2}, \Omega, \Theta$ обозначены амплитуды колебаний, частота и сдвиг фаз колебаний переменных q_1, q_2 , стоящих под знаками нелинейных функций [11]. Выполним гармоническую линеаризацию нелинейности:

$$\begin{aligned} F_{12}(q_2, p q_2) &= (p q_2)^2 \sin q_2 = \\ F_{12}(A_{q_2} \sin \Omega t, A_{q_2} \Omega \cos \Omega t) &= \\ (A_{q_2} \Omega)^2 \cos^2 \Omega t \sin A_{q_2} \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (18)$$

Раскладывая эту функцию в ряд Фурье, получаем гармонически линеаризованное представление нелинейной функции $F_{12}(q_2, p q_2)$:

$$F_{12}(q_2, p q_2) = \frac{1}{2} \{J_1(A_{q_2}) + J_3(A_{q_2})\} (A_{q_2})^2 \Omega^2 q_2 = q_{12}(A_{q_2}, \Omega) q_2. \quad (19)$$

Здесь через $J_1(A_{q_2}), J_3(A_{q_2})$ обозначены функции Бесселя 1-го и 3-го порядков соответственно, и:

$$q_{12}(A_{q_2}, \Omega) = \frac{1}{2} \{J_1(A_{q_2}) + J_3(A_{q_2})\} (A_{q_2})^2 \Omega^2. \quad (20)$$

Аналогичным образом было получено гармонически линеаризованное выражение для функции $F_{11}(q_2, p^2 q_2)$:

$$\begin{aligned} F_{11}(q_2, p^2 q_2) &= \frac{q_{11}(A_{q_2}, \Omega)}{\Omega^2} p^2 q_2 = \\ 2J_1(A_{q_2}) p^2 q_2, \quad q_{11}(A_{q_2}, \Omega) &= 2J_1(A_{q_2}) \Omega^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, первое уравнение системы может быть представлено в следующем виде:

$$Q_1(p) q_1 = s_1 \frac{q_{11}(A_{q_2}, \Omega)}{\Omega^2} p^2 q_2 - s_1 q_{12}(A_{q_2}, \Omega) q_2. \quad (22)$$

Рассмотрим нелинейную функцию $F_{22}(q_2, p^2 q_1)$, входящую во второе уравнение системы (11). Запишем равенства (17) в символической форме [13]:

$$q_1 = A_{q_1} e^{-j(\Omega t - \Theta)}, \quad q_2 = A_{q_2} e^{-j\Omega t}, \quad j - \text{ м н и м а я е д и н и ц а.} \quad (23)$$

Подставляя (23) в гармонически линеаризованное уравнение (22) при $p = j\Omega$, находим, что:

$$\begin{vmatrix} Q_1(\lambda) & -s_1 \left(\frac{q_{11}}{\Omega^2} \lambda^2 + q_{12} \right) & 0 \\ 0 & Q_2(\lambda) + s_2 \left(u_1(\Omega) q_{11} q_2 + \frac{v_1(\Omega)}{\Omega} q_{22} \lambda \right) (q_{11} + q_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & Q_3(\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

$$A_{q_2} = A_{q_1} \left| -\frac{s_1}{Q_1(j\Omega)} \right| (q_{11}(A_{q_2}, \Omega) + q_{12}(A_{q_2}, \Omega)), \quad (24)$$

$$\Theta = -\arg \left\{ -\frac{s_1}{Q_1(j\Omega)} \right\}. \quad (25)$$

Таким образом, получаем, что:

$$q_1 = A_{q_2} (u_1(\Omega) \sin \Omega t + v_1(\Omega) \cos \Omega t) (q_{11}(A_{q_2}, \Omega) + q_{12}(A_{q_2}, \Omega)), \quad (26)$$

$$u_1(\Omega) = \operatorname{Re} \left(-\frac{s_1}{Q_1(j\Omega)} \right) = \frac{-s_1 (k_1^1 - P_1 \Omega^2)}{(k_1^1 - P_1 \Omega^2)^2 + (k_2^1 + k_c^1)^2 \Omega^2}, \quad (27)$$

$$v_1(\Omega) = \operatorname{Im} \left(-\frac{s_1}{Q_1(j\Omega)} \right) = \frac{s_1 (k_2^1 + k_c^1) \Omega}{(k_1^1 - P_1 \Omega^2)^2 + (k_2^1 + k_c^1)^2 \Omega^2}. \quad (28)$$

$$k_c^i = \frac{k_{b..r.p}^i}{n_i}, \quad P_i = \frac{l_{p i} n_i^2 + a_i}{n_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (29)$$

Таким образом, получаем, что функцию $F_{22}(q_2, p^2 q_1)$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} F_{22}(q_2, p^2 q_1) &= \\ -A_{q_2} \Omega^2 (u_1(\Omega) \sin \Omega t + v_1(\Omega) \cos \Omega t) & (q_{11}(A_{q_2}, \Omega) + \\ q_{12} A_{q_2} \Omega \cos A_{q_2} \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (30)$$

Разлагая эту функцию в ряд Фурье и отбрасывая высшие гармоники разложения, получаем линеаризованное выражение [3]:

$$\begin{aligned} F_{22}(q_2, p^2 q_1) &= \\ - \left(u_1(\Omega) q_{11}(A_{q_2}, \Omega) q_2 + \right. & \\ \left. v_1 \Omega \Omega q_{22} A_{q_2} \Omega p q_2 q_{11} A_{q_2} \Omega + q_{12} A_{q_2} \Omega \right) & \quad (31) \end{aligned}$$

$$q_{22}(A_{q_2}, \Omega) = (J_1(A_{q_2}) + J_1(A_{q_2})) \Omega^2. \quad (32)$$

В результате выполненных преобразований, получаем линеаризованную систему уравнений:

$$\begin{aligned} Q_1(p) q_1 &= s_1 \frac{q_{11}(A_{q_2}, \Omega)}{\Omega^2} p^2 q_2 - s_1 q_{12}(A_{q_2}, \Omega) q_2, \\ Q_2(p) q_2 &= -s_2 \left(u_1(\Omega) q_{11}(A_{q_2}, \Omega) q_2 + \right. \\ & \left. + \frac{v_1(\Omega)}{\Omega} q_{22}(A_{q_2}, \Omega) p q_2 \right) (q_{11}(A_{q_2}, \Omega) + \\ & \left. + q_{12}(A_{q_2}, \Omega) \right). \end{aligned}$$

$$Q_3(p) q_3 = 0. \quad (33)$$

Для отыскания амплитуды и частоты периодического решения $q_2(t)$ выпишем характеристическое уравнение этой системы [9]:

Как известно, при отсутствии внешнего периодического воздействия решения вида (17) возможны только при наличии пары чисто мнимых корней у характеристического уравнения замкнутой системы. При этом предполагается, что все остальные корни уравнения имеют отрицательные вещественные части [5]. Таким образом, полагая в характеристическом уравнении $\lambda = j\Omega$, получаем систему, из которой могут быть найдены амплитуда и частота искомого периодического решения [15]:

$$-K_1 \Omega^6 + K_3 \Omega^4 - K_5 \Omega^3 + K_7 - (N_1 \Omega^4 - N_3 \Omega^2 + N_5 q_{11} q_{11} + q_{12} s_1 s_2 k_{11} - P_1 \Omega^2 k_{11} - P_1 \Omega^2 22 + k_{21} + k c_{12} \Omega^2 + N_2 \Omega^4 - N_4 \Omega^2 s_1 s_2 k_{21} + k c_1 k_{11} - P_1 \Omega^2 22 + k_{21} + k c_1 2 \Omega^2 q_{22} q_{11} + q_{12} = 0, \quad (35)$$

$$K_3 \Omega^5 - K_4 \Omega^3 - K_5 \Omega^3 + K_6 \Omega - (-N_2 \Omega^3 + N_4 \Omega) q_{11} (q_{11} + q_{12}) \frac{s_1 s_2 (k_1^1 - P_1 \Omega^2)}{(k_1^1 - P_1 \Omega^2)^2 + (k_2^1 + k_c^1)^2 \Omega^2} + (N_1 \Omega^4 - N_3 \Omega^3 + N_5) \frac{s_1 s_2 (k_2^1 + k_c^1) \Omega}{(k_1^1 - P_1 \Omega^2)^2 + (k_2^1 + k_c^1)^2 \Omega^2} q_{22} (q_{11} + q_{12}) = 0. \quad (36)$$

Значения коэффициентов этой системы имеют вид:

$$K_1 = P_1 P_2 P_3, \quad (37)$$

$$K_2 = P_1 P_2 (k_2^3 + k_c^3) + P_3 P_2 (k_2^1 + k_c^1) + P_3 P_1 (k_2^2 + k_c^2), \quad (38)$$

Литература

1. Робототехника и гибкие автоматизированные производства // под ред. И.М. Макарова. М.: Высш. школа, 1986. 175 с.
2. Вукобратович М.К., Стокич В.Д. Управление манипуляционными роботами. М.: Наука, 1985. 383 с.
3. Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления // под ред. Е.П. Попова. М.: Машиностроение, 1970. 567 с.
4. Стокич В.Д., Вукобратович М.К. Практическая стабилизация роботизированных систем за счет децентрализованного управления // Автоматика. 1984. Т. 20. № 3.
5. Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С. Системы управления трехзвенными манипуляторами. М.: Наука, 1978. 416 с.
6. Бутенин Н.Б., Неймарк Ю.И., Фуфаль Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
7. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 471 с.
8. Алексеева С.В., Соколова В.А., Марков В.А., Иванов А.М. Анализ замкнутой исполнительной системы управления трехзвенным манипулятором методом точечных отображений // Науч.-техническая конф. по итогам науч.-исслед. работ 2019 г.: сб. ст. по материалам конф. (27 янв. - 06 февр. 2020 г.). СПб., 2020. С. 246-249.
9. Алексеева С.В., Соколова В.А., Марков В.А. Гармоническая линеаризация уравнений динамики одного вида трехзвенного манипулятора робота для лесных машин // Повышение эффективности лесного комплекса: материалы Шестой Всерос. нац. науч.-практической конф. с междунар. участием (22 мая 2020 г.). Петрозаводск, 2020. С. 4-8.
10. Rogovskii I.L., Zapadlovskij O.S., Voinash S.A., Maksimovich K.Y., Sokolova V.A., Alekseeva S.V., Taraban M.V. Research of vibroacoustic signals in diagnostics of technical condition of engines of beet harvesters combines // Journal of Physics: Conference Series. Krasnoyarsk, Russian Federation. 2020. P. 42032.

$$K_3 = P_2 (k_2^1 + k_c^1) (k_2^3 + k_c^3) + P_1 (k_2^2 + k_c^2) (k_2^3 + k_c^3) + P_3 (k_2^1 + k_c^1) (k_2^2 + k_c^2) + P_3 P_1 k_2^1 + P_1 P_2 k_1^1, \quad (39)$$

$$K_4 = (k_2^1 + k_c^1) (k_2^2 + k_c^2) (k_2^3 + k_c^3) + P_1 (k_1^3 (k_2^2 + k_c^2) + k_1^2 (k_2^3 + k_c^3)) + P_2 (k_1^3 (k_2^1 + k_c^1) + k_1^1 (k_2^3 + k_c^3)) + P_3 (k_1^2 (k_2^1 + k_c^1) + k_1^1 (k_2^2 + k_c^2)), \quad (40)$$

$$K_5 = k_1^3 (k_2^1 + k_c^1) (k_2^2 + k_c^2) + k_1^2 (k_2^1 + k_c^1) (k_2^3 + k_c^3) + k_1^1 (k_2^2 + k_c^2) (k_2^3 + k_c^3) + P_1 k_1^2 k_1^3 + P_2 k_1^1 k_1^3 + P_3 k_2^1 k_1^2, \quad (41)$$

$$K_6 = k_1^1 k_1^3 (k_2^2 + k_c^2) + k_1^2 k_1^3 (k_2^1 + k_c^1) + k_1^1 k_1^2 (k_2^3 + k_c^3), \quad (42)$$

$$K_7 = k_1^1 k_1^3 k_2^1, \quad (43)$$

$$N_1 = P_1 P_3, \quad (44)$$

$$N_2 = P_1 (k_2^3 + k_c^3) + P_3 (k_2^1 + k_c^1), \quad (45)$$

$$N_3 = (k_2^1 + k_c^1) (k_2^3 + k_c^3) + P_1 k_1^3 + P_3 k_1^1, \quad (46)$$

$$N_4 = k_1^3 (k_2^1 + k_c^1) + k_1^1 (k_2^3 + k_c^3), \quad (47)$$

$$N_5 = k_1^1 k_1^3. \quad (48)$$

Заключение.

Таким образом, в результате произведенных расчетов получены аналитические выражения, позволяющие определить амплитуду и частоту искомого периодического решения [2].

11. Kretinin V.I., Teppoev A.V., Sokolova V.A., Polyanskaya O.A., Alekseeva S.V. Justification of strengthening of working bodies of forestry machines with self-fluxing alloys during gas-flame spraying. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 6, Politics, Industry, Science, Education. Ser. «VI All-Russian Science and Technology Conference: Forests of Russia: Politics, Industry, Science, Education, FR 2021», 2021. P. 012045.
12. Kamenchukov A.V., Kondratenko T.E., Voinash S.A., Sokolova V.A., Alekseeva S.V., Taraban M.V. Prospects of development and design features of toll roads in the russian far east. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Ser. «International Science and Technology Conference «Earth Science», 2021. P. 012112.
13. Алексеева С.В., Соколова В.А., Марков В.А., Пендриков Е.С., Баринаева П.А., Кривоногова А.С. Использование математического моделирования при проектировании манипуляторов лесных машин // Науч.-техническая конф. по итогам науч.-исслед. работ 2019 г.: сб. ст. по материалам конф. (27 янв. - 06 февр. 2020 г.). СПб., 2020. С. 227-232.
14. Liao Fong-Yaun, Chern Ming-Yang. Robot manipulator dynamics computation on a VLSI array processor // SCS-85: Int. Conf. Supercomput. Syst. St. Petersburg, Fla. Dec. 16-20. 1985. Proc. Washington (D.C.). 1985.
15. Ven H.H. Aspects of dynamic models of robots // Journal A. 1986. V. 27. № 1.

References

1. Robotics and flexible automated manufacturing // pod. red. I.M. Makarova. M.: Vyssh. shkola, 1986. 175 p.
2. Vukobratovich M.K., Stokich V.D. Manipulative Robot Management. M.: Nauka, 1985. 383 p.
3. Harmonic linearization method in the design of nonlinear automatic control systems // pod red. E.P. Popova. M.: Mashinostroenie, 1970. 567 p.

4. Stokich V.D., Vukobratovich M.K. Practical stabilization of robotic systems by decentralized control // *Avtomatika*. 1984. V. 20. № 3.
5. Medvedev V.S., Leskov A.G., YUshchenko A.S. Systems for managing manipulative robots. M.: Nauka, 1978. 416 p.
6. Butenin N.B., Nejmark YU.I., Fufal' N.A. Introduction to the theory of nonlinear oscillations. M.: Nauka, 1976. 384 p.
7. Nejmark YU.I. The method of point maps in the theory of nonlinear oscillations. M.: Nauka, 1972. 471 p.
8. Alekseeva S.V., Sokolova V.A., Markov V.A., Ivanov A.M. Analysis of the closed executive control system of a three-link manipulator by the method of point maps // *Nauch.-tehnicheskaya konf. po itogam nauch.-issled. rabot 2019 g.: sb. st. po materialam konf. (27 yanv. - 06 fevr. 2020 g.)*. SPb., 2020. P. 246-249.
9. Alekseeva S.V., Sokolova V.A., Markov V.A. Harmonic linearization of equations of dynamics of one type of three-link robot manipulator for forest machines // *Povyshenie effektivnosti lesnogo kompleksa: materialy SHestoj Vseros. nac. nauch.-prakticheskoy konf. s mezhdunar. uchastiem (22 maya 2020 g.)*. Petrozavodsk, 2020. P. 4-8.
10. Rogovskii I.L., Zapadlovskij O.S., Voinash S.A., Maksimovich K.Y., Sokolova V.A., Alekseeva S.V., Taraban M.V. Research of vibroacoustic signals in diagnostics of technical condition of engines of beet harvesters combines // *Journal of Physics: Conference Series*. Krasnoyarsk, Russian Federation. 2020. P. 42032.
11. Kretinin V.I., Teppoev A.V., Sokolova V.A., Polyanskaya O.A., Alekseeva S.V. Justification of strengthening of working bodies of forestry machines with self-fluxing alloys during gas-flame spraying. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 6, Politics, Industry, Science, Education. Ser. «VI All-Russian Science and Technology Conference: Forests of Russia: Politics, Industry, Science, Education, FR 2021», 2021. P. 012045.
12. Kamenchukov A.V., Kondratenko T.E., Voinash S.A., Sokolova V.A., Alekseeva S.V., Taraban M.V. Prospects of development and design features of toll roads in the russian far east. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Ser. «International Science and Technology Conference «Earth Science», 2021. P. 012112.
13. Alekseeva S.V., Sokolova V.A., Markov V.A., Pendrikov E.S., Barinova P.A., Krivonogova A.S. Use of mathematical modeling in the design of manipulators of forest machines // *Nauch.-tehnicheskaya konf. po itogam nauch.-issled. rabot 2019 g.: sb. st. po materialam konf. (27 yanv. - 06 fevr. 2020 g.)*. SPb., 2020. P. 227-232.
14. Liao Fong-Yaun, Chern Ming-Yang. Robot manipulator dynamics computation on a VLSI array processor // *SCS-85: Int. Conf. Supercomput. Syst. St. Petersburg, Fla. Dec. 16-20. 1985. Proc. Washington (D.C.)*. 1985.
15. Ven H.H. Aspects of dynamic models of robots // *Journal A*. 1986. V. 27. № 1.